به نام خدا

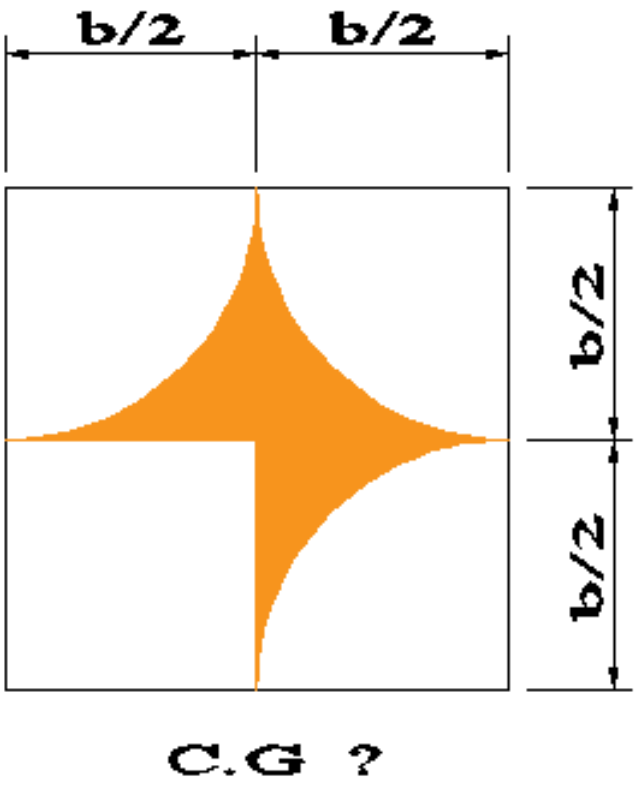
حل مسائل استاتیک

<< برای دانشجویان دانشکده فنی>>

تألیف:
محمد جواد تسکینی

به پسرم اردلان

محمد جواد تسکینی



بیوگرافی نویسنده

۱- اخذ دیپلم ریاضی از دبیرستان نوربخش رشت درسال۱۳۴۶

۲-لیسانس مهندسی مکانیک(B.S.M.E) از دانشگاه لمار تکزاس آمریکا

(Lamar University,Tex,U.S.A)در سال ۱۹۷۲(۱۳۵۱).

۳-فوق لیسانس علوم مهندسی مکانیک(M.S.M.E) از دانشگاه هیوستون تکزاس آمریکا

(University of Houston,Tex,U.S.A) در سال۱۹۷۴(۱۳۵۳).

_ فعالیتهای اجرائی:

۱- عضو هیأت علمی گروه مکانیک دانشگاه گیلان از سال ۱۳۷۵ تا کنون.
۲- مدیر اداره مهندسی کارخانه توشیبا (پارس خزر فعلی) ،از سال ۱۳۵۶ تا سال ۱۳۶۹.
۳- رئیس کارخانه روف تایل وابسته به بنیاد مستضعفان از سال ۱۳۶۹ تا سال ۱۳۷۰.
۴- مدیر ادازه مهندسی کارخانه فزش گیلان ، از سال ۱۳۷۰ تا سال ۱۳۷۱.
۵- مدیر پروژه تحقیقاتی کارخانه چوکای گیلان از سال ۱۳۷۲ تا سال ۱۳۷۵.
۶- مربی شطرنج ، تیم دانشجویی دانشگاه گیلان به مدت دو سال.
۷- حضور در جبه های جنگ غرب کشور به مدت شش ماه(افسر و منقضی خدمت سال ۱۳۵۶).
۸- عضو نظام مهندسی ساختمان گیلان ،به مدت ۱۵سال.
۹- بازرس پایه یک کنترل گاز خانگی وصنعتی استان گیلان.

کتابها:

۱-کتاب " نقشه کشی صنعتی ۱ " اداره چاپ و انتشارات دانشگاه گیلان ، ۱۳۸۷

۲- کتاب " نقشه کشی صنعتی ۲ " موسسه ی آموزش عالی احرار رشت

۳- کتاب " مکانیک سیا لات " که مورد تائید معاونت پژوهشی دانشگاه گیلان قرار گرفت.

۴-کتاب" نقشه کشی قطعات مکانیکی " موسسه ی آموزش عالی احرار رشت

فهرست مطالب

مقدمه ---------- ص

مجموعه ای از مسائل کتاب Archie Higdon & William B.Stiles

فصل اول

تجزیه نیروها و تعادل نقاط مادی

صفحه

۱-۱ شرح مختصری راجع به قوانین تجزیه نیروها و تعادل ---------- ۱-۵

۱-۲ تجزیه نیروها ---------- ۵-۸

۱-۳ تصویر یک نیرو روی یک محور ---------- ۹

۱-۴ حاصل ضرب برداری دو بردار ---------- ۱۰

۱-۵ گشتاور نیروها نسبت به یک نقطه ---------- ۱۱-۱۲

۱-۶ گشتاور نیروها نسبت به یک محورو یک نقطه ---------- ۱۲-۱۶

۱-۷ نیروهای کوپل نیرو وگشتاور آن ---------- ۱۷-۱۸

۱-۸ تبدیل سیستم ها به یک نیروی منفرد معادل ---------- ۱۸-۲۰

۱-۹ تبدیل سیستم ها به یک نیروی منفرد معادل وجفت نیرو ---------- ۲۱-۲۲

فصل دوم

اجسام صلب،سیستم نیروهای معادل

صفحه

۲- ۱ شرح مختصری راجع به قوانین تجزیه نیروها و تعادل ---------- ۲۳

۲- ۲ برآیند نیروها ---------- ۲۳

۲- ۳ گشتاور نیروها ---------- ۲۴

۲- ۴ نیروهای هم صفحه و غیر متقارب ---------- ۲۴-۲۶

فصل سوم

توزیع نیروها،مرکز سطح و مرکز ثقل

۳- ۱ شرح مختصری راجع به قوانین مرکز سطح ---------- ۲۷

۳- ۲ مرکز ثقل و مرکز سطح به توسط آنتیگرال گیری ---------- ۲۸-۳۵

۳- ۳ مرکز سطوح مرکب ---------- ۳۶-۳۷

۳- ۴ مرکز سطوح صفحات فلزی ---------- ۳۸-۳۹

۳- ۵ مرکز ثقل قوس ها(خم)---------- ۴۰

۳- ۶ مرکز ثقل احجام و اجسام دوار ---------- ۴۰-۴۵

۳- ۷ مرکز ثقل سطح صفحات فلزی ---------- ۴۶

۳- ۸ مرکز ثقل اشکال مرکب بوسیله مفتول ---------- ۴۶-۴۷

۳- ۹ مرکز ثقل به توسط قانون گلدن-پاپی یوس ---------- ۴۷

۳- ۱۰ مرکز ثقل احجام مرکب---------- ۴۸-۴۹

فصل چهارم

تعادل اجسام صلب و قاب ها

۴- ۱ کشش در کابل ها ---------- ۵۰

۴- ۲ کشش در بازوها و نیرو در کاسه ساچمه ---------- ۵۱

۴- ۳ قرقره های مرکب ---------- ۵۱-۵۲

۴- ۴ قاب ها و عکس العمل نیروها در پین ها ---------- ۵۲-۶۶

فصل پنجم

اصطکاک

۵-۱ شرح مختصری راجع به قوانین اصطکاک----------۶۷-۶۹

۵-۲ محاسبه نیروهای اصطکاک ----------۶۹-۷۳

۵-۳ محاسبه زوایا و ضریب اصطکاک---------- ۷۴-۷۶

۵-۴ مسائل اصطکاک اجسام خشک ---------- ۷۶-۸۰

فصل ششم

گشتاور لختی،حاصل ضرب لختی

۶-۱ گشتاور لختی قطبی ---------- ۸۱

۶-۲ گشتاور لختی سطح مرکب ----------۸۱-۸۴

۶-۳ شعاع چرخش سطح مرکب ----------۸۵-۸۶

۶-۴ شعاع چرخش سطح ،قانون موازی ----------۸۷

۶-۵ گشتاور لختی سطح مرکب ---------- ۸۸-۸۹

۶-۶ شعاع چرخش سطح مرکب ----------۹۰

۶-۷ شعاع چرخش قطبی مرکب----------۹۱-۹۳

۶-۸ نکاتی چند در باره حاصل ضرب لختی سطح و تعیین فرمول آن---------- ۹۳-۹۴

۶-۹ حاصل ضرب لختی سطح مرکب ----------۹۴-۹۶

۶-۱۰ گشتاور لختی جرم----------۹۷-۱۰۷

۶-۱۱ حاصل ضرب لختی جرم ---------- ۱۰۸-۱۱۰

۶-۱۲ شعاع چرخش جرم و گشتاور لختی جرم مرکب----------۱۱۱-۱۱۳

مجموعه ای از مسائل کتاب Ferdinand P.Beer &E.Russel Johnston

ترجمه دکتر ابراهیم واحدیان

فصل دوم

تعادل اجسام صلب

صفحه

۲-۱ تجزیه نیروها ---------- ۱۱۴-۱۱۵

۲-۲ برآیند نیروها ---------- ۱۱۶-۱۲۶

۲-۳ کشش نیروها ---------- ۱۲۷-۱۲۹

۲-۴ مؤ لفه نیروهای xوyوzو کشش در کابل ها ---------- ۱۳۰-۱۴۲

فصل سوم

اجسام صلب، سیستم نیروهای متعادل

صفحه

۳-۱ شرح مختصری راجع به رنچ(Wrench) ---------- ۱۴۳-۱۴۴

۳-۲ گشت آور نیروها نسبت به یک نقطه و یک محور ---------- ۱۴۵-۱۶۲

۳-۳ کوپل معادل و تیدیل سیستم ها به یک نیروی منفرد معادل ---------- ۱۶۳-۱۶۴

۳-۴ رنچ(Wrench)، تبدیل سیستم به نیروی منفرد و کوپل معادل ---------- ۱۶۵-۱۷۶

فصل چهارم

نیروهای وارد بر میله ها و کابلها

صفحه

۴-۱ عکس العمل نیروها در پین و نقاط ---------- ۱۷۷-۱۸۳

۴-۲ کشش نیروها در کابل ها ---------- ۱۸۴-۱۹۲

۴-۳ سازه معین و سازه نا معین و پایدار ---------- ۱۹۳-۲۰۰

۴-۴ قانون سه نیروها ---------- ۲۰۰-۲۰۸

۴-۵ کشش در کابل ها و عکس العمل نیروها ---------- ۲۰۹-۲۱۴

فصل پنجم

توزیع نیروها،مرکز سطح، مرکز ثقل

صفحه

۵-۱ مرکز سطح ---------- ۲۱۵-۲۲۰

۵-۲ مرکز سطح سیم خم مرکب ---------- ۲۲۱

۵-۳ مرکز سطح به توسط روش تابع اولیه ---------- ۲۲۲-۲۲۷

۵-۴ حجم بدست آمده به توسط دوران(قانون پاپی-یوس) ---------- ۲۲۸

۵-۵ مرکز سطح به توسط روش تابع اولیه ---------- ۲۲۹-۲۳۰

۵-۶ مرکز ثقل یک حجم ---------- ۲۳۱

۵-۷ مرکز سطح مرکب سهمی ها ---------- ۲۳۲

۵-۸ مرکز ثقل عرقچین ---------- ۲۲۹-۲۳۰

۵-۹ مرکز ثقل حجم مرکب و سطح جانبی از دوران ---------- ۲۳۱-۲۳۳

۵-۱۰ مرکز ثقل بارهای وارد بر میله ها ---------- ۲۳۴-۲۳۷

۵-۱۱ مرکز ثقل احجام مرکب ---------- ۲۳۸-۲۴۰
۵-۱۲ مرکزثقل صفحات فلزی مرکب ---------- ۲۴۱-۲۴۳
۵-۱۳ مرکز ثقل سطوح مرکب به روش انتیگرال گیری ---------- ۲۴۴-۲۴۹
۵-۱۴ مرکز ثقل بارهای وارد بر میله ها ---------- ۲۵۰-۲۵۲

فصل ششم

خرپا

صفحه

۶-۱ شرح مختصری راجع به خرپا ---------- ۲۵۳-۲۵۶
۶-۲ نیروهای کششی و نیروهای فشاری در خرپا ---------- ۲۵۷-۲۶۸
۶-۳ عضو صفر نیرو در خرپاها ---------- ۲۶۸-۲۶۹
۶-۴ نیروها در خرپای سه بعدی ---------- ۲۷۰
۶-۵ روش قانون ماکسول(Maxwell) ---------- ۲۷۱-۲۸۳
۶-۶ نیروهای وارد بر قاب ها و عکس العمل نیروها در پین ها ---------- ۲۸۴-۲۸۹

فصل هفتم

گشت آور خمشی و دیاگرامهای برشی و خمشی

صفحه

۷-۱ شرح مختصری راجع به گشت آورخمشی و نیروهای برشی ---------- ۲۹۳-۲۹۴
۷-۲ دیاگرام آزاد برشی و گشت آور خمشی ---------- ۲۹۵-۳۱۳

فصل هشتم

اصطکاک

صفحه

۸-۱ محاسبه نیروهای اصطکاک ---------- ۳۱۴-۳۱۷

۸-۲ محاسبه زوایا و ضریب اصطکاک ---------- ۳۱۷-۳۲۰

۸-۳ مسائل اصطکاک اجسام خشک ---------- ۳۲۱-۳۲۷

فصل نهم

گشت آور لختی ،حاصل ضرب لختی

صفحه

۹-۱ گشت آور اینرسی سطوح بوسیله تابع اولیه ---------- ۳۲۸-۳۲۹

۹-۲ شعاع چرخش سطح ---------- ۳۳۰-۳۳۲

۹-۳ گشت آور اینرسی سطوح ---------- ۳۳۳-۳۳۴

۹-۴ گشت آور اینرسی قطبی ---------- ۳۳۴-۳۳۷

۹-۵ حاصل ضرب اینرسی سطح ---------- ۳۳۸-۳۴۱

۹-۶ مسائل متفرقه ---------- ۳۴۲-۳۴۳

مجموعه ای از مسائل کتابFerdinand P.Beer &E.Russel Johnston

ویرایش چهارم(Fourth edition)

فصل دوم

تعادل اجسام صلب

صفحه

۲-۱ تجزیه نیروها و برآیند نیروها ---------- ۳۴۴-۳۴۹

۲-۲ کشش در کابل ها ---------- ۳۵۰-۳۵۳

۲-۳ تجزیه نیروهای فضائی ---------- ۳۵۴-۳۵۶

۲-۴ تعیین زوایای θ_X , θ_Y, θ_Z ---------- ۳۵۷-۳۶۵

۲-۵ کشش در کابل ها ---------- ۳۶۶-۳۷۳

فصل سوم

اجسام صلب،سیستم نیروهای متعادل

صفحه

۳-۱ گشت آور نیروها نسبت به یک نقطه و یک محور ---------- ۳۷۴-۳۷۷

۳-۲ کوپل نیرو ---------- ۳۷۸-۳۷۹

۳-۳ کوپل معادل و تبدیل سیستم به یک نیروی منفرد معادل ---------- ۳۸۰-۳۹۳

۳-۴ نیروهای وارد بر قاب ها ---------- ۳۹۳-۳۹۷

فصل چهارم و پنجم

تعادل اجسام صلب و قاب ها

صفحه

۴-۱ کوپل نیرو و تبدیل سیستم به یک نیرو و کوپل معادل ----------۴۰۲-۳۹۸

۴-۲ کشش در کابل ها ----------۴۰۳

۴-۳ مرکز ثقل جسم مرکب ----------۴۰۵-۴۰۴

فصل ششم

خرپا

صفحه

۷-۱ نیروی کششی و نیروی فشاری در خرپا ، با روش گره----------۴۱۳-۴۰۶

۷-۲ عضو صفر نیرو در خر پاها----------۴۱۴

۷-۳ روش قانون ماکسول(Maxwell)----------۴۲۲-۴۱۴

۷-۴ عکس العمل نیروهای وارد بر قاب ها ----------۴۳۰-۴۲۲

فصل هفتم

گشت آور خمشی و دیاگرام برشی و خمشی

صفحه

۸-۱ دیاگرام آزاد برشی و گشت آور خمشی ----------۴۴۰-۴۳۱

فصل هشتم

اصطکاک

صفحه

۸-۱ مسائل اصطکاک اجسام خشک----------۴۴۸-۴۴۱

سؤالات و کوئیز ها ----------۵۵۸-۴۴۹

جدول(۱) ،عکس العمل در نقاط اتکاء و اتصال----------۵۵۹
جدول(۲) ،عکس العمل در نقاط اتکاء و اتصال----------۵۶۰
جدول(۳) ،مراکز سطوح برای اشکال مختلف----------۵۶۲-۵۶۱
جدول(۴) ،مرکز ثقل احجام----------۵۶۳
جدول(۵) ،گشت آور لختی----------۵۶۵-۵۶۴
جدول(۶) ،گشت آور لختی برای اشکال مختلف هندسی----------۵۶۷-۵۶۶
جدول(۷) ،ضرایب اصطکاک اجسام روی اجسام----------۵۶۸

مقدمه:

مطالعه استاتیک ، به عنوان اولین درس مهندسی مکانیک ، در ایجاد قدرت و تجزیه و تحلیل مسائل مهندسی مخصوصاً ساختمان وساخت انواع واقسام پل ها نقش موثری دارد.

در این کتاب تشریح علمی مربوط به قوانین استاتیک در هر فصل بطورمختصر آمده است،حل همه مسائل استاتیک مربوط به Archie Higdon & William B.Stiles Ferdinand P.Beer &E.Russel Johnston(ویرایش۲و۴) و بطور مفصل حل شده است.سئوالات و کوئیز هائی متنوع که اینجانب در مراکز آموزشی از دانشجویان گرفته ام ، بطور مفصل وکامل حل گردیده ، وحل بعضی از مسائل مربوط به ممان اینرسی و مرکز ثقل با نرم افزار AutoCAD،مقایسه گردیده، یعنی شکل با نرم افزار ساخته شده و از نرم افزار خواسته شده،که ممان اینرسی و مرکز ثقل وسایر علوم مطرح راجع به یک جسم مرکب را پرینت کند.

قبل از اینکه در باره محتوای این کتاب توضیحاتی ارائه دهم،لازم است به دانشجویان عزیز، اطمینان داده شود که کتابی که اکنون پیش رو دارید حاصل بیش از چندین سال تدریس استاتیک در دوره کارشناسی گروه مکانیک دانشگاه گیلان وسایر مراکز آموزشی است، که البته خالی از اشکال نخواهد بود، امید وارم همکاران محترم دانشگاهی بر ما منت نهاده و از راهنمایی های لازم در صورت بر خورد با هر گونه نقصی در بیان مطالب،غلط های چاپی، ما را اطلاع داده تا در چاپ نهای آن کوشش بیشتری شود.

خرداد ۱۳۹۰ محمد جواد تسکینی

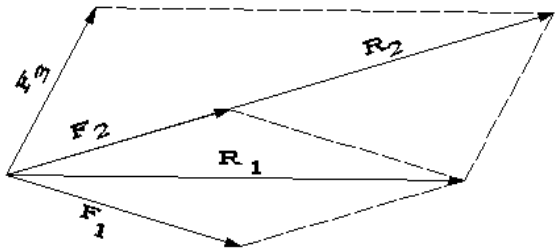
فصل ۱

تجزیه نیروها و تعادل نقاط مادی

اصل انطباق نیروها : super position of Force

اگر به یک دستگاه (یا سیستم) نیرو یا یک دستگاه متعادل اضافه یا کم کنیم در عمل نیروهای که در دستگاه اولیه است تغییری حاصل نمی گردد .

برآیند چند نیروی متقارب :



نیروئی است مانند $\vec{R}$ که از تقاطع نیروهای F_1,F_2 می گذرد .

پس

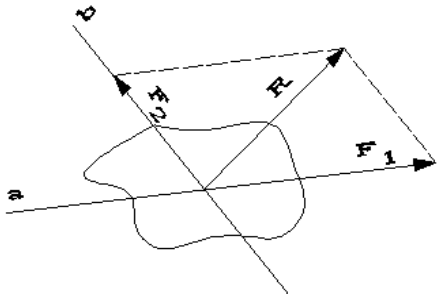
$$\vec{R}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$$

طبق قانون متوازی الاضلاع برآیند دو نیرو F_1 و F_2 نیروی R_1 است .

طبق قانون متوازی الاضلاع برآیند دو نیروی $\vec{R}_1$ و F_3 نیروی $\vec{R}_2$ است

تجزیه یک نیرو به مولفه های آن

نیروی $\vec{R}$ طبق قانون متوازی الاضلاع به دو نیروی F_1, F_2 روی محور b,a تجزیه می شود ، نیروی F_1, F_2 را مولفه های نیروی R روی محور b,a می گویند .



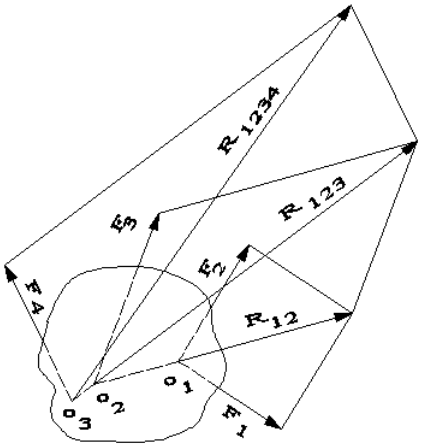
برآیند چند نیروی غیر متقارب ، هم صفحه

Resultant of Non – Concurrent – Coplanar:

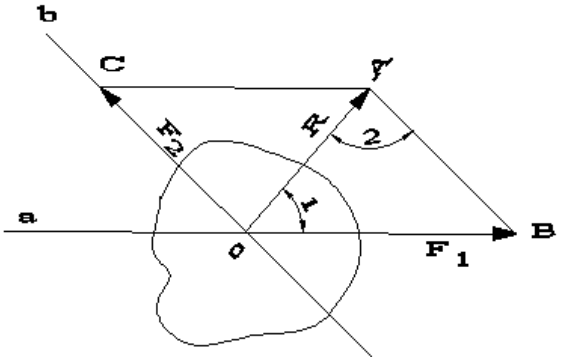
نیروی F_1, F_2 که هم صفحه هستند پس در نقطه O_1 همدیگر را قطع می کنند ، برآیند آنها $\vec{R}_{12}$ است .

نتیجه R_{12} را با $\vec{F}_3$ تقارب می دهیم،نقطه تقارب آنهاO_2 است ،پس برآیند آنها می شود $\vec{R}_{123}$ و این را با $\vec{F}_4$ تقارب می دهیم نتیجه برآیندآنهاکه در نقطه O_3قطع می کند ، همان $\vec{R}_{1234}$ است .

پس برآیند چند نیروی غیر متقارب و هم صفحه یا یک نیرو است یا یک جفت نیرو Couple



برآیند دو نیرو با روش مثلثاتی :

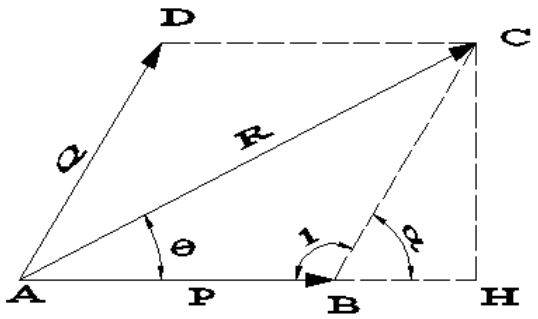


$$AoB = \hat{o}_1$$

$$BAo = \hat{A}_2$$

$$\frac{F_1}{\sin A_2} = \frac{F_2}{\sin O_1} = \frac{R}{\sin B}$$

روش متوازی الاضلاع : (روش محاسبه) :



$AC = R$

$AB = P$ مثال :مطلوبست برآیندQ وP به روش متوازی الاضلاع

$BC = AD = Q$

$BH = BCCos\alpha = QCos\alpha$

$CH = BC\sin\alpha = Q\sin\alpha$

$AH = AB + BH = P + QCos\alpha$

$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$

$R^2 = (P + QCos\alpha)^2 + (Q\sin\alpha)^2$

$R^2 = P^2 + Q^2Cos^2\alpha + 2PQCos\alpha + Q^2\sin^2\alpha$

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQCos\alpha$

$\alpha = A$

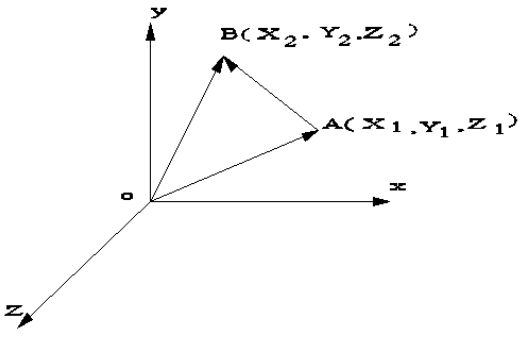
$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQCosA$

$\tan\theta = \frac{CH}{AH}$

$\tan\theta = \frac{Q\sin A}{P + QCosA}$

روش رسم : بخاطر نداشتن کاغذ اندازه استفاده نمی شود

بیان بردار و فاصله بین دو نقطه : position vector



$\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{oB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{oB} - \overrightarrow{oA}$

$\overrightarrow{AB} = x_2 i + y_2 j + z_2 k - (x_1 i + y_2 j + z_2 k)$

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$

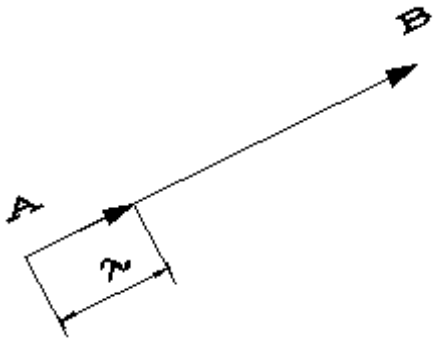
$A(2,-1,3), B(1,-2,4)$

$\overrightarrow{AB} = (1-2)i + (-2+1)j + (4-3)k$

$\overrightarrow{AB} = -i - j + k$

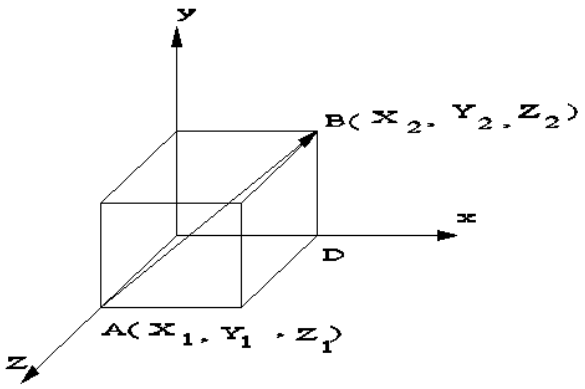
بیان بردار بر حسب مقدار آن و بردار واحد :

بردار واحد یا یکه ، برابر است با نسبت بیان بردار بـه قـدر مطلـق بردار و آنرا باλ نمایش می دهند.



$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}}$$

مشخص کردن یک نیرو با معلوم بودن مقدار و مختصات دو نقطه از خط اثر آن



$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}} = (X_2 - X_1)i + (Y_2 - Y_1)j + (Z_2 + Z_1)k$$

$$\overrightarrow{AB} = d_x i + d_y j + d_z k$$

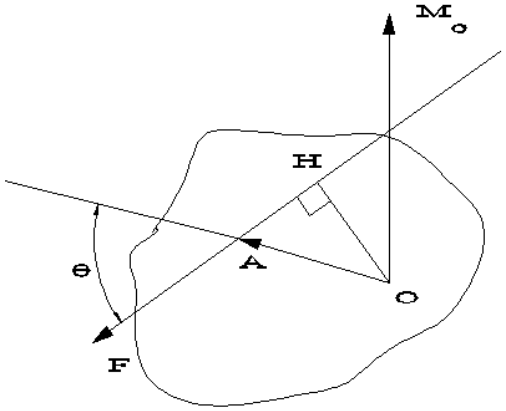
$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{d^2_X + d^2_Y + d^2_Z} = d$$

$$\vec{F} = \overline{F}\lambda = \frac{1}{d}(d_X i + d_Y j + d_Z k)$$

اگر F با محور Z,Y,X زوایای $\theta_z, \theta_y, \theta_x$ بسازد

$$\cos\theta_z = \frac{dz}{d} \quad \cos\theta_x = \frac{dx}{d} \quad \cos\theta_y = \frac{dy}{d}$$

گشتاور ،لنگر ، ممان (Moment) :



$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$$

$$\overrightarrow{M_o} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\sin\theta = \frac{OH}{OA}$$

بردار $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ و $OH = d$

حاصل ضرب بردار OA در $\vec{F}$ برابر است با بـردار Mo کـه بـر صفحه ای که شامل بردارOA و Fاسـت عمـود مـی باشـد. پـس Mo هم یک کمیت برداری است .چون نقطه A هر جـای خـط اثر نیروی F باشد همان $d = r\sin\theta$ می باشد،پس فرقی نمـی کند که Aکجای صفحهP باشد،چون $M_O = F.d$ است.

$$\overrightarrow{Mo} = (r.F\sin\theta)\vec{\lambda}$$

$\vec{\lambda}$ بردار واحد در جهت Mo می باشد . درمثلـث ΔoHA ،داریم

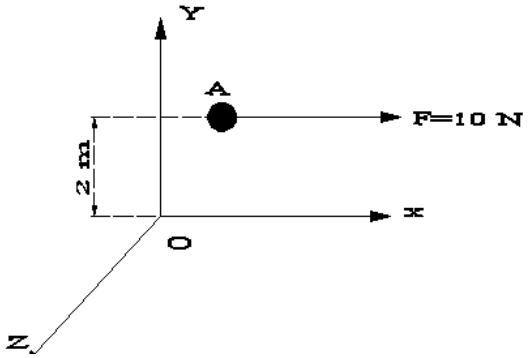
$$OH = OA\sin\theta = d$$

$$\overrightarrow{M_O} = (F.d)\vec{\lambda}$$

$$M_O = F.d$$

فاصله d ، از نقطه o عمود بر خط اثر نیروی F است .

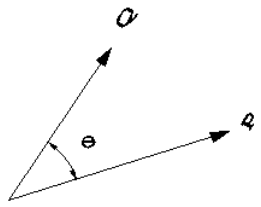
مثال :

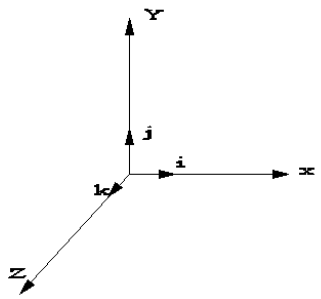


$$Mo = r \times F$$

$$Mo = (2)(10) = -20k$$

حاصل ضرب عددی دو بردار: Dot product scalar





$$\vec{P}.\vec{Q} = \overline{P}.\overline{Q}\cos\theta$$

$$\vec{P}.(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{P}.\vec{Q}_1 + \vec{P}.\vec{Q}_2$$

$$\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$$

اگر $\theta = 0$ $\vec{P}.\vec{Q} = P.Q$ و اگر

$\vec{P}.\vec{Q} = -Q, P, \theta = 180$

و اگر $\theta = 90$ $\vec{P}.\vec{Q} = 0$

$\vec{i}.\vec{j} = 0,\ \vec{j}.\vec{k} = 0,\ \vec{k}.\vec{i} = 0$

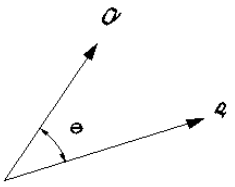
$\vec{i}.\vec{i} = 1,\ \vec{j}.\vec{j} = 1,\ \vec{k}.\vec{k} = 1$

$P = Pxi + Pyj + Pzk$

$Q = Qxi + Qyj + Qzk$

$\vec{P}.\vec{Q} = PxQx + PyQy + QzPz$

حالت خاص : $P = Q$



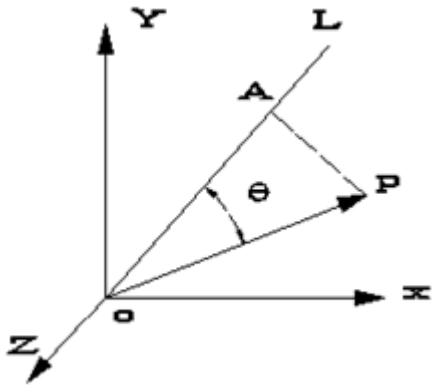
$\vec{P}.\vec{Q} = \vec{P}.\vec{P} = P^2 = P^2{}_X + P^2{}_Y + Q^2{}_Z$

موارد استعمال قضیه : تعیین زاویه بین دو بردار معلوم.

$\vec{P}.\vec{Q} = \overline{P}\,\overline{Q}\cos\theta = PxQx + PyQy + QzPz$

$Cos\theta = \frac{PxQx + PyQy + QzPz}{\overline{P}\,\overline{Q}}$

تصویر یک بردار روی یک محور معین :



$OA = P_{OL} = \overline{P}\cos\theta$

$\vec{P}.\vec{Q} = \overline{P}.\overline{Q}\cos\theta = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$

$\vec{P}.\vec{Q} = P_{OL}\overline{Q}$

$P_{OL} = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{\overline{Q}} = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{\overline{Q}}$

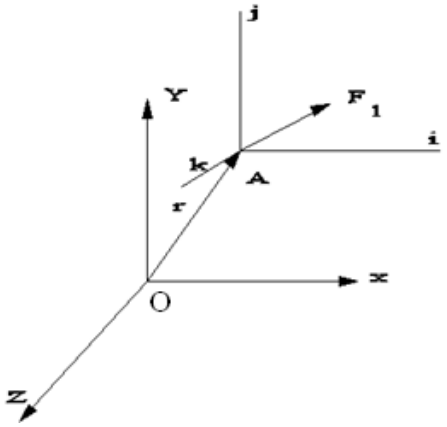
در حالت خاص وقتی که بردار در امتداد OL است .

$P_{OL} = P.\lambda$

$P_{OL} = Px\cos\theta_Z + Py\cos\theta_Y + Pz\cos\theta_X$

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ زوایای بین محورهای متعامد و امتداد OL می باشد .

مولفه های متعامد گشت آور یک نیرو :



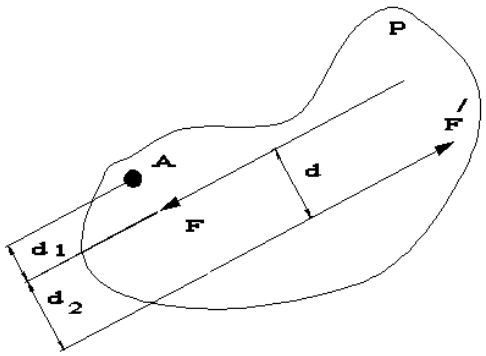
$F = Fxi + Fyj + Fzk$

$OA = xi + yj + zk$

$Mo = r \times F$

$$Mo = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

Moment of couple گشت آور جفت نیرو:



جفت نیرو :

اگر دو نیروی F, F' مساوی هم و خلاف جهت باشند می گویند یک جفت نیرو است و برآیند آن صفر می باشد. .

$$\vec{R} = \vec{F}' + \vec{F} = \vec{F}' + \left(-\vec{F}'\right) = 0$$

اگر جفت نیرو به یک جسم اثر کند، آنرا جا به جا نمی کند، بعبارت دیگر به آن حرکت انتقالی نمی دهد، بلکه جسم را به حرکت دورانی وا می داردو گشتاور آن برابر است با

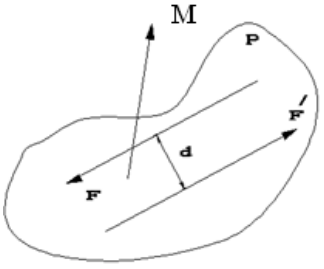
$$M_A = -(F')(d_2 + d_1) + F(d_1)$$
$$F' = F \qquad d = d_2$$
$$M_A = -F(d_2) = -F.d$$

فرقی نمی کند که نقطه A چگونه انتخاب شودو در هرجای صفحه P انتخاب شود ، گشتاور آن M خواهد که عمود بر صفحه P است . و مقدار آن F.d خواهد بود، مثبت یا منفی بودن آن فقط جهت بردار را نشان می دهد.

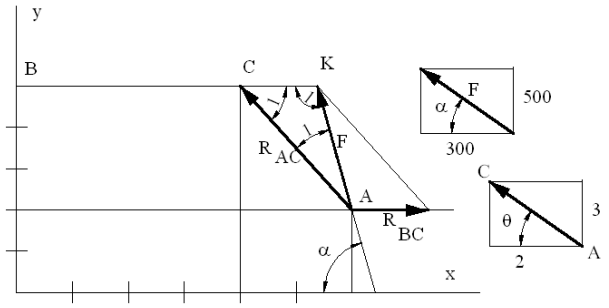
کوپل های معادل :

کوپل هایی هستند که اثر مشابه به روی جسم داشته باشد .

کوپل های معادل وقتیکه جا به جا می شوند، نباید تغییری در کل جسم حاصل نمایند. ولی از نظر عددی کوپل ها تغییر می کنند.



۸-۱: نیروی $F=-۳۰۰i+۵۰۰j$ (N) از نقطه A به مختصات A(۶،۲) می گذرد، نقطه C به مختصات C(۴،۵)و نقطه Bبه مختصات B(۰،۵) وجود دارد، مطلوبست تجزیه این نیروی F موازی و در راستای خط BC و نیروی دیگر موازی و در راستای خط AC



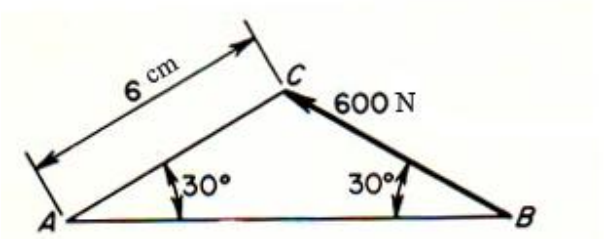
$$B(0,5), C(4,5)\ A(6,2)$$
$$F = \sqrt{300^2 + 500^2}$$
$$F = 583\ \ N$$
$$\tan\alpha = \frac{500}{300} \qquad \alpha = 59^o$$
$$\tan\theta = \frac{3}{2} \qquad \theta = 56.3^o$$
$$\hat{A}_1 = \alpha - \theta = 59 - 56.3 = 2.7^\circ$$
$$\hat{K}_1 = 180 - 2.1 - 56.3$$
$$\hat{K}_1 = 121^\circ$$
$$C_1 = \theta = 56.3$$

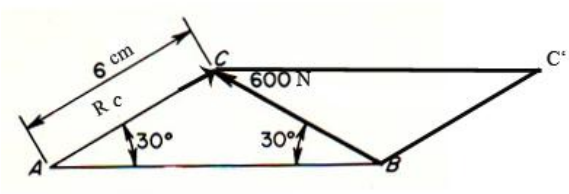
از قانون سینوس ها استفاده می شود

$$\frac{R_{BC}}{\sin A_1} = \frac{F}{\sin C_1} = \frac{R_{AC}}{\sin 121}.$$
$$\frac{R_{BC}}{\sin 2.7} = \frac{583}{\sin 56.3} = \frac{R_{AC}}{\sin 121}$$
$$R_{BC} = 583 \times \frac{\sin 2.7}{\sin 56.3} = 33.3\ \ N \ \ \rightarrow$$
$$R_{AC} = 583 \times \frac{\sin 121}{\sin 56.3}$$
$$R_{AC} = 600.6\ \ N$$

هر دو نیرو R_{BC} و R_{AC} از نقطه A می گذرد

۱-۱۰ نیروی N ۶۰۰ را به دو نیرو یکی موازی و در راستای خط AB و نیروی دیگر موازی و در راستای خط AC تجزیه کنید.





$$R_{AC} = R_C$$

$$\frac{R_C}{\sin 30} = \frac{600}{\sin 30}$$

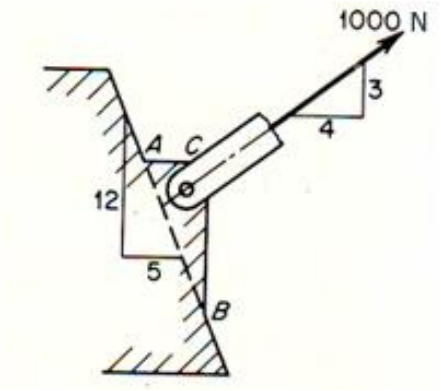
$$R_{AC} = 600 \ \ N \ \ as \ \ Shown$$

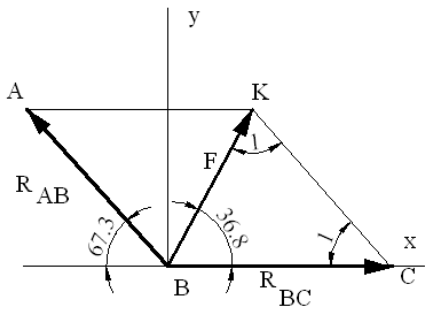
$$\frac{R_{AB}}{\sin 120} = \frac{600}{\sin 30}$$

$$R_{AB} = 1039 \ \ N \ \rightarrow$$

از B می گذرد

۱-۱۲ نیروی N ۱۰۰۰ را به دو نیرو تجزیه کنید یکی موازی و در راستای خط AB و دیگری موازی و در راستای خط AC





$$F = 1000 \ N$$

$$\tan\alpha = \frac{12}{5} = 2.4 \qquad \alpha = 67.3^\circ \qquad C_1 = \alpha$$

$$\tan\beta = \frac{3}{4} \qquad \beta = 36.8^\circ$$

$$\hat{K}_1 = 180 - 67.3 - 36.8$$

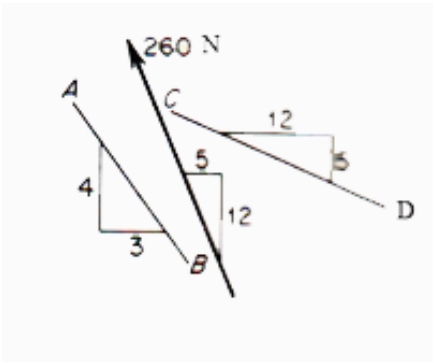
$$\hat{K}_1 = 75.9^\circ$$

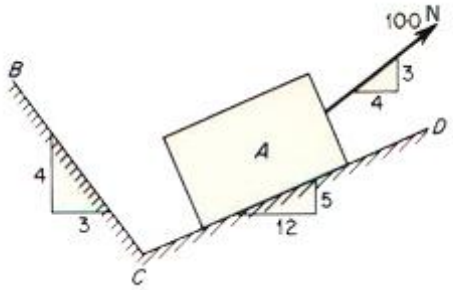
$$\frac{R_{AB}}{\sin 36.8} = \frac{R_{AC}}{\sin 75.9} = \frac{F}{\sin 673.3}$$

$$R_{AB} = 1000 \times \frac{\sin 36.8}{\sin 67.3} = 650 \ N \ \ As \ \ shown$$

$$R_{AC} = 1000 \times \frac{\sin 57.9}{\sin 67.3} = 1050 \ N \rightarrow$$

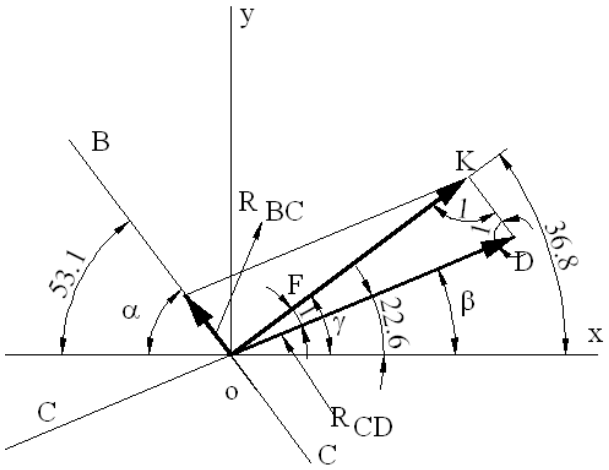
۱-۱۴ نیروی N ۲۶۰ را به دو نیروی تجزیه کنید یکی موازی و در راستای خط AB و دیگر موازی و در راستای خط CD





$$\tan\alpha = \frac{4}{3} \qquad \alpha = 53.1$$

$$\tan\beta = \frac{5}{12} \qquad \beta = 22.6$$



$$\tan\gamma = \frac{3}{4} \qquad \gamma = 36.8$$

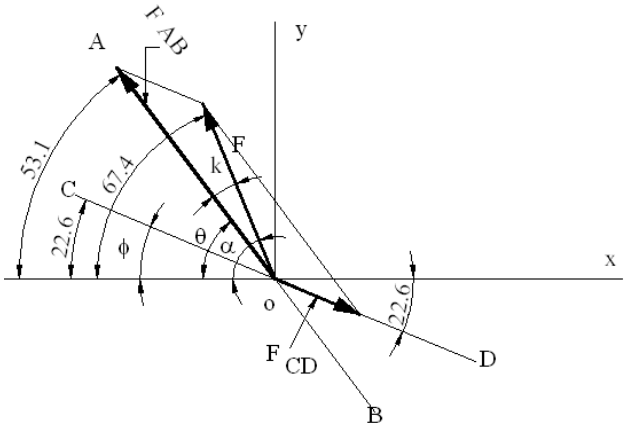
$$\hat{C}_1 = 36.8 - 22.6 = 14.2$$

$$\hat{K}_1 = 180 - 14.2 - 75.7 = 90.1$$

$$\frac{R_{CD}}{\sin 90.1} = \frac{R_{BC}}{\sin 14.2} = \frac{100}{\sin 75.7}$$

$$R_{BC} = 100 \times \frac{\sin 14.2}{\sin 75.7} = 25.3 \ \ N \ \ As\ shown$$

$$R_{CD} = 100 \times \frac{\sin 90.1}{\sin 75.7} = 103.2 \ \ N \ \ as\ \ shown$$



$$\tan\theta = \frac{4}{3} \qquad \theta = 53.1^\circ$$

$$\tan\phi = \frac{5}{12} \qquad \phi = 22.6^\circ$$

$$\tan\alpha = \frac{12}{5} \quad \alpha = 67.4$$

$$\hat{M} = 22.6 + 90 + 22.6$$

$$\hat{K} = \gamma - 53.1$$

$$\hat{K} = 67.4 - 53.1 = 14.3^\circ$$

$$\hat{K} + \hat{M} + \hat{N} = 180^\circ \qquad \text{در مثلث KON}$$

$$14.3 + 135.2 + \hat{N} = 180^\circ$$

$$\hat{N} = 30.5^\circ \qquad \text{قانون سینوس ها}$$

$$\frac{260}{\sin N} = \frac{F_{AB}}{\sin M} = \frac{F_{CD}}{\sin K}$$

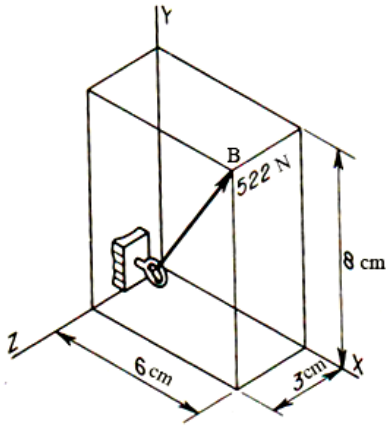
$$\frac{260}{\sin 30.5} = \frac{F_{AB}}{\sin 135.2} = \frac{F_{CD}}{\sin 14.3}$$

$$F_{AB} = \frac{260}{\sin 30.5} \times \sin 135.2 = 361 \ \ N \ \ As\ \ shown$$

$$F_{CD} = \frac{260}{\sin 30.5} \times \sin 14.3 = 126.5 \ \ N \ \ As\ \ shown$$

۱۵-۱ نیروی F=۱۰۰N به جسم A اثر می کند، این نیرو را بـه دو نیرو تجزیه کنید یکی موازی و در راستای خط BC و دیگـری موازی و در راستای خط CD

۱-۲۲ نیروی ۵۲۵ N را مطابق شکل که به پیچ خروسکی وارد می شود، این نیرو را به k , j , i تبدیل کنید.



$$F = 522 \ \ N \qquad\qquad B(6,8,3)$$

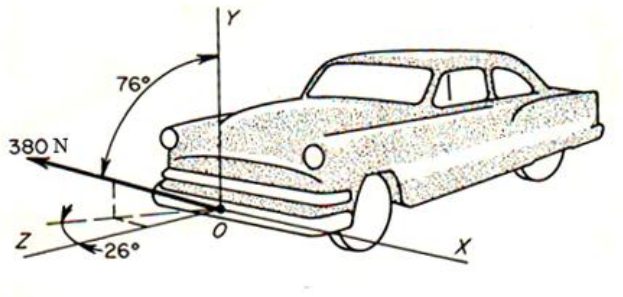
$$\lambda_{OB} = \frac{6i + 8j + 3k}{\sqrt{36 + 64 + 9}}$$

$$\vec{F} = \overline{F} \times \vec{\lambda}_{OB}$$

$$\vec{F} = \frac{522}{10.44}(6i + 8j + 3k)$$

$$\vec{F} = 300i + 400\ j + 150\,k$$

۱-۲۴ اتومبیل شکل زیر بوسیله یک کابل کشیده می شود، نیروی وارد به آن ۳۸۰ N است ، این نیرو را بر حسب k , j , i بدست آورید.



$$\sin 76^\circ = \frac{h_f}{380}$$

$$h_f = 380 \sin 76$$

$$F_y = 380 Cos76^\circ$$

$$\vec{F} = F_{xi} + F_{yj} + F_{zk}$$

$$F_z = h_f Cos26$$

$$F_x = -h_f \sin 26$$

$$\vec{F} = -h_f \sin 28 i + 380 Cos76^\circ j + h_f Cos26 k$$

$$\vec{F} = -380 \sin 76 \sin 26 i + 380 Cos76^\circ j + 380 \sin 76^\circ Cos26 k$$

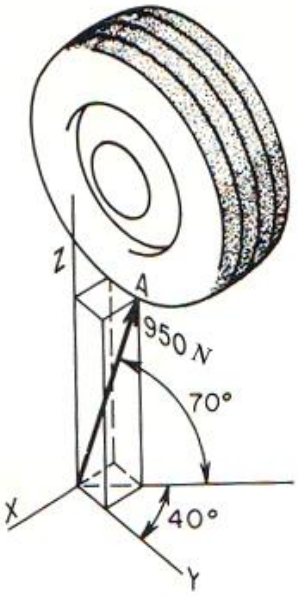
$$\vec{F} = -161.6i + 91.9\,j + 331.3k$$

۱-۲۶ نیروی ۹۵۰ نیوتنی ، مطابق شکل به پشت لاستیک یک چرخ ماشین وارد می شود، این نیرو را به سه نیروی F_z , F_y , F_X تجزیه کنید.

$$F_z = 950 \times \sin 70$$

$$F_z = 893 \ \ N$$

$$F_h = 950 \times Cos70 = 325 \ \ N$$



$$F_y = F_n Cos40$$

$$F_y = 325 Cos40 = 349 \ \ N$$

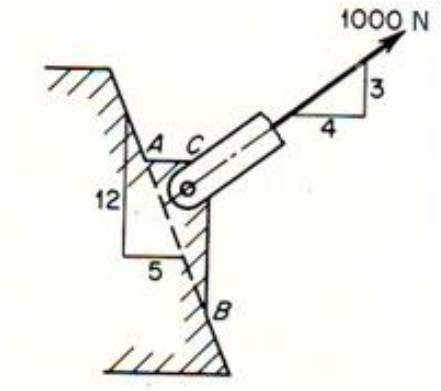
$$\tan 40 = \frac{F_x}{F_y}$$

$$F_x = -\tan 40 \times 249 = -209 \ \ N$$

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_x} i + \overrightarrow{F_y} j + \overrightarrow{F_z} k$$

$$F = -209i + 249\,j + 893k$$

۱-۲۸ تصویر نیروی ۱۰۰۰ N را روی محور AB بدست آورید.



$$\lambda_F = \frac{\vec{F}}{F} = \frac{4i+3j}{\sqrt{16+9}} = \frac{1000}{5}$$

$$\vec{F} = 800i + 600j$$

$$r_{AB} = -5i + 12j$$

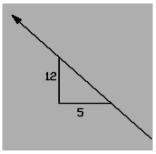
$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{-5i+12j}{\sqrt{25+144}} = \frac{1}{13}$$

$$\lambda_{AB} = -\frac{5}{13}i + \frac{12}{13}j$$

$$P_{AB} = \vec{F}.\overrightarrow{\lambda_{AB}} = -\frac{5}{13}\times 800 + \frac{12}{13}\times 600$$

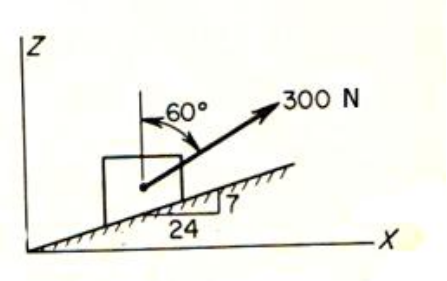
$$P_{AB} = \frac{1}{13}(-400+7200) = \frac{3200}{13} = 246$$

$$P_{AB} = 246 \;\; N \;\; As \;\; shown$$



از محل تلاقی خط ABو خط نیروی F می گذرد

۱-۳۰ در شکل زیر تصویر نیروی F= ۳۰۰ N را روی سطح شیب دار بدست آورید.



$$r = Cos60\,j + Sin60\,i$$

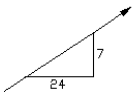
$$r = 0.5\,j + 0.866\,i$$

$$\vec{F} = 300(0.5)\,j + 0.866(300)i$$

$$\lambda_{AB} = \frac{1}{25}(24i + 7j)$$

$$P_{AB} = \overrightarrow{\lambda_{AB}}.\vec{F} = \frac{24}{25}(300)(0.866) + \frac{7}{25}(300)(0.5)$$

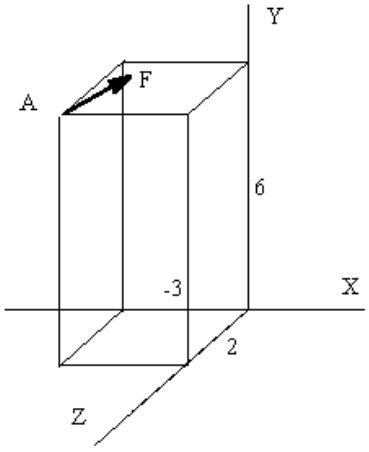
$$P_{AB} = 249.4 + 42 = 291.4 \;\; N$$



۱-۳۲ نیروی ۳۶۴ نیوتن از نقطه A به مختصات (۲،۶،-۳)، می گذرد، تصویر این نیرو را روی محور $n = \frac{4i-3j+12k}{13}$ بدست آورید

$$F = 364 \; N$$

$$\overrightarrow{r_F} = -3i + 6j + 2k$$



$$\vec{\lambda}_F = \frac{1}{\sqrt{9+36+4}}(-3i+6j+2k)$$

$$\vec{F} = \overline{F}.\;\overrightarrow{\lambda_F} = \frac{364}{7}(-3i+6j+2k) = -156i + 312j + 104k$$

$$\vec{n} = (4i - 3j + 12k)/13$$

$$\overline{F} = \vec{F}.\vec{n} = \frac{4}{13}(-156) - \frac{3}{13}(312) + \frac{12}{13}(104)$$

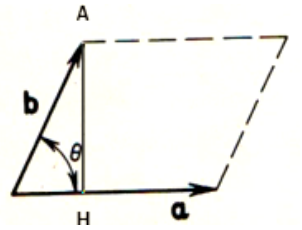
$$\overline{F} = \vec{F}.\vec{n} = -48 - 72 + 96 = -24\,N$$

$$\vec{F} = \overline{F}\;.(\vec{F}.\vec{n}) = \frac{-24}{13}(4i - 3j + 12k) =$$

$$24(-0.308\,i + 0.231\,j - 0.923\,k) \;\; N$$

در جهت بردار n که از نقطه O می گذرد

۱-۳۴ ثابت کنید حاصل ضرب برداری دو بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر با مساحت متوازی الاضلاع شکل زیر .



$$S = AH \times a$$

$$\sin\theta = \frac{AH}{b}$$

$$s = a \times b \ \sin\theta$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = ab \ \sin\theta$$

۱-۳۶ حاصل ضرب بردار $A\times B$ را بدست آورید .

$$\vec{A} = 2i - 5j, \vec{B} = 6i - 2k$$

$$A\times B = 10i - (-30k - 4j)$$

$$A\times B = 10i + 30k + 4j = 10i + 4j + 30k$$

۱-۴۰ مطلوبست $\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})$

$$w = 60i - 40k \ , r = 3i + 4j$$

$$\vec{w} = 60i - 40k$$

$$\vec{r} = 3i + 4j$$

$$\vec{w}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 60 & 0 & -40 & 60 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -120j + 240k + 160i$$

$$\vec{w}\times\vec{r} = 160i - 120j + 240k$$

$$\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}) = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 60 & 0 & -40 & 60 & 0 \\ 160 & -120 & 240 & 160 & -120 \end{vmatrix}$$

$$\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}) = -6400/\ j - 7200k - 4800/\ i - 14400/\ j$$

$$\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}) = -4800i - 20800j - 7200k$$

۱-۴۱ سه بردار زیر مفروض است،ثابت کنید $\vec{A}.(\vec{B}x\vec{C})$ صفر است، معنی آن چیست

$$\vec{A} = a_1 i + a_2 j, \vec{B} = b_1 i + b_2 j, \vec{C} = c_1 i + c_2 j$$

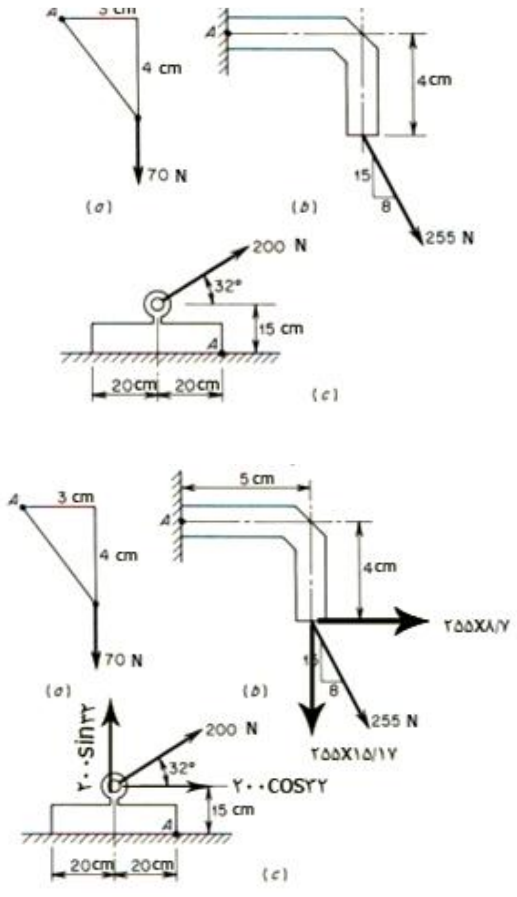
$$(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ b_1 & b_2 & 0 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & 0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{B}\times\vec{C}) = b_1c_2k - b_2c_2k = Pk$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (a_1 i + a_2 j).Pk = 0 \quad \Rightarrow$$

این سه بردار هم صفحه هستند

۱-۴۲ گشتاور نیروهای شکل زیر را نسبت بـه نقطـه A بدسـت آورید.



$$a) \ \curvearrowleft^{+} \quad \overrightarrow{M}_A = 70x3 = 210 \ N - cm$$

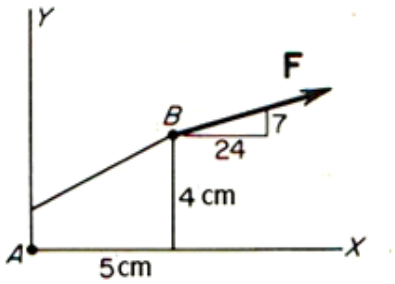
$$b)\ \curvearrowleft^{+}\quad \overrightarrow{M}_A = 255x\frac{15}{17}x5 - 255x\frac{8}{17}x4$$

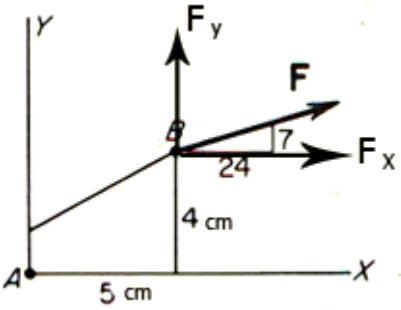
$$\overrightarrow{M_A} = 1125 - 480 = 645\ N-cm$$

$$C)\ \curvearrowleft^{+}\quad \overrightarrow{M}_A = 200\,x(\sin 32)x20 - 200\,x(\cos 32)x15$$

$$\overrightarrow{M_A} = 2119.7 + 2544.2 = 4664\ \ N-cm$$

۱-۴۴ نیروی افقی F برابر ۳۶۰ N مطابق شکل بـه نقطـه B اثـر می کند، مطلوبست تعیین نیروی F بر حسب i و j . ثانیاً گشتاور نیروی F را نسبت به نقطه A بدست آورید. ثالثاً فاصله نقطه اثـر نیروی F را نسبت به نقطه A بدست آورید.





$$\overrightarrow{F} = F_x\,i + F_y\,j$$

$$F_x = (F)\frac{24}{25}$$

$$360 = (F)\frac{24}{25}$$

$$F = 375\ N$$

$$\overrightarrow{F} = 360i + 375x\frac{7}{25}j$$

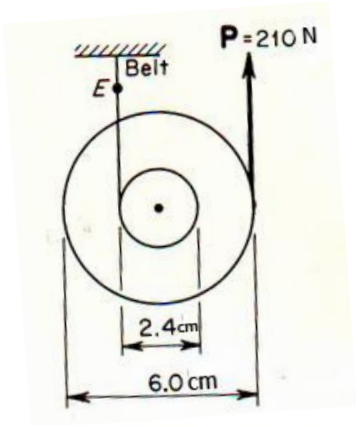
$$F = 360i + 105j$$

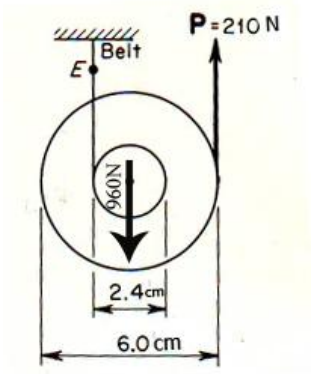
$$\curvearrowleft^{+}\quad M_A = -(105)(15) + (360)(4)$$

$$M_A = 915\ N-cm$$

$$d = \frac{M}{F} = \frac{915}{375} = 2.44cm$$

۱-۴۶ وزن سیلندرمطابق شکل ، ۹۶۰ نیوتن است، گشتاور کـل نیروها را نسبت به نقطه E بدست آورید.

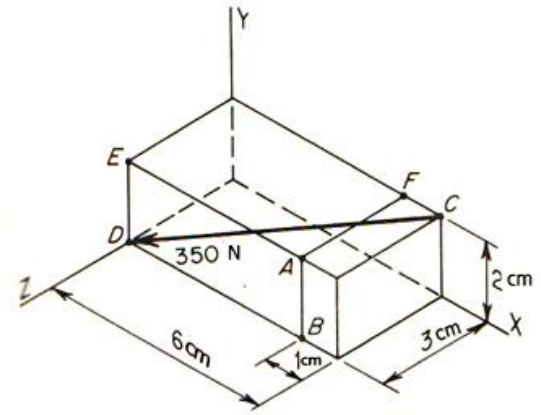




$$\curvearrowleft^{+}\quad M_E = -(210)(3+1.2) + 960(\frac{2.4}{2})$$

$$M_E = -882 + 1152 = 270\ N-cm$$

۱-۵۰ نیروی F در شکل زیر به نقطه C مطابق شـکل اثـر مـی کند، مطلوبست گشتاور نیروی F نسبت به نقطه A.



$F = 350\ N \quad C(6,2,0) \quad D(0,0,3) \quad A(5,2,3)$

$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{r_{AC}}\ x\vec{F}$

$\overrightarrow{r_{AC}} = i - 3k$

$\overrightarrow{\lambda_{CD}} = \dfrac{-6i - 2j + 3k}{\sqrt{36+4+9}} = \dfrac{1}{7}(-6i - 2j + 3k)$

$\overrightarrow{F_{CD}} = \dfrac{350}{7}(-6i - 2j + 3k) = -300i - 100j + 150k$

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{r_{AC}}\ x\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ +1 & 0 & -3 & +1 & 0 \\ -300 & -100 & 150 & -300 & -100 \end{vmatrix}$$

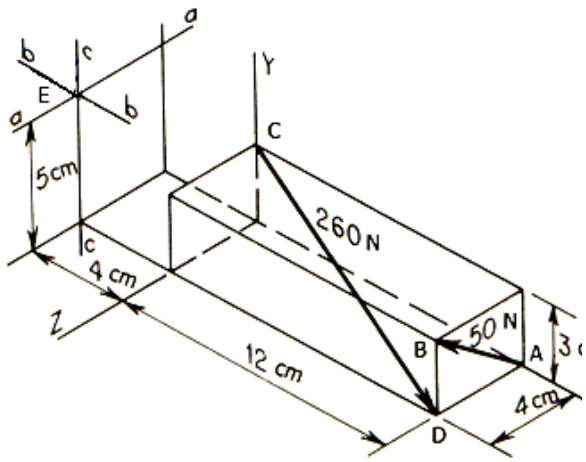
$\overrightarrow{M_A} = +900j - 100k - 300i - 150j$

$\overrightarrow{M_A} = -300i + 750\ j - 100k$

$\overrightarrow{M_A} = 814\ N - cm$

$\overrightarrow{M_A} = 814(-0.368i + 0.925j - 0.122k)\ N - cm$

۱-۵۲ نیروی N ۲۶۰ و نیروی N ۵۰ مطابق شکل مفروض است، مطلوبست گشتاور این نیروها نسبت به نقطه E و ثانیاً گشتاور این نیروها نسبت به محور aa را بدست آورید.



$C(0,3,0)\ , D(12,0,4), B(12,3,4)$
$, A(12,0,0), E(-4,5,4)$

$\overrightarrow{F_{CD}} = 260x\dfrac{12i - 3j + 4k}{13}$

$\overrightarrow{F_{CD}} = 240i - 60j + 80k$

$\overrightarrow{F_{AB}} = (50)\dfrac{3j + 4k}{5} = 30j + 40k$

$\overrightarrow{M_E} = \overrightarrow{r_{EC}}\ x\overrightarrow{F_{CD}} + \overrightarrow{r_{EA}}\ x\overrightarrow{F_{AB}}$

$\overrightarrow{r_{EC}} = 4i - 2j - 4k$

$\overrightarrow{r_{EA}} = 16i - 5j - 4k$

$$\overrightarrow{r_{EC}}x\overrightarrow{F_{CD}} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 4 & -2 & -4 & 4 & -2 \\ 240 & -60 & 80 & 240 & -60 \end{vmatrix} =$$

$-160i - 960j - 240k + 480k - 240i - 320j$

$\overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{r_{EC}}x\overrightarrow{F_{CD}} = -400i - 1280j + 240k$

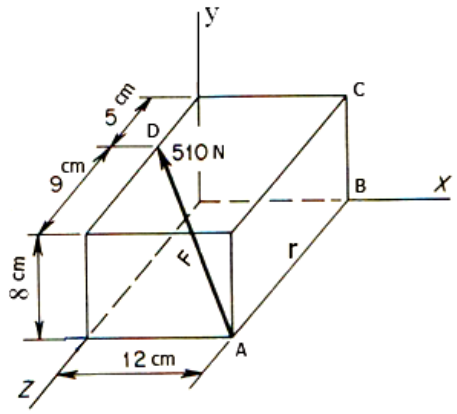
$$\overrightarrow{r_{EA}}x\overrightarrow{F_{AB}} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 16 & -5 & -4 & 16 & -5 \\ 0 & 30 & 40 & 0 & 30 \end{vmatrix} =$$

$-200i + 480k + 120i - 640j$

$$\overrightarrow{M_A}=\begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 5 & 4 & 0 & 5 & 4=525k-1440k \\ 360 & 105 & 0 & 360 & 105 \quad =-915k \end{vmatrix}$$

$$F.d=915$$
$$d=\frac{915}{375}=2.44cm$$

۱-۵۶ مطلوبست گشتاور نیروی F=۵۱۰N نسبت به خط CB ، ثانیاً گشتاور این نیرونسبت به نقطه B را بدست آورید



$$F=510N \qquad M_{CB}=? \qquad C(12,8,0) \qquad A(12,0,14)$$
$$\overrightarrow{M_B}=? \qquad B(12,0,0)$$
$$D(0,8,5)$$

$$\overrightarrow{r_{BA}}=14k$$
$$\overrightarrow{r_{AD}}=-12i+8j-9k$$
$$\overrightarrow{\lambda_{AD}}=\frac{-12i+8j-9k}{\sqrt{144+64+81}}=\frac{1}{17}(-12i+8j-9k)$$
$$\vec{F}=\overrightarrow{\lambda_{AD}}.\overline{F}=\frac{510}{17}(-12i+8j-9k)$$
$$\vec{F}=30(-12i+8j-9k)=-360i+240j-270k$$
$$\overrightarrow{CB}=8j$$

$$\overrightarrow{M_B}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ -360 & 240 & -270 & -360 & 240 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_B}=-5040j-3360i$$
$$\overrightarrow{M_{CB}}=(\vec{\lambda}_{CD}.\overrightarrow{M_A})\overrightarrow{\lambda_{CD}}$$

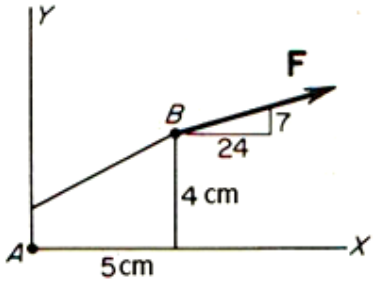
$$\overrightarrow{M_2}=\overrightarrow{r_{EA}}x\overrightarrow{F_{AB}}=-80i-640j+480k$$
$$\overrightarrow{M_A}=\overrightarrow{M_1}+\overrightarrow{M_2}$$
$$\overrightarrow{M_A}=-400i-1280j+240k-80i-640j+480k$$
$$\overrightarrow{M_A}=-480i-1920j+720k$$
$$\overline{M_A}=\sqrt{(480)^2+(1920)^2+(720)^2}=$$
$$\overline{M_A}=2106N-cm$$

ثانیاً

→

$$\overrightarrow{M_{aa}}=(\overrightarrow{M_A}.\overrightarrow{\lambda_{aa}})\overrightarrow{\lambda_{aa}}$$
$$\overrightarrow{M_{aa}}=(-480i-1920j+720k).\vec{k}$$
$$\overline{M_{aa}}=720\ N-cm$$

۱-۵۴ در مسئله ۱-۴۴ ، آنرا با روش ضرب برداری حل کنید.



$$\overrightarrow{F}=24i+7j$$
$$360i=\frac{24}{250}F\,i \qquad F=375^{lb}$$
$$\vec{F}=\frac{375}{25}(24i+7j)$$
$$\vec{F}=15(24i+7j)=360i+105j$$
$$\overrightarrow{r_{AB}}=5i+4j$$
$$\overrightarrow{M_A}=\vec{r}_{AB}\times\vec{F}$$

$$\overrightarrow{\lambda_{CB}} = (\frac{8}{8})j = j$$

$$\overrightarrow{M_{CB}} = j.(-5040j - 3360i)j$$

$$\overrightarrow{M_{CB}} = -5040j$$

ثانیاً

$$\overrightarrow{M}_B = -3360i - 5040j$$

$$\overrightarrow{M_B} = \sqrt{(3360)^2 + (5040)^2} = 6057.3\ N-cm$$

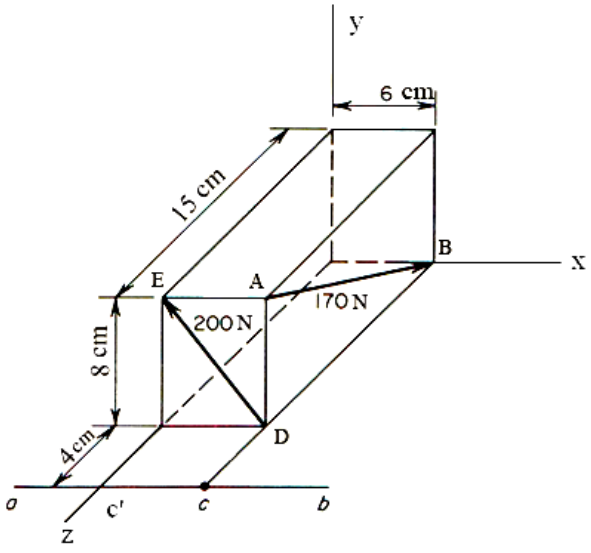
$$\overrightarrow{M}_B = 6057.3(\frac{-3360}{6057.3}i - \frac{5040}{6057.3}j)$$

$$\overrightarrow{M_B} = 6057.3(-0.55i - 0.832j)$$

۶۰-۱در شکل زیر اولاً ،مطلوبست گشتاور دو نیرو نسبت به محور ab ، ثانیاً، فاصله نقطه اثر نیروی ۱۷۰N از نقطه Cرا بدست آورید . ثالثاً ،گشتاور این دونیرو رانسبت به نقطه C بدست آورید.

$D(6,0,15)\ C'(0,0,19)\ E(0,8,15)\ C(6,0,19)$
$B(6,0,0)\ A(6,8,15)$

$$\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{r_{AB}} = -8j - 15k$$



$$\overrightarrow{\lambda_{AB}} = \frac{-8j - 15k}{\sqrt{64+225}} = \frac{1}{17}(-8j - 15k)$$

$$\overrightarrow{F_{AB}} = \frac{170}{17}(-8j - 15k) = -80j - 150k$$

$$\overrightarrow{DE} \quad \Rightarrow \overrightarrow{r_{DE}} = -6i + 8j$$

$$\overrightarrow{\lambda_{DE}} = \frac{-6i+8j}{\sqrt{36+64}} = \frac{1}{10}(-6i+8j)$$

$$\overrightarrow{F_{DE}} = \frac{200}{10}(-6i+8j) = -120i + 160j$$

$$\overrightarrow{CD} \qquad \Rightarrow r_{CD} = -4k \qquad \overrightarrow{M}_C = \overrightarrow{r_{CD}} \times \overrightarrow{F_{DE}}$$

$$\overrightarrow{M}_{2C} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -120 & 160 & 0 & -120 & 160 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M}_{2c} = 480j + 640i$$

$$\overrightarrow{M}_{ab} = (\overrightarrow{r_{CC}} \ .\overrightarrow{M}_C)$$

$$\overrightarrow{r_{cc'}} = 6i \qquad \overrightarrow{\lambda_{CC'}} = (\frac{6}{6})i = i$$

$$\overrightarrow{M}_{ab} = i.(480j + 640i) = 640$$

$$\overrightarrow{CA} \quad \Rightarrow, \overrightarrow{r_{CA}} = +8j - 4k$$

$$\overrightarrow{M}_{1CA} = \overrightarrow{r_{CA}} \ x\overrightarrow{F_{AB}}$$

$$\overrightarrow{M}_{1CA} = -1200i - 320i$$

$$\overrightarrow{M}_{1CA} = -1520i$$

$$\overrightarrow{M}_{ab_1} = (\overrightarrow{r_{CC}} \ .\overrightarrow{M}_{1CA})$$

a)اولاً $\overrightarrow{M}_{ab_1} = i.(-1520i) = -1520\ N-cm$

$$\overrightarrow{M}_{ab} = \overrightarrow{M}_{ab_1} + \overrightarrow{M}_{ab_2} = -1520 + 640 = -880\ N-cm$$

$$\overrightarrow{M}_{ab} = -880\ N-cm$$

b)ثانیاً $d.F_1 = \overrightarrow{M}_{1_{CA}}$

$$d = \frac{1520}{170} = 8.94\ cm$$

c)ثالثاً $\overrightarrow{M}_C = \overrightarrow{M}_{1CA_C} + \overrightarrow{M}_{2ab_C}$

$$\overrightarrow{M}_C = 480j + 640i - 1520j$$

$$\overrightarrow{M}_C = -880i + 480j$$

$$\overrightarrow{M}_C = 1003(-0.877i + 0.478j)$$

۶۱-۱ نیروی ۳۴۰ N مفروض است، مطلوبست گشتاور این نیرو را نسبت به نقطه B ، خط AE و خط AB .

$\overrightarrow{r_{AD}} = 3i - 9k$

$$M_A = \overrightarrow{r_{AD}} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 3 & 0 & -9 & 3 & 0 \\ -240 & 160 & -180 & -240 & 160 \end{vmatrix}$$

$\overrightarrow{M}_A = 2160j + 480k + 1440i + 540j$

$\overrightarrow{M}_A = 1440i + 2700j + 480k$

$\overrightarrow{M}_{AE} = (k).(144i + 2700j + 480k)\overrightarrow{\lambda_{AE}}$

$\overrightarrow{M}_{AE} = 480k$

C) *line AB*

$A(0,8,9)$ $B(0,0,3)$

$\overrightarrow{r_{AB}} = 8j + 6k$

$\overrightarrow{\lambda_{AB}} = \dfrac{8j+6k}{\sqrt{64+36}} = \dfrac{8j+6k}{10} = 0.5j + 0.6k$

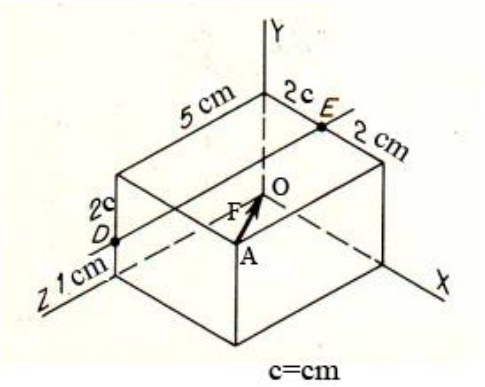
$\overrightarrow{M}_{AB} = (\overrightarrow{\lambda_{AB}}.M_B)\overrightarrow{\lambda_{AB}}$

$\overrightarrow{M}_{AB} = [(0 - 8j + 0.6k).(-960i + 1260j + 2400k)$

$\overrightarrow{M}_{AB} = (0.8 \times 1260 + 0.6(2400))\overrightarrow{\lambda_{AB}}$

$\overrightarrow{M}_{AB} = 2448\overrightarrow{\lambda_{AB}} = 2448(0.8j + 0.6k)$

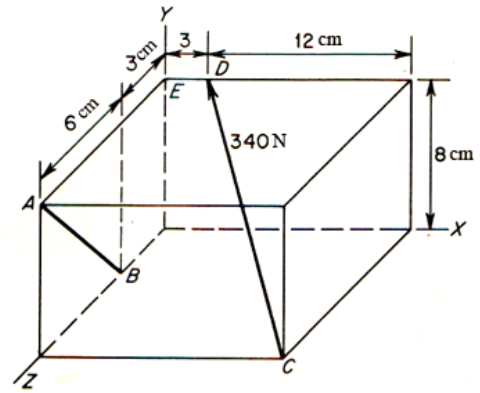
۱-۶۲ در شکل زیر مطلوبست فاصله نقطه اثر نیروی F نسبت به نقطه D.



$A(4,3,5)$ $E(2,3,0)$ $D(0,1,5)$ $O(0,0,0)$

$$\overrightarrow{AO} \Rightarrow \overrightarrow{r_{AO}} = -4i - 3j - 5k$$

$\vec{\lambda}_{AO} = \dfrac{\overrightarrow{AO}}{\overline{AO}} = \dfrac{-4i-3j-5k}{\sqrt{16+9+25}}$



$\vec{F}_{CD} = 340\ N$, $C(15,0,9)$, $B(0,0,3)$ $E(0,8,0)$

$D(3,8,0)$ $A(0,8,9)$

a) $\underline{\underline{B}}$

$\vec{F}_{CD} = -12i + 8j - 9k$

$\overrightarrow{F_{CD}} = \overrightarrow{\lambda_{Cd}}(\vec{F}) = \dfrac{-12i+8j-9k}{\sqrt{12^2+8^2+9^2}}$

$\overrightarrow{F_{CD}} = 20(-12i + 8j - 9k)$

$\overrightarrow{F_{CD}} = (-240\,i + 160j - 180k)$

$\overrightarrow{r_{BD}} = 3i + 8j - 3k$

$\overrightarrow{M}_B = \overrightarrow{r_{BD}} \times \overrightarrow{F_{CD}}$

$$\overrightarrow{M}_B = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 3 & 8 & -3 & 3 & 8 \\ -240 & 160 & -180 & -240 & 160 \end{vmatrix}$$

a) $\Rightarrow$ **B**

$\overrightarrow{M}_B = -1440i + 720j + 480k + 1920k + 480i + 540j$

$M_B = -960\,i + 1260\ j + 2400\,k$

$M_B = 2875.62(-0.334\,i + 0.44\,j + 0.835\,k)$

b) $\Rightarrow$ *line AE*

$A(0,8,9)$ $D(3,8,0)$ $E(0,8,0)$

$\vec{r}_{AE} = 9k$

$\lambda_{AE} = \dfrac{9}{9}k = \vec{k}$

$\overrightarrow{M}_{AE} = (\overrightarrow{\lambda_{AE}}.\overrightarrow{M}_A)\overrightarrow{\lambda_{AE}}$

$$\vec{F}_{AO} = \overrightarrow{\lambda_{AO}}.\vec{F} = \frac{F}{\sqrt{50}}(4i+3j+5k)$$

$$\overrightarrow{DA} \quad \Rightarrow \overrightarrow{r_{DA}} = +4i+2j$$

$$\vec{M}_D = \overrightarrow{r_{DA}} \times \vec{F} = \frac{F}{\sqrt{50}} \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -5 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_D = \left[-10i-12k+8k+20j\right] \frac{F}{\sqrt{50}}$$

$$\vec{M}_D = F(-1.41i+2.82j-0.56k)$$

$$F.d = \vec{M}_D$$

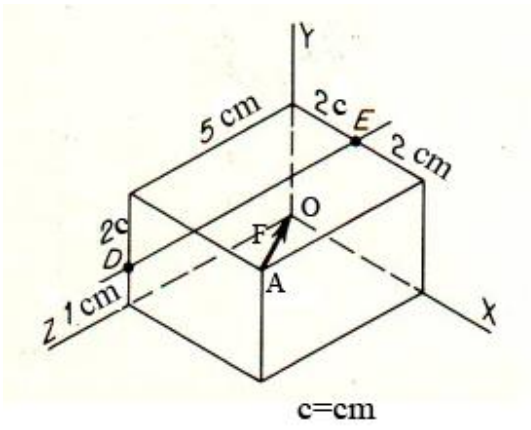
$$F.d = F(\sqrt{(1.41)^2+(2.82)^2+(0.56)^2}$$

$$d = \sqrt{1.988+7.952+0.3136} = \sqrt{10.2536}$$

$$d = 3.21\ cm$$

$$\overrightarrow{M_D} = 3.21F(-0.44i+0.88j-0.176k)$$

۱-۶۴ در شکل زیر مطلوبست، فاصله نقطه اثر نیروی F نسبت به خط DE .



$$D(0,1,5) \qquad E(2,3,0)$$

$$\overrightarrow{r_{DE}} = 2i+2j-5k$$

$$\vec{M}_{DE} = (\overrightarrow{\lambda_{DE}}.\vec{M}_D)\overrightarrow{\lambda_{DE}}$$

$$\overrightarrow{\lambda_{DE}} = \frac{\overrightarrow{DE}}{DE} = \frac{2i-12j-5k}{\sqrt{4+4+25}} = \frac{1}{\sqrt{33}}(2i-12j-5k)$$

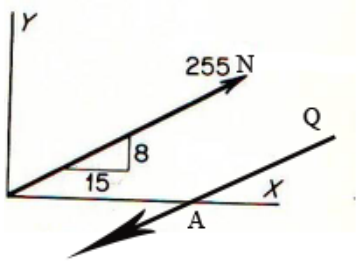
$$\vec{M}_{DE} = [\frac{1}{\sqrt{33}}(2i+2j-5k)].[3.21F(-0.44i+0.88j-0.176\ k)]$$

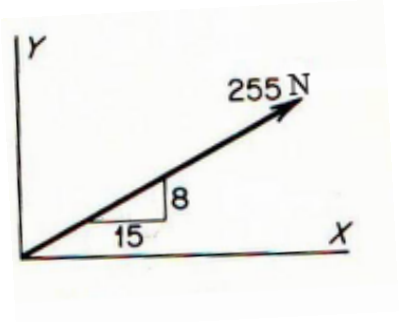
$$\vec{M}_{DE} = \frac{3.21F}{\sqrt{33}}(2(-0.44)+2(+0.88)-5(-0.176))$$

$$\vec{M}_{DE} = 0.98F = d \times F$$

$$d = 0.98$$

۱-۶۶ یکی از نیروهای کوپل نیروی شکل زیر مفروض است، مطلوبست مکان و مقدار کوپل نیروی دیگر به شرط اینکه گشتاور این کوپل نیرو برابر با ۷۲۰ N-cm، باشد.





$$\vec{M} = 720\ N-cm$$

$$\vec{M} = \vec{Q}xd$$

$$d = \frac{720}{255} = 2.82\ cm$$

$$\vec{F} = \vec{F}.\overrightarrow{\lambda_F} = 255x\frac{15i+8j}{\sqrt{225+64}}$$

$$\vec{F} = 225i+120j$$

$$\vec{M}_D = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 4 & -2 & -4 & 4 & -2 \\ 240 & -60 & 80 & 240 & -60 \end{vmatrix}$$

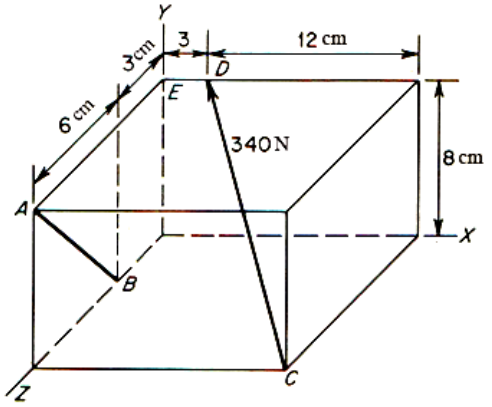
$$\vec{M}_D = 160i - 960j - 240k + 480k - 240i - 320j$$

$$\vec{M}_D = -400i - 1280j + 240k$$

$$\vec{M}_D = 1362(-0.293 - 0.94j + 0.176k) \quad N - cm$$

$$d = \frac{1362}{260} = 5.24\ cm$$

۱-۷۰ در مسئله ۱-۶۱ یکی از کوپل نیروها N ۳۴۰ است، مکان و نیروی دیگر این کوپل نیرو را پیدا کرده به شرط اینکه گشتاور این کوپل نیرو برابر با $3840k + 2700j - 1080i$ باشد.



$$\vec{M} = -1080i + 2700j + 3840k$$

$C(15,0,9)$

$D(3,8,0)$

$$\vec{CD} = -12i + 8j - 9k$$

$$\vec{\lambda}_{CD} = \frac{\vec{CD}}{\overline{CD}} = \frac{-12i + 8j - 9k}{\sqrt{144 + 64 + 81}} = \frac{-12i + 8j - 9k}{17}$$

$$\vec{F}_{CD} = \frac{340}{17}(-12i + 8j - 9k)$$

$$\vec{Q} = -\vec{F} = -225i - 120j$$

$A(x, y)$

$$\vec{r}_{OA} = xi + yj$$

$$\vec{M} = \vec{r}_{OA} x \vec{F}$$

این معادله بیشمار جواب دارد،بهترین جواب همان y=۰است

$$(xi + yj)x(225i + 120j) = 720k$$

$$120x - 225y = 720$$

$$y = 0$$

$$x = \frac{720}{120} = 6$$

$A(6,0)$

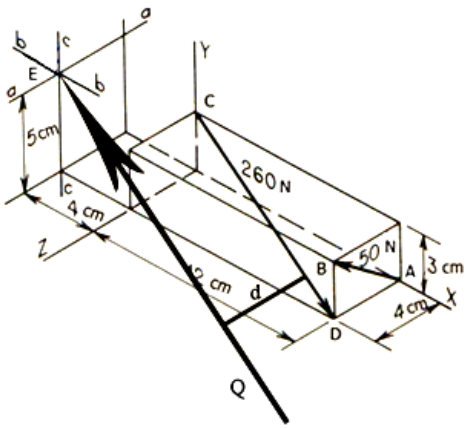
۱-۶۸ نیروی N ۲۶۰ در مسئله ۱-۵۲، یکی از نیروی کوپل نیرو است، نیروی دیگر که از نقطه E می گذرد چقدر است، گشتاور این کوپل نیرو چقدر است.

$$\vec{M} = -400i - 1280j + 240k$$

$$\vec{M} = 1362(-0.293 - 0.94j + 0.176k) \quad N - cm$$

$$d = \frac{1362}{260} = 5.24\ cm$$

از مسئله ۱-۵۲داریم



$$\overrightarrow{F_{CD}} = -240i + 160j - 180k$$

$$-\overrightarrow{F_{Cd}} = \vec{Q}$$

$$\vec{Q} = 240i - 160j + 180k$$

$$A(a,0,c) \quad , C(15,0,9)$$

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r_{AC}} x \vec{Q}$$

$$\vec{r} = (15-a)i + (9-C)k$$

$$\overrightarrow{M} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 15-a & 0 & 9-c & 15-a & 0 \\ +240 & -160 & +180 & +240 & -160 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M} = 240(9-c)j - 160(15-a)k + 160(9-c)i$$

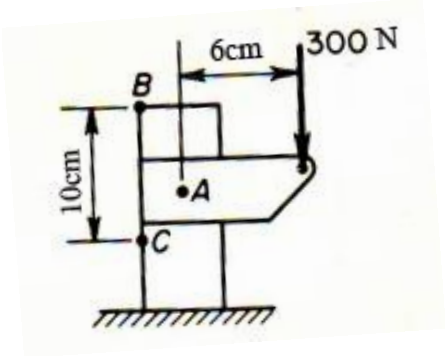
$$+180(15-a)j = -1080i + 2700j + 3840k$$

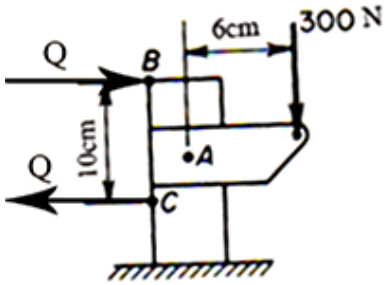
$$160(9-c) = -1080 \Rightarrow c = 2.25$$

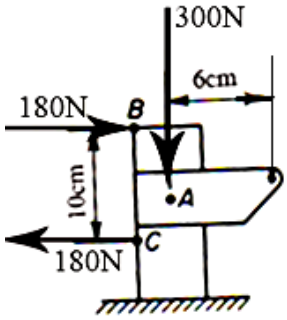
$$160(15-a) = 3840 \Rightarrow a = -9$$

Qاز مختصات روبرو می گذرد(۹-،۰،۲٫۲۵)A

۱-۷۶ در شکل زیر، سیستم موجود را به یک نیرو منفرد که از نقطه A بگذرد و یک جفت نیرو که در نقطه B و C عبور می کند تبدیل کنید.





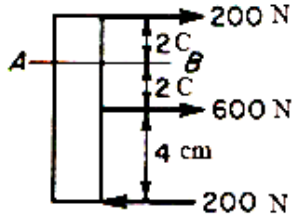


$$\overrightarrow{M_A} = 300x6 = 1800 \ N-cm \ \text{↵}^+$$

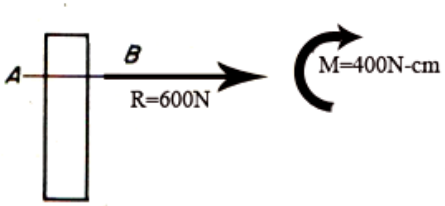
$$Qx10 = 1800$$

$$Q = 180 \ N-cm$$

۱-۷۸ در شکل زیر، سیستم زیر را به یک نیروی منفرد که از خط AB می گذرد تبدیل کنید.



C=cm



$$\overrightarrow{M_{AB}} = 200(2) - 600(2) + 200(6) \ \text{↵}^+$$

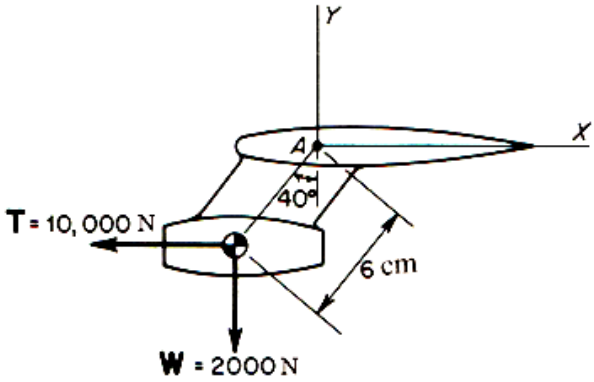
$$\overrightarrow{M_{AB}} = 400 \, N-cm$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

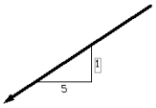
$$R = 600 - 200 + 200 = 600 \ N$$

۱-۸۰ وزن موتور یک هواپیما ۲۰۰۰N می باشد، این موتور بوسیله بازوی بال هواپیما مطابق شکل نگهه داری می شود، موتور

این هواپیما نیروی برابر با N ۱۰۰۰۰ تولید می کند، این سیستم را به یک نیرو در نقطه A و یک گشتاور تبدیل کنید.



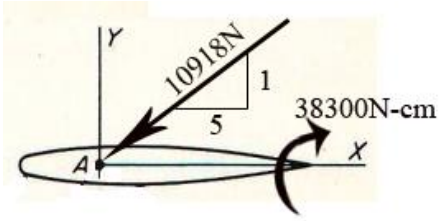
$$\overline{R} = 10198 \quad N$$



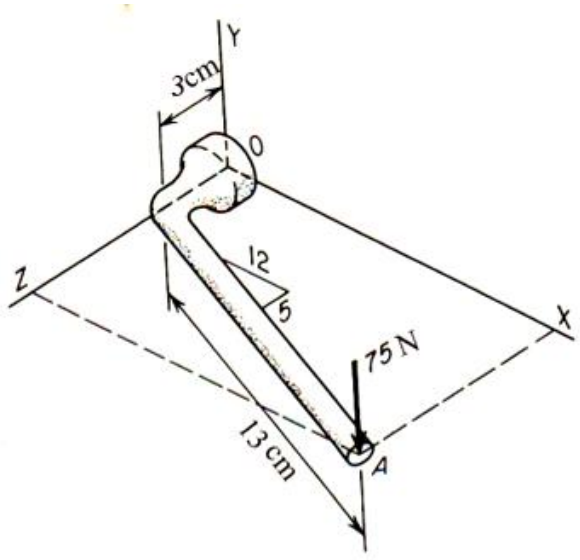
$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{r_{AO}}\ x\vec{R}$$

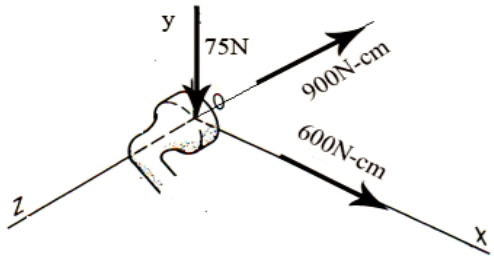
$$\overrightarrow{M_A} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ -3.85 & -4.6 & 0 & -3.85 & -4.6 \\ -10000 & -2000 & 0 & -10000 & -2000 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_A} = 7700k - 46000k = -38300\ N-cm$$



۱-۸۲ روی آچار مطابق شکل نیروی N ۷۵ وارد می شود، این سیستم را به نیرویی که از نقطه O بگذرد و یک جفت نیرو در نقطه O تبدیل کنید.





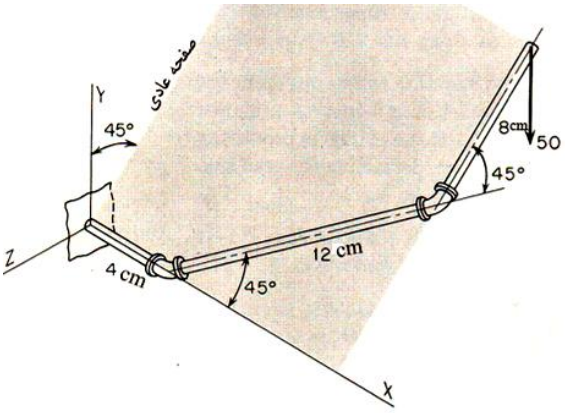
(۱۲،۰،۵)

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{r_{OA}}\ x(-75j)$$
$$\overrightarrow{M_O} = (12i + 8k)x(-75j)$$
$$\overrightarrow{M_O} = -900k + 600i$$

۱-۸۴ سه لوله آب به اندازه های مختلف مطابق شکل در یک صفحه عادی وصل شده اند، اگر به انتهای لوله نیروی N ۵۰۰ وارد شود، مطلوبست گشتاور بوجود آمده در هر لوله را.

گشتاور که بر روی OA بوجود می آید

$$\overrightarrow{M_{OA}} = (4i)x - 500j = -2000k$$



گشتاورکه بر روی AB,BC بوجود می آید

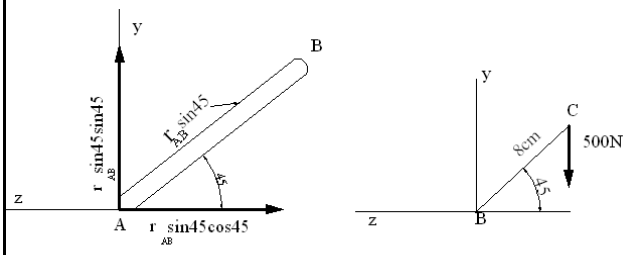
$$\overrightarrow{M_{AB}} = [(-r_{AB}\sin 45\cos 45)k - 8(\cos 45)k]x - 500j$$

$$\overrightarrow{M_{AB}} = [(-12\sin 45\cos 45)k - 8(\cos 45)k]x - 500j$$

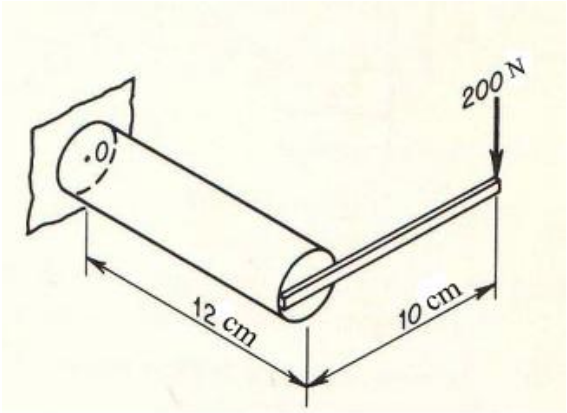
$$\overrightarrow{M_{AB}} = (-6k - 5.66k)x - 500j$$

$$\overrightarrow{M_{AB}} = -5830\ i$$

خلاف عقربه ساعت، ازAبهB



۱-۸۶ در شکل زیر سیستم را بـه یـک نیرویـی کـه از نقطـه O بگذرد و یک گشتاور تبدیل کنید.



$$\vec{r}_{OA} \times F = M_O$$

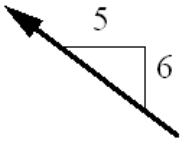
$$M_O = (12i - 10k) \times -200\ j$$

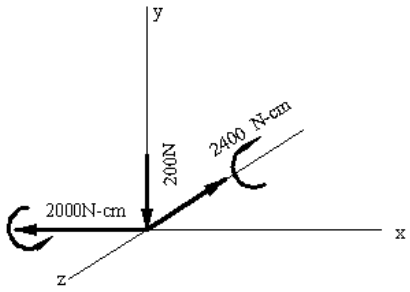
$$\vec{M}_O = -2400\ k + 2000\ (-i) = -2000\ i - 2400\ k$$

$$\overline{M_O} = \sqrt{(2000)^2 + (2400)^2}$$

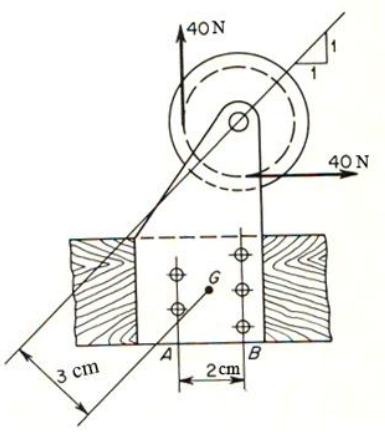
$$\overline{M_O} = 3124\ \ N - cm$$

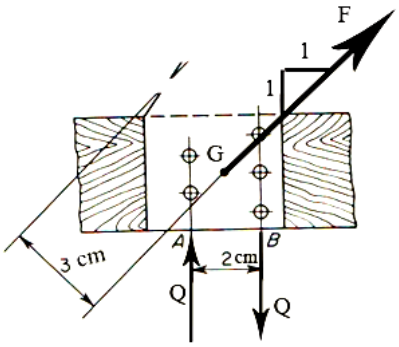
$$\frac{2000}{2400} = \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$$





۱-۸۸ در شکل زیر نیروی وارد بـر قرقـره مطـابق شـکل ۴۰ N است، سیستم زیر را به یک نیرو منفرد در نقطه G و یـک جفـت نیرو در نقطه B و A تبدیل کنید.





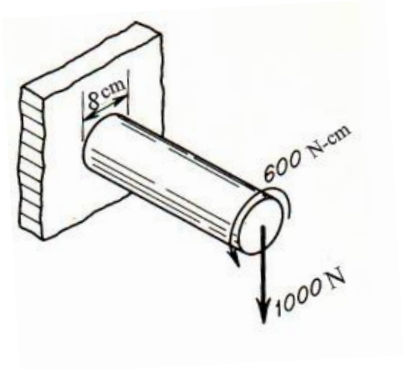
$$F = \sqrt{(40)^2 + (40)^2} \quad N$$

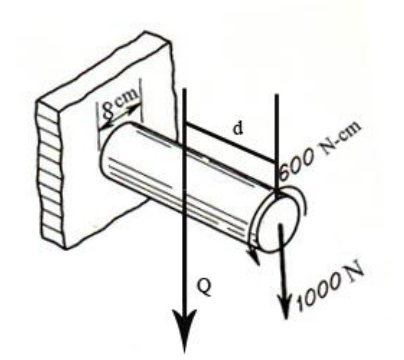
$F = 56.6 \quad N$

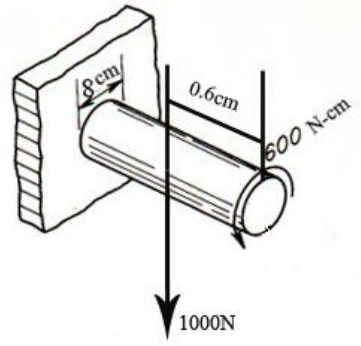
$3 \times 56.6 = 2 \times Q$

$Q = 84.8 \quad N$

۱-۹۰ سیستم زیر را به یک نیروی منفرد معادل تبدیل کنید

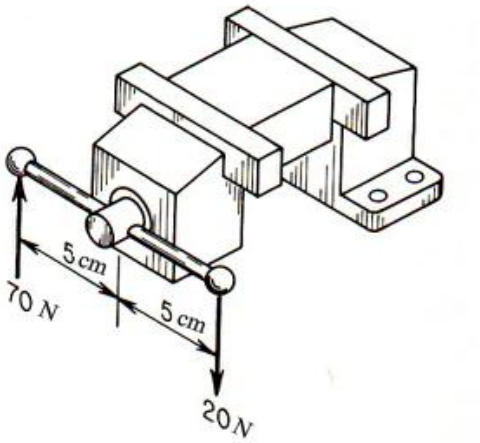


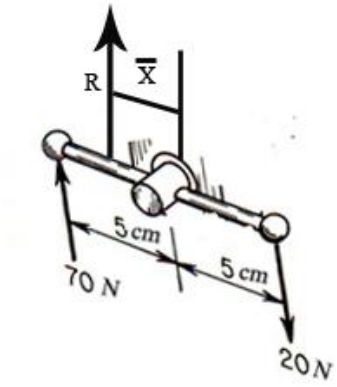


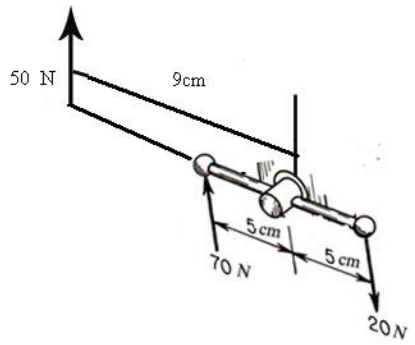


$$d = \frac{M}{F} = \frac{600}{1000} \qquad d = 0.6 \quad N$$

۱-۹۲ سیستم زیر را به یک نیروی منفرد معادل تبدیل کنید، نقطه اثر نیرو را کاملاً مشخص کنید.







$$R = 70 - 20 = 50\ N$$

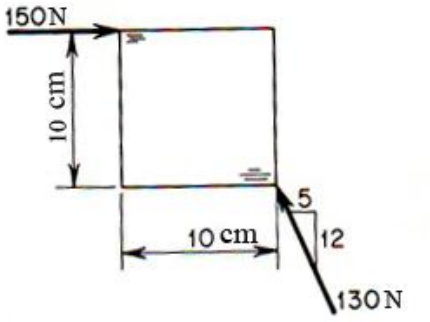
$$(R)(\overline{X}) + 70(5) + 20(5) = 0$$

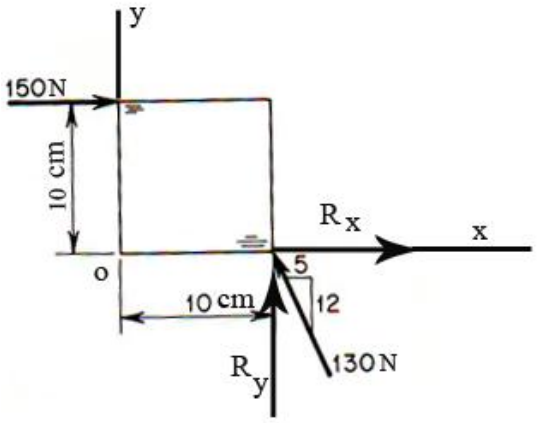
$$R\overline{X} = -450$$

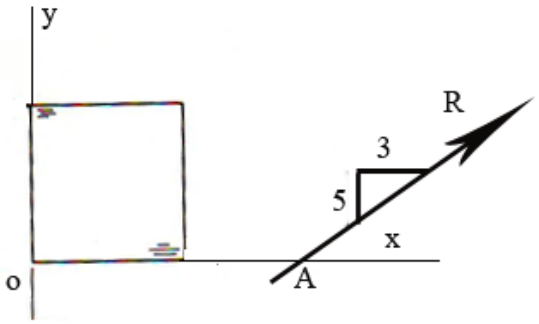
$$\overline{X} = \frac{-450}{50} = -9\ cm$$

نیروی معادل۴cm در طرف چپ ۷۰ N اثر می کند ، یا ۱۴cm از نیروی ۲۰ N

۹۴-۱ بوسیله انتقال نیرو ، سیستم دو نیروی زیر را به یک نیروی منفرد تبدیل کنید، نقطه اثر نیرو را کاملاً مشخص کنید







$$R_X = 130 \times \frac{5}{13} = 50\ N$$

$$R_y = 130 \times \frac{12}{13} = 120\ N$$

$$M_o = 150 \times 10 - 50 \times 10\ \ N - cm$$

$$M_o = 1500 - 500 = 1000\ \ N - cm$$

$$R_x = 150 - 120 = 30\ N$$

$$R_y = 50\ N$$

$$R_x = 30i + 50j$$

$$R = \sqrt{30^2 + 50^2} = 58.3\ N$$

$$M_o = (xi + yj) \times (30i + 50j) = 1000k$$

$$M_0 = 50xk - 30yk = 1000k$$

$$50x - 30y = 1000$$

$$y = 0$$

$$x = \frac{1000}{50} = 20\ cm$$

$$A(20,0)$$

فصل ۲

سیستم های معادل

سیستم کوپل نیروی وارد بر نقطه Oرا می توان به یک بردار منفرد در امتداد خط اثر نیرو نمود هر گاه R, M_Oعمود بر یکدیگر باشند و این وقتی صادق است که ۱-نیروها متقارب و۲-نیروها هم صفحه و۳- نیروها موازی باشند.

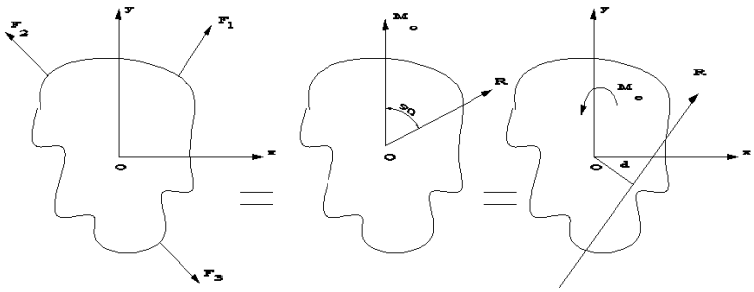
۱- اگر نیروها در یک نقطه متقارب باشند concurrent

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

چون از نقطه o می گذرند

$$M = 0$$

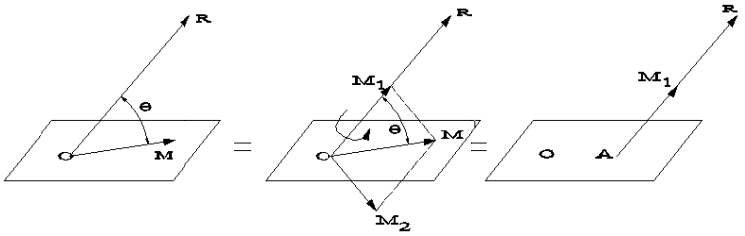
۲- اگر نیروها هم صفحه باشند Coplanar

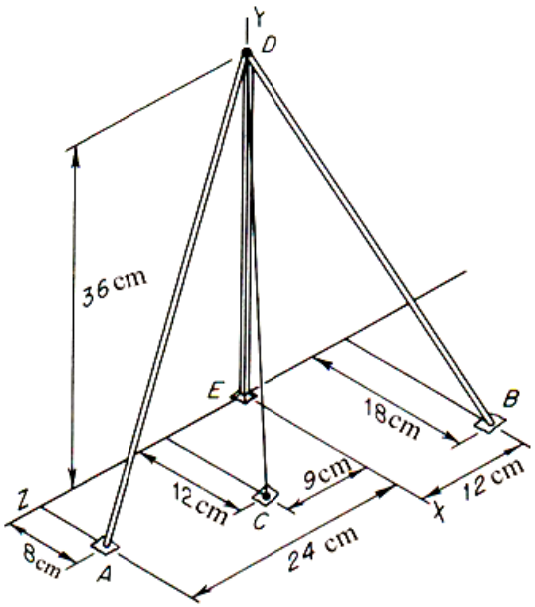


$$d = Mo / R$$

در حالی که R, M_oبر هم عمودهستند.

اگر $\vec{R}$ و $\overrightarrow{Mo}$ دو بردار با هم زاویه θ بسازند .





2-12 تیرک عمودی ۳۶ سانتی متر بوسیله سه کابل DC و BD و AD روی زمین نگهه داری می شود، در کابل AD نیروی 550نیوتن که جهت آن به سمت D است و در کابل BD نیروی N 490 که جهت آن به سمت D است و در کابل CD نیروی N 455 که جهت آن به سمت C است اثر می کند، مطلوبست برآیند نیروها که در نقطه D اثر می کند.

$A(8,0,24)$ $D(0,36,0)$ $C(12,0,9)$ $B(18,0,-12)$

550 $\overrightarrow{AD}$ $r_{AD} = -8i + 36j - 24k$

$$\vec{F}_{AD} = \frac{550}{\sqrt{1936}}(-8i + 36j - 24k)$$

$$\vec{F}_{AD} = -100i + 450j - 300k$$

$$Compression\vec{F}_{AD} = +100i - 450j + 300k$$

490 $\overrightarrow{BD}$ $r_{BD} = -18i + 36j + 12k$

$$\vec{F}_{BD} = \frac{490}{\sqrt{1764}}(-18i + 36j + 12k)$$

$$\vec{F}_{BD} = -210i + 420j + 140k$$

$$compressip\vec{n}F_{BD} = +210i - 420j - 140k$$

455 $\overrightarrow{CD}$ $\vec{r}_{CD} = -12i + 36j - 9k$

$$\vec{F}_{CD} = \frac{455}{\sqrt{1521}}(-12i + 36j - 9k)$$

$$\vec{F}_{CD} = -140i + 420j - 105k$$

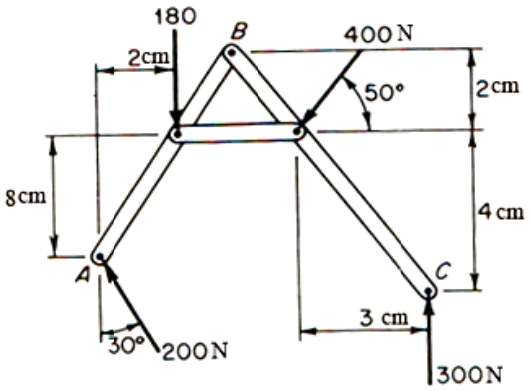
$$tension\vec{F}_{CD} = -140i + 420j - 105k$$

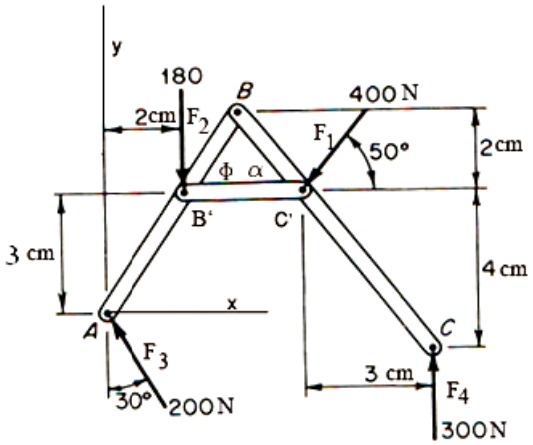
$$\vec{R} = \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{BD} + \vec{F}_{AD}$$

$$\vec{R} = 170i - 450j + 55k$$

$$\Rightarrow \quad \vec{R} = 484(+0.351i - 0.93j + 0.1136k)$$

2-24 در شکل زیر مطلوبست برآیند نیروهـا و فاصـله نقطـه اثر این نیرو از نقطه A .



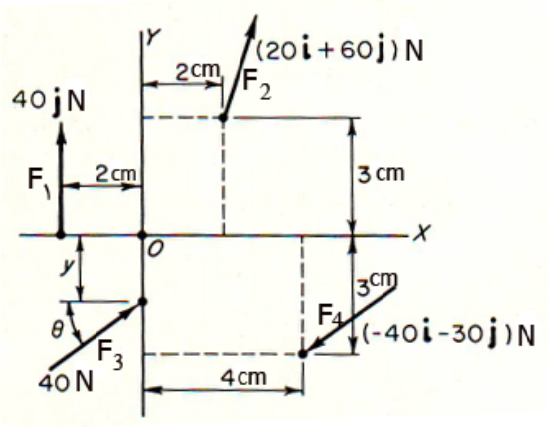


$$F_4 = 300\,j$$
$$F_3 = 200\left[\sin\theta\ i + \cos\theta\ j\right]$$
$$F_3 = 200\left[-\sin 30 i + \cos 30\, j\right)$$
$$F_3 = 200(-0.5i + 0.866\,j)$$
$$F_3 = -100i + 173.2\,j$$
$$F_4 = 400(-\cos\theta\, i - \sin\theta\ j)$$
$$F_1 = 400(-\cos 50 i + \sin 50\, j) = -257.1i - 306.4\,j$$
$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = -13.2\,j - 357.1i$$
$$R = 357.34(-0.037\,j - i)$$

$$B'C' = \frac{2}{\tan\alpha} + \frac{2}{\tan\phi} = \frac{2}{\frac{4}{3}} + \frac{2}{\frac{3}{2}}$$
$$B'C' = 1.5 + 1.33 = 2.83\ cm$$

$$\overrightarrow{M}_A = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4$$
$$r_3 = 0 \qquad r_2 = 2i$$
$$r_1 = \overrightarrow{AC} = 4.83i + 3\,j$$
$$r_4 = (2 + 2.83 + 3)i = 7.83i$$
$$M_A = 0 + 2i \times (-180\,j) + (7.83i) \times (300\,j) +$$
$$(4.83i + 3\,j) \times (-257.1i - 306.4\,j)$$
$$M_A = -360k + 2349k - 1480(k) + 771.3k$$
$$M_A = -360k + 2349k - 1480k + 771.3k$$
$$M_A = 1280k$$
$$d = \frac{M_A}{R} = \frac{1280}{357.34} = 3.58\ \ cm$$

2-30 چهار نیروی هم صفحه شکل زیر مفروض است، مطلوبست زاویه θ نیروی 40 N را به شرط اینکه برآیند نیروها در راستای y ها باشد. ثانیاً وقتی که θ=30 باشد، مطلوبست اندازه فاصله y ،به شرط اینکه گشتاور نیروها نسبت به (O) صفر شود.



$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$
$$R = 20i + 60\,j + 40\,j - 40i - 30\,j + F_3$$
$$F_3 = 40\cos\theta\ i + 40\sin\theta\ j$$
$$R = (-20 + 40\cos\theta)i + (70 + 40\sin\theta)\,j$$
$$M_O = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3 + r_4 \times F_4$$

$r_1 = -2i$

$r_2 = 2i + 3j$

$r_4 = 4i - 3j$

$r_3 = -yj$

$M_O = -2i \times 40j + (2i + 3j) \times (20i + 60j) +$

$(4i - 3j) \times (-40i - 30j)$

$-yj \times (40\cos\theta\, i + 40\sin\theta\, j)$

$M_O = -80k + 120k + 60(-k) - 120(k) +$

$120(-k) - 40y\cos\theta(-k)$

$M_O = (-260 + 40y\ \cos\theta)k$

$r = xi + yj \qquad x = 0$

$-20 + 40\cos\theta = 0 \qquad \cos\theta = +\frac{1}{2}$

$\theta = 60^\circ$

$M_O = r \times R = (xi + yj) \times (-20 + 40\cos\theta)i + (70 + 40\sin\theta)j$

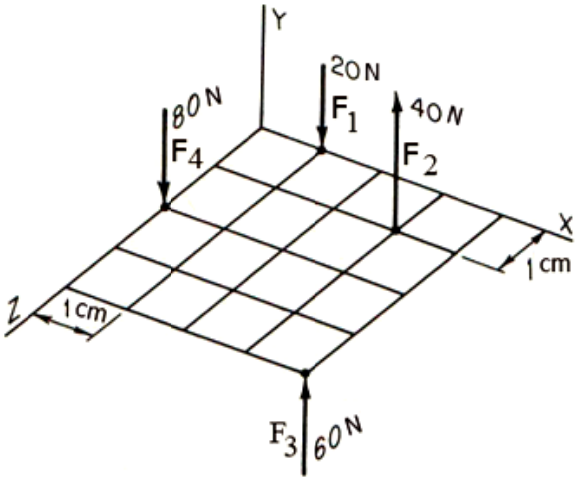
$(x)(70 + 40\sin\theta) = (-260 + 40y\cos\theta)$

$x = 0$

$0 = -260 + 40y\cos 30$

$y = 7.5\ cm$

2-34 مطلوبست برآیند نیروهای شکل زیر.



$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

$R = -20j + 40j + 60j - 80j$

$R = 0$

$(xi + yj) \times R = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3 + r_4 \times F_4$

$(xi + yj) \times R = 0\ \ k \qquad R = 0$

$M_O = (i) \times (-20j) + (3i + k) \times (40j) +$

$(4i + 4k) \times (60j)2k \times (-80j)$

$M_O = -20k + 120k + 40(-i) +$

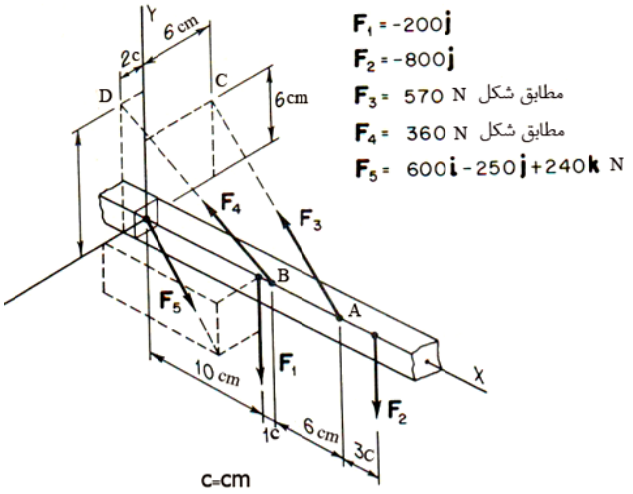
$240k + 240(-i) - 160(-i)$

$M_O = -20k + 120k - 40i + 240k - 240i + 160i$

$M_O = -120i + 340k =$

$360.55(-0.33i + 0.943k) \quad N - cm$

2-44 مطلوبست برآیند نیروهای شکل زیر.



$F_1 = -200\,j$

$F_2 = -800\,j \qquad A(17,0,0)$

$F_3 = 570N \qquad B(11,0,0)$

$F_4 = 360^N \qquad C(0,6,-6)$

$F_5 = 600i - 250j + 240k \qquad D(0,10,2)$

$F_3 \quad A\vec{C} \quad r_{AC} = -17i + 6j - 6k$

$F_3 = \frac{570}{\sqrt{361}}(-17i + 6j - 6k)$

$F_3 = -510i + 180j - 180k$

$F_4 \quad r_{BD} = -11i + 10j + 2k$

$$F_4 = \frac{360}{\sqrt{225}}(-11i + 10j + 2k)$$

$$F_4 = -264i + 240j + 48k$$

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5$$

$$\vec{R} = -174i + 830j + 108k$$

$$R = 855(-0.203i - 0.97j + 0.126k)\ N$$

$$M_O = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3 + r_4 \times F_4 + r_5 \times F_5$$

$$M_O = 10i \times (-200j) + 20\ i \times (-800j) +$$

$$16i \times (-510i + 180j - 180k)$$

$$+ 11i \times (-264i) + 240j + 48k) + 0$$

$$M_O = -2000k - 16000k + 3060\ k$$

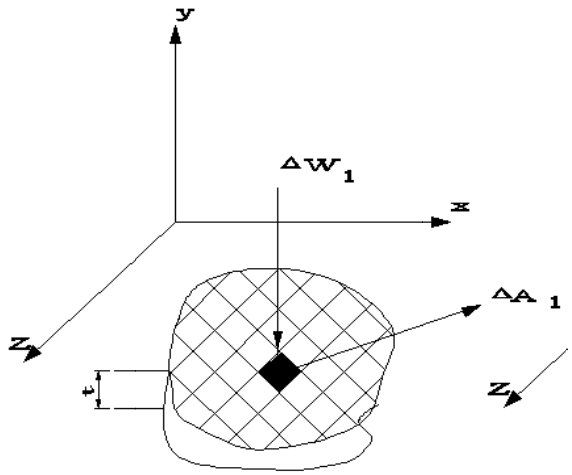
$$-3060(-j) + 2640k + 528(-j)$$

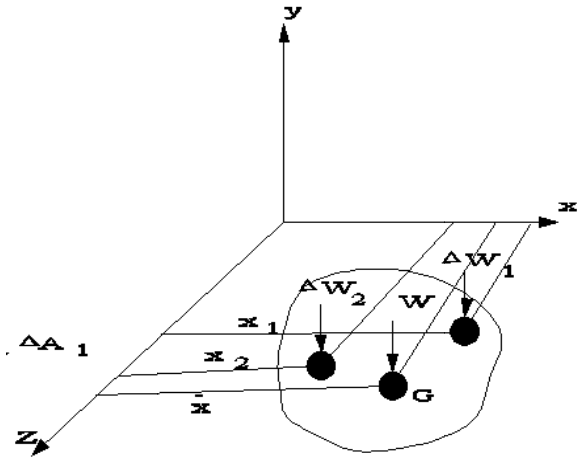
$$M_O = 2532j - 12300k = 12560\ (0.202j - 0.98k)\ N - cm$$

فصل ۳

توزیع نیروها ، مرکز سطح ، مرکز ثقل center of gravity "centeriod"

مرکز ثقل سطوح





$$\sum M_0 = \sum M$$

$$\bar{X}w = X_1\Delta w_1 + x_2\Delta w_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum Fy_1 = \sum Fy_2 w = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \ldots$$

$$\bar{X} = \frac{x_1\Delta w_1 + x_2\Delta w_2 + \ldots\ldots}{w_1 + w_2 + \ldots\ldots} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} xidwi}{\sum_{i=0}^{\infty} wi}$$

$$\bar{X} = \frac{\int xdw}{\int dw}$$

$$\bar{Y} = \frac{\int ydw}{\int dw}$$

$$\Delta w_1 = (t)(\Delta A_1)\gamma$$

$$\bar{X} = \frac{\int xtdA\gamma}{\int tdA\gamma}$$

$$\bar{X} = \frac{t\gamma\int xdA}{t\gamma\int dA} = \frac{\int xdA}{\int dA}$$

تعیین مرکز ثقل ، روش تابع اولیه :

$$\bar{x}A = \int xdA$$

در مختصات دکارتی

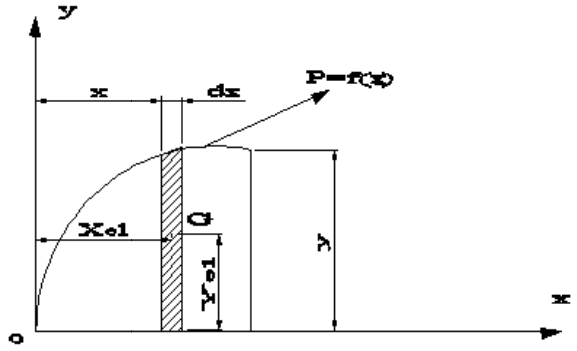
$$dA = dxdy$$

$$dA = rd\theta$$

در مختصات قطبی

$$\bar{X}A = \int\int dxdy$$

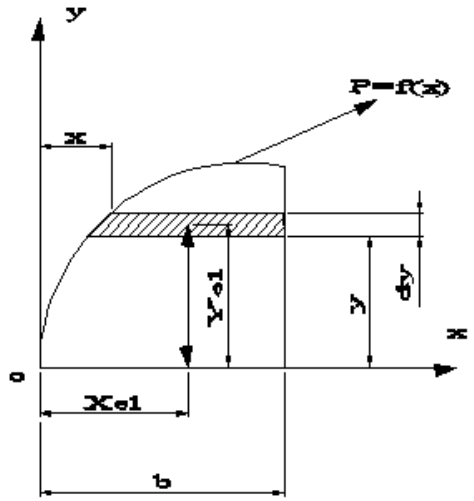
$$\bar{X}A = \int\int (r\cos\theta)rd\theta dr$$



$$\bar{X}el = x$$

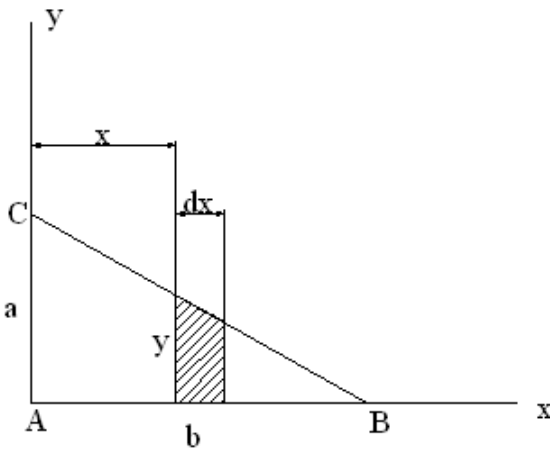
$$\bar{Y}el = y/2$$

$$dA = ydx$$



$$\overline{X}el = x + L/2 = x + b/2 - x/2$$
$$\overline{X}el = (b + x)/2$$
$$Yel = y$$
$$dA = (dy)(b - x)$$

3-6 با روش آنتگرال گیری ، مرکز ثقل مثلثی که مختصات سه رأس آن به ترتیب زیر است: C(3,0) و B(4,0) و A(0,0) را بدست آورید

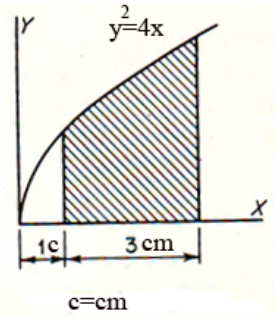


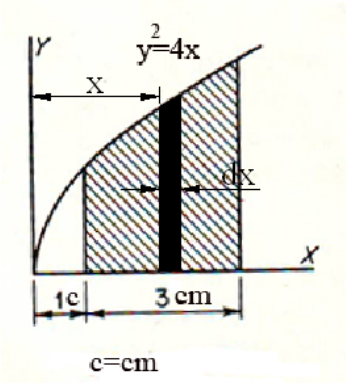
$A(0,0) \quad B(4,0) \quad C(0,3)$

$$d_A = ydx$$
$$d_{M_y} = xdn = xydx$$
$$\frac{y}{a} = \frac{b-x}{b} = 1 - \frac{x}{b}$$

$$d_{M_y} = x(a)(1-\frac{x}{b})dx$$
$$d_{M_y} = a(x - \frac{x^2}{b})dx$$
$$M_y = a\int_o^b (x - \frac{x^2}{b})dx$$
$$M_y = a\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3b}\right]_o^b = a(\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{3}) = \frac{ab^2}{6}$$
$$d_{M_x} = (\frac{y}{2})d_A = \frac{y}{2}ydx = \frac{1}{2}y^2dx$$
$$d_{M_x} = \frac{1}{2}(a^2)(1-\frac{x}{b})^2dx$$
$$M_x = \frac{1}{2}a^2\int_o^b (1 + \frac{x^2}{b^2} - \frac{2x}{b})dx$$
$$M_x = \frac{1}{2}a^2\left[x + \frac{1}{3b^2}x^3 - \frac{x^2}{b}\right]_o^b$$
$$M_x = \frac{1}{2}a^2\left[b + \frac{b}{3} - b\right] = \frac{1}{6}a^2b$$
$$A = \frac{ab}{2}$$
$$y_c = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{a^2b}{c}}{\frac{ab}{2}} = \frac{a^2b}{6} \times \frac{2}{ab} = \frac{a}{3}$$
$$y_C = \frac{a}{3}$$
$$x_c = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{ab^2}{c}}{\frac{ab}{2}} = \frac{b}{3}$$
$$\begin{cases} x_c = \frac{4}{3} = 1.333 \\ y_c = \frac{3}{3} = 1 \end{cases}$$

3-8 مرکز ثقل هاشور زده شکل زیـر را بدسـت آوریـد و معادلـه منحنی برابر است با $y^2 = 4x$ است.





$$d_A = ydx$$

$$d_{M_y} = xd_A = xy\ dx$$

$$d_{M_y} = (x)(2x^{\frac{1}{2}})dx$$

$$M_y = \int_1^3 2\ x^{1.5}dx$$

$$d_A = 2x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$A = 2\int_1^3 x^{1.5}dx = 2[\frac{1}{1.5}x^{1.5}]_1^3$$

$$A = \frac{2}{1.5}[3^{1.5} - 1] = 5.59\ \ cm^2$$

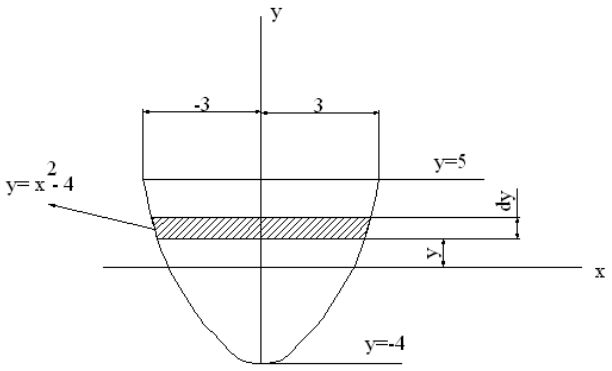
$$d_{M_x} = (\frac{y}{2})(d_A) = \frac{y^2}{2}dx = 2x\ dx$$

$$M_X = \int_1^3 2x\ dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = 9 - 1 = 8$$

$$x_c = \frac{M_y}{A} = \frac{11.67}{5.59} = 2.09\ \ cm$$

$$y_c = \frac{M_x}{A} = \frac{8}{5.59} = 1.43\ cm$$

3-10 مرکز ثقل محصور بین منحنی $x^2 = y + 4$ و معادله خطی $y = 5$ را بدست آورید.



$$y = x^2 - 4 \qquad x^2 - 4 = 5$$

$$y = 5 \qquad x = \pm 3$$

$$d_A = 2x\ dy$$

$$d_{M_x} = yd_A$$

$$d_{M_x} = 2xy\ dy$$

$$d_{M_y} = 2x(x^2 - 4)dy$$

$$dy = 2x\ dx$$

$$d_{M_x} = 2x(x^2 - 4)(2x\ dx) = 4x^2(x^2 - 4)dx$$

$$M_x = \int_0^3 4(x^4 - 4x^2)dx = 4\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\right]_0^3$$

$$M_x = 4\left[\frac{243}{5} - 36\right] = 4(48.6 - 36)$$

$$M_y = 2\left[\frac{1}{2.5}x^{2.5}\right]_1^3 = \frac{2}{2.5}[(3)^{2.5} - 1] = 11.67\ \ cm^3$$

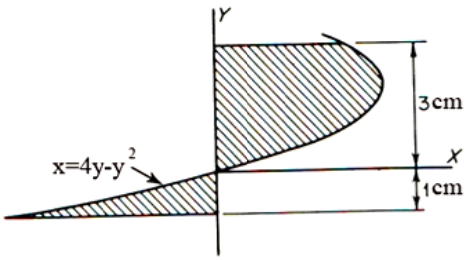
$$A = 2\int(y+4)^{\frac{1}{2}}dy = 2\int_{-4}^5 (y+4)^{\frac{1}{2}}\ dy$$

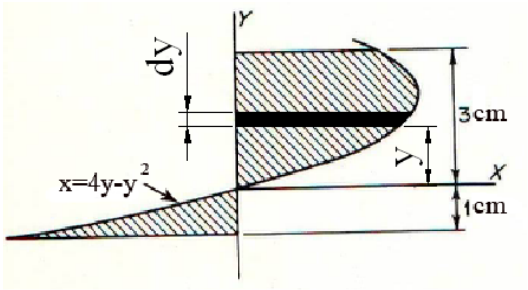
$$A = 2\left[\frac{(y+4)^{1.5}}{1.5}\right]_{-4}^5$$

$$A = 2\left[\frac{9^{1.5}}{1.5} - \frac{0^{1.5}}{1.5}\right] = 36\ cm^2$$

$$x_C = 0 \qquad y_c = \frac{M_x}{A} = \frac{50.4}{36} \qquad y_c = 1.4\ cm$$

3-12 طول مرکز ثقل هاشور زده شکل زیر را بدست آورید،
معادله منحنی برابر $x = 4y - y^2$





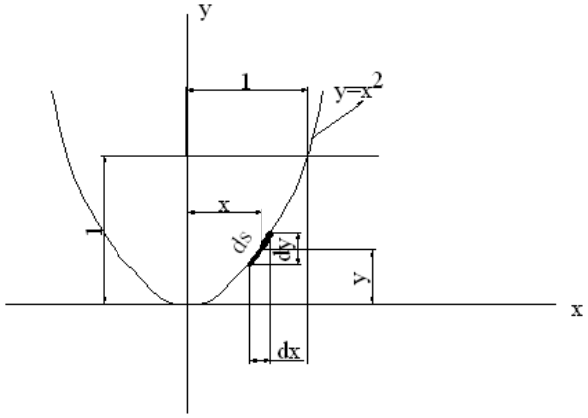
$$x = 4y - y^2$$
$$\bar{x}_C = ?$$
$$d_A = x\ dy$$
$$A = \int_{-1}^{3} x\ dy = \int_{-1}^{3} (4y - y^2)dy$$
$$A = \left|\int_{-1}^{0} (4y - y^2)dy\right| + \int_{0}^{3} (4y - y^2)dy$$
$$A = \left|-2 + \frac{1}{3}(-1)\right| + (18 - 9)$$
$$A = \frac{7}{3} + 9 = \frac{34}{3}\ cm^2 = 11.33$$
$$M_y = \frac{x}{2} dA = \frac{x}{2}(x)dy = \frac{1}{2}(4y - y^2)^2 dy$$
$$M_y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3}(16y^2 + y^4 - 8y^3)dy$$
$$M_y = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - \frac{8}{4}y^4\right]_{-1}^{3}$$
$$M_y = \frac{1}{2}[144 + 48.6 - 162 + 5.33 + 0.2 + 2]$$
$$M_y = 19.65$$

$$\bar{x}_c = \frac{M_y}{A} = \frac{19.065}{11.33}$$

$$\bar{x}_c = 1.68\ cm$$

3-14 فقط طول مرکز ثقل قوس منحنی $y = x^2$ را در نقطه (1,1) بدست آورید.

$$y = x^2$$
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$



$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$
$$ds = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$ds = (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$ds = (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$s = \int_0^1 (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ \sinh^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \int (1^2 + (2x)^2)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \frac{2x}{2}\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{2}\ \sinh^{-1}\frac{2x}{1}$$
$$= x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{2}\ \sinh^{-1} 2x\Big]_0^1$$
$$= \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ \sinh^{-1} 2 - 0 - \frac{1}{2}\ \sinh^{-1} 0$$

$$= \sqrt{5} + 0.7218 - 0 = 2.236 + 0.7218 = 2.958$$

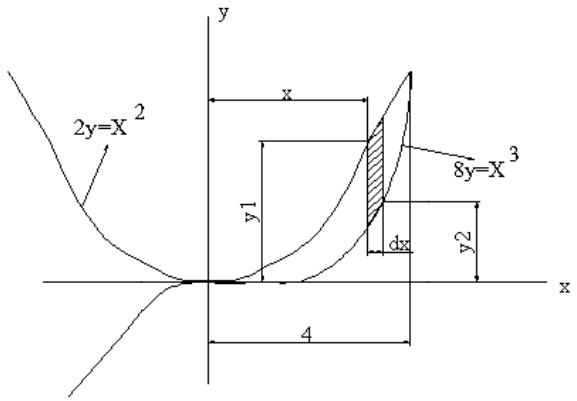
$$d_{M_y} = xds = \int_0^1 \frac{8x}{8}(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$M_y = \frac{(1+4x^2)^{1.5}}{1.5}\times\frac{1}{8}\Big]_0^1 =$$

$$M_y = \frac{5}{8\times1.5} - \frac{1}{8\times1.5} = 0.9316 - 0.0833 = 0.8483$$

$$x = \frac{0.8483}{2.958} = 0.286\ cm$$

3-16 فقط طول مرکز ثقل شکل بدست آمده از محصور بین دو منحنی $8y = x^3$ و $2y = x^2$ را بدست آورید.



$$2y = x^2$$
$$8y = x^3 \qquad \bar{x}_c = ?$$
$$\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{8} \qquad x = 4$$

$$2y_1 = x^2 \qquad 8y_2 = x^3$$

$$dA = dx(y_1 - y_2)$$

$$dA = (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8})dx$$

$$A = \int_0^4 (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8})dx$$

$$A = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{x^4}{32}\right]_0^4 = \frac{1}{6}(64) - \frac{256}{32} = 10.66 - 8$$

$$A = 2.66\ cm^2$$

$$d_{M_y} = xdA = x(y_1 - y_2)dx =$$

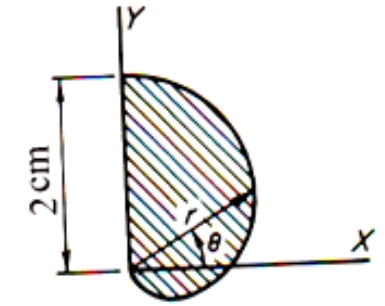
$$(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8})dx$$

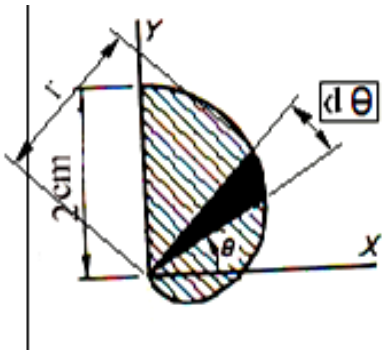
$$M_y = \int_0^4 (\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8})dx$$

$$M_y = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{x^5}{40}\right]_0^4 = 32 - 25.6 = 6.4$$

$$\bar{x}_c = \frac{M_y}{A} = \frac{6.4}{2.66} = 2.4\ cm$$

3-18 فقط طول مرکز ثقل شکل هاشور زده زیر را بدست آورید معادله خط قطبی آن $r = 1 + sim\theta$ است





$$r = 1 + \sin\theta$$

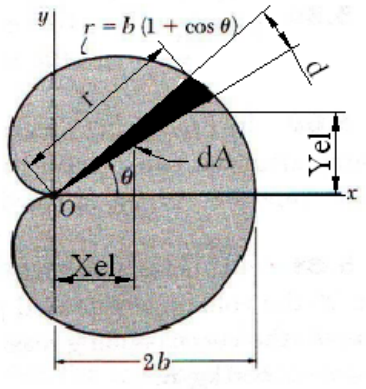
$$x_{el} = \frac{2r}{3}\cos\theta$$

$$\bar{x} = ?$$

$$2 = 1 + \sin\theta$$

$$\sin\theta = 1 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\theta = -1 \qquad \theta = -\frac{\pi}{2}$$



$r = b(1+\cos\theta)$

$x_{el} = \frac{2r}{3}\cos\theta$

$r = 0$

$1+\cos\theta = 0 \qquad \cos\theta = -1$

$\theta = \pi$

$$\begin{cases} r = 2b \\ 2b = b(1+\cos\theta) = 0 \end{cases}$$

$\cos\theta = 1 \qquad \theta = 0 \qquad \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ r = b \end{cases}$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} b^2(1+\cos\theta)^2 d\theta =$$

$$\frac{1}{2}b^2\int_0^{\pi}(1+\cos^2\theta+2\cos\theta)d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}b^2\int_{-\pi}^{\pi}(1+\frac{\cos 2\theta+1}{2}+2\cos\theta)d\theta$$

$$A = \frac{b^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{3}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}+2\cos\theta)d\theta$$

$$A = \frac{b^2}{2}\left[\frac{3}{2}\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}+2\sin\theta\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$A = \frac{b^2}{2}\times\frac{3}{2}\pi = (\frac{3}{4}b^2\pi)(2) = \frac{3}{2}b^2\pi$$

$$\bar{x}A = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2r}{3}\cos\theta\frac{1}{2}r^2 d\theta$$

$$\bar{x}A = \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\, r^3 d\theta$$

$$\bar{x}A = \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi} b^3(1+\cos\theta)^3\cos\theta\, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2\theta+2\sin\theta)d\theta$$

$1-2\sin^2\theta = \cos 2\theta$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}+2\sin\theta)d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3}{2}-\frac{\cos 2\theta}{2}+2\sin\theta)d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{3}{2}-\frac{\cos 2\theta}{2}+2\sin\theta\right]d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta-2\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}(\frac{\pi}{2})-\frac{1}{4}\sin\pi-2\cos\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}(-\frac{\pi}{2})+ \\ \frac{1}{4}\sin(-\pi)+2\cos-\frac{\pi}{2}\end{array}\right)$$

$$A = \frac{3\pi}{4}$$

$$\bar{x}(A) = \int x\, d_A = \int\frac{2r}{3}\cos\theta\frac{1}{2}r^2 d\theta$$

$$\bar{x}A = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)^3\cos\theta\, d\theta$$

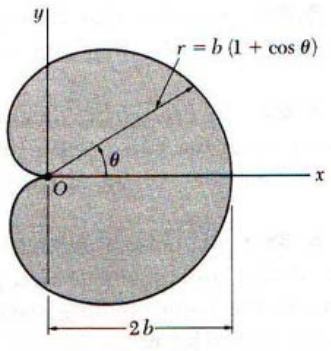
$$\bar{x}A = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}(1+\sin\theta)^4\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\bar{x}(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2}\left[(1+1)^4-(1-1)^4\right]$$

$$\bar{x} = \frac{16}{12}\times\frac{4}{3\pi} \qquad \bar{x} = 0.566\ cm$$

3-19 مرکز ثقل شکل زیر را بدست آورید معادله قطبی برابر با

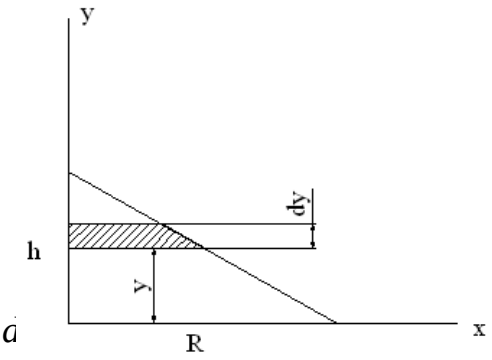
$r = b(1+\cos\theta)$



$$\bar{y}A=\frac{1}{3}b^3\left[\frac{-1}{4}(1+\cos\theta)^4\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{-1}{12}b^3[(1+1)^4-(1+1)^4]$$

$$\bar{y}=0$$

3-20 مرکز ثقل مخروط به ارتفاع h و شعاع قاعده R را بدست آورید.



$$dm=\rho\pi\ x^2dy$$

$$\frac{x}{R}=\frac{h-y}{h}$$

$$dm=\rho\ \pi(R^2)(1-\frac{y}{h})^2dy$$

$$m=\rho\pi\int_0^h R^2\left[1+\frac{y^2}{h^2}-2\frac{y}{h}\right)dy$$

$$m=\rho\pi\ R^2\left[y+\frac{y^3}{3h^2}-\frac{y^2}{h}\right]_0^h$$

$$m=\rho\pi\ R^2(h+\frac{h}{3}-h)=\rho\pi\ R^2\times\frac{h}{3}$$

$$dm_x=y\ dm=\rho\pi\ yx^2dy$$

$$m_x=\int_0^h\rho\pi\ (R^2)(1-\frac{y}{h})^2y$$

$$m_x=\rho\pi\ R^2\int_0^h(y+\frac{y^3}{h^2}-2\frac{y^2}{h})dy$$

$$m_x=\rho\pi\ R^2\left[\frac{1}{2}y^2+\frac{y^4}{4h^2}-\frac{3y^3}{3h}\right]_0^h$$

$$m_x=\rho\pi\ R^2\left[\frac{h^2}{2}+\frac{h^2}{4}-\frac{2}{3}h^2\right]$$

$$\bar{x}A=\frac{1}{3}b^3\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta+\cos^4\theta+3\cos^3\theta+3\cos^2\theta)d\theta$$

$$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

$$\cos^3\theta=\frac{(\cos3\theta+3\cos\theta)}{4}$$

$$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$\cos\theta+(\frac{1+\cos2\theta}{2})^2+\frac{3}{4}(\cos3\theta+3\cos\theta)+$$

$$(\frac{1+\cos2\theta}{2})^3$$

$$\cos\theta+\frac{1}{4}(1+\cos^2 2\theta+2\cos2\theta)+\frac{3}{4}\cos3\theta+$$

$$\frac{9}{4}\cos\theta+\frac{3}{2}+\frac{3\cos2\theta}{2}$$

$$\cos\theta+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos^2 2\theta+\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{3}{4}\cos^3\theta+$$

$$\frac{9}{4}\cos\theta+\frac{3}{2}+\frac{3\cos^2\theta}{2}$$

$$\cos\theta+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(\frac{\cos4\theta+1}{2})+\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{3}{4}\cos3\theta+$$

$$\frac{9}{4}\cos\theta+\frac{3}{2}+\frac{3\cos2\theta}{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\ n\ \theta=\left[\frac{\sin\ n\ \theta}{n}\right]_0^{\pi}=0$$

$$\bar{x}A=\frac{1}{3}b^3\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{2})d\theta(2)$$

$$\bar{x}A=\left[\frac{2+1+12}{8}\right]\pi=\frac{15}{8}\pi(\frac{1}{3}b^3)$$

$$2\bar{x}(\frac{3}{4}b^2\pi)=\frac{15}{8}\pi(\frac{1}{3}b^3)$$

$$x=\frac{5}{6}b$$

$$\bar{y}A=\int_{-\pi}^{\pi}x_{el}dA=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2r}{3}\sin\theta\frac{1}{2}r^2dA\ d\theta$$

$$\bar{y}A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{3}r^3\sin\theta\ d\theta=$$

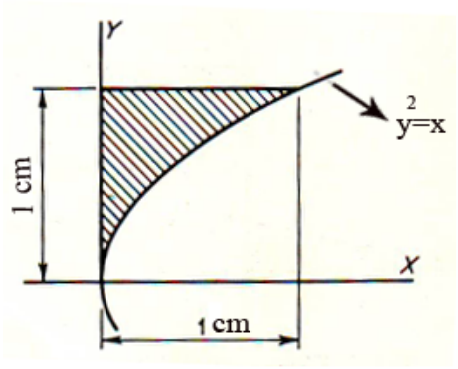
$$\frac{1}{3}b^3\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^3\sin\theta\ d\theta$$

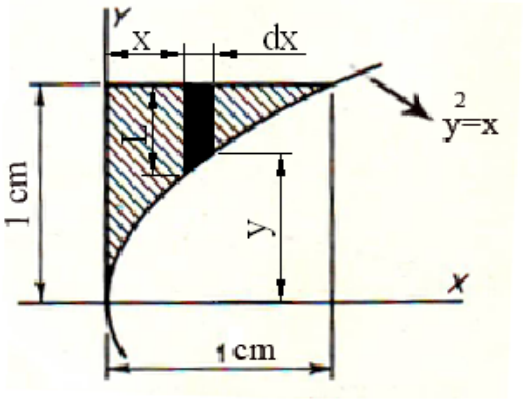
$$m_x = \frac{\rho\pi\ R^2}{1} \times \frac{h^2}{12} = \frac{\delta\pi\ h^2 R^2}{12}$$

$$y_c = \frac{m_x}{2} = \frac{\rho\pi\ h^2 R^2}{12} \times \frac{3}{\rho\pi\ R^2 h}$$

$$y_c = \frac{1}{4}h$$

3-22 مرکز ثقل جرم،حجم حاصل از شکل هاشورزده زیر را که حول محور $y=1$ دوران می کند را بدست آورید معادله منحنی برابر با $y^2 = x$ می باشد





$$dm = \rho d\forall = \rho\pi L^2 dx$$

$$L = 1 - y$$

$$dm = \rho\pi(1-y)^2 dx$$

$$m = \int_0^1 \rho\pi(1+y^2-2y)(2y\ dy)$$

$$m = 2\rho\pi\int_0^1 (y + y^3 - 2y^2)dy$$

$$m = 2\pi\rho\left[\frac{6+3-8}{12}\right] = \frac{\pi\delta}{6}$$

$$dmy = xdm = \rho\pi(1-y)^2\ \chi dx$$

$$dmy = \rho\pi(1+y^2-2y)(2y\ y^2)dx$$

$$my = 2\pi\rho\int_0^1 (y^3 + y^5 - 2y^4)dy$$

$$my = 2\pi\rho\left[\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{6}y^6 - \frac{2}{5}y^5\right]_0^1$$

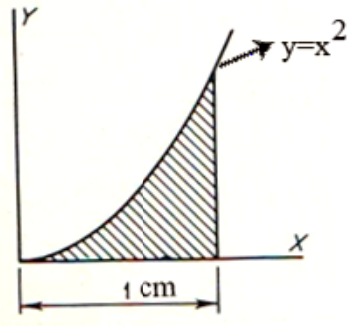
$$my = 2\pi\rho\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5}\right] = \frac{2\pi\rho}{60} = \frac{\rho\pi}{30}$$

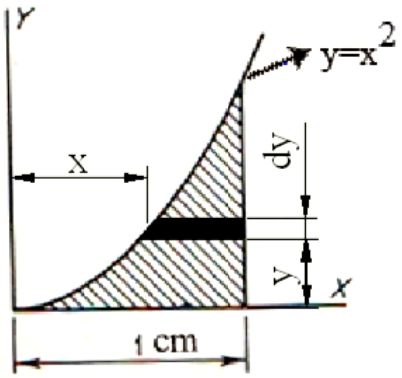
$$x_c = \frac{my}{m} = \rho \times \frac{6}{\pi\delta} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$y=1$ Symmetrical then $y_c = 1$

$x_c = 0.2$

3-24 مرکز ثقل جرم،حجم حاصل شکل هاشورزده زیر را که طول محور $x=1$ دوران می کند را بدست آورید و معادله منحنی برابر با $y = x^2$ می باشد، به شرط اینکه چگالی جرم متناسب با فاصله آن از صفحه xz در نظر گرفته شود.





$\rho = ky$

$dm = \rho d\forall = \rho\pi(1-x)^2 dy$

$dm = ky\pi(1-x)^2 dy$

$m = k\pi\int_0^1 y(1+x^2-2x)dy$

$m = k\pi\int_0^1 y(1+y-2\sqrt{y})dy$

$m = k\pi\int_0^1 (y+y^2-2y^{1.5})dy$

$m = k\pi(\frac{1}{30})$

$dm_x = ydm = \rho\pi y(1-x)^2 dy$

$dm_x = ky\pi\ y(1-x)^2 dy$

$dm_y = k\pi\ y^2\left[1+x^2\ -2x\right]dy$

$dm_y = k\pi\ y^2\left[1+y-2y^{\frac{1}{2}}\right]dy$

$m_x = k\pi\int_0^1 (y^{2.0}+y^3-2y^2)^{\frac{1}{2}}dy$

$m_y = k\pi\left[\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}-\frac{2}{3.5}y^{3.5}\right]_0^1$

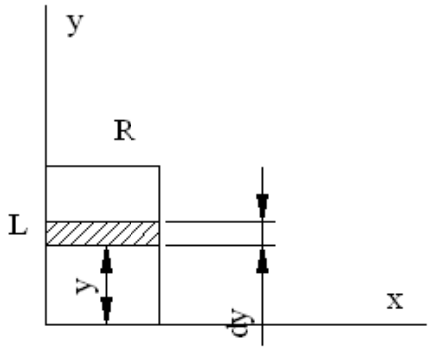
$m_x = k\pi\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{4}{7}\right]$

$m_x = k\pi\left[\frac{28+21-48}{84}\right] = k\pi\frac{1}{84}$

$\bar{y}_c = \frac{m_x}{m} = \frac{k\pi\frac{1}{84}}{k\pi\frac{1}{30}} = \frac{30}{84}$

$\bar{y}_c = 0.357$ $C.G(1,0.357)$ *Symmetrica l at* $x=1$ *axis*

3-26 چگالی یک میله دراز به طول L و قاعده ثابت به شعاع R با مجذور فاصله آن از انتهای آن است، مرکز ثقل این میله را بدست آورید .



$\rho = ky^2$

$dm = \alpha\rho d\forall = \rho\pi R^2 dy$

$dm = (ky^2)(\pi R^2)dy$

$m = \int_0^1 k\pi R^2 y^2 dy = k\pi R^2\left[\frac{1}{3}y^3\right]_o^L$

$m = \frac{k\pi R^2}{3}L^3$

$dm_x = ydm = ky^3\pi R^2 dy$

$m_x = \int_0^L k\pi R^2 y^3 dy$

$m_x = k\pi R^2\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^L$

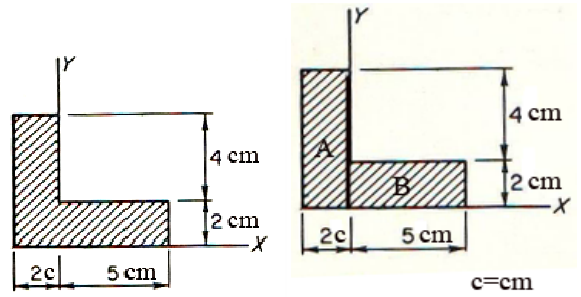
$m_x = \frac{k\pi R^2}{4}L^4$

$\bar{y}_c = \frac{m_x}{m} = \frac{k\pi R^2}{4}L^4 \times \frac{3}{k\pi R^2 L^3}$

$\bar{y}_c = \frac{3}{4}L$

$\bar{y}_c = 0.75L$

3-28 مرکز ثقل هاشورزده شکل زیررا بدست آورید.

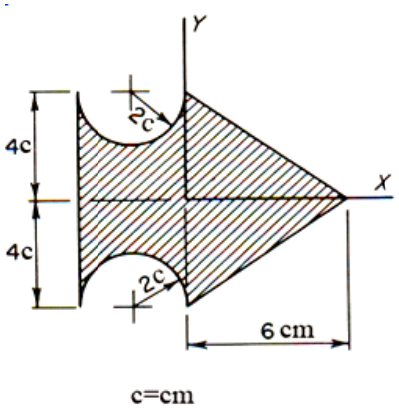


Shape	Area	$\bar{x}_c$	$A\bar{x}_c$	$\bar{y}_c$	$A\bar{y}_c$
A	12	-1	-12	3	36
	10	2.5	25	1	10
	22		13		46

$$\bar{x}_c = \frac{A\bar{x}_c}{A} = \frac{13}{22} = 0.59\ cm$$

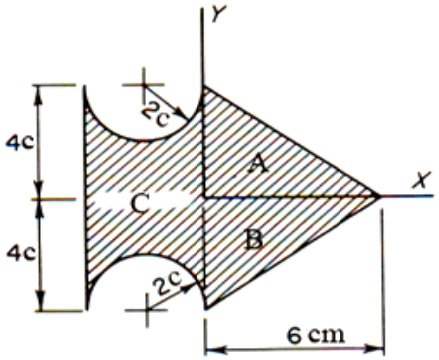
$$\bar{y}_c = \frac{A\bar{y}_c}{A} = \frac{46}{22} = 2.09\ \ cm$$

3-30 مرکز ثقل هاشورزده شکل زیررا بدست آورید.



c=cm

$$\frac{4R}{3\pi} = \frac{4\times 2}{3\pi} = 0.85$$



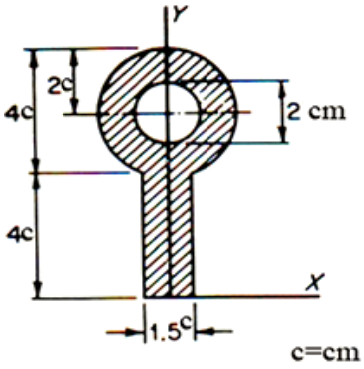
c=cm

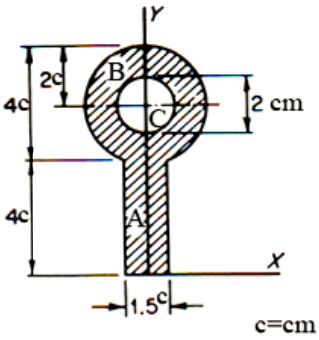
Shape	Area	$\bar{x}_c$	$A\bar{x}_c$	$\bar{y}_c$	$A\bar{y}_c$
A	12	2	24	$\frac{4}{3}$	16
B	12	2	24	$-\frac{4}{3}$	-16
C	32	-2	-64	0	0
D	$-\frac{\pi R^2}{2} = -628$	-2	012.566	3.15	-19.79
E	-6.283	-2	012.566	-3.15	019.79
Total	43.434		9.132		0

$$\bar{x}_c = \frac{A\bar{x}_c}{A} = \frac{9.132}{43.434} \qquad \bar{x}_c = 0.21\ cm$$

$$\bar{y}_c = 0$$

3-32 مرکز ثقل هاشورزده شکل زیررا بدست آورید.

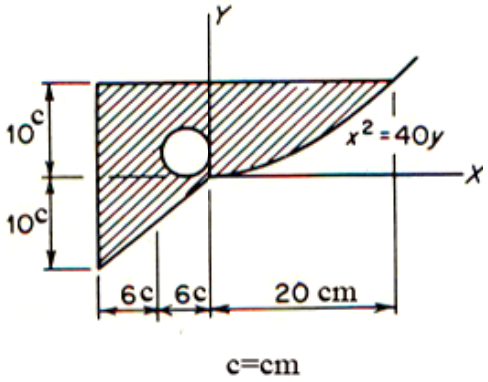


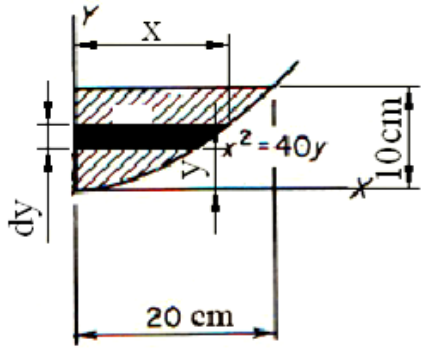


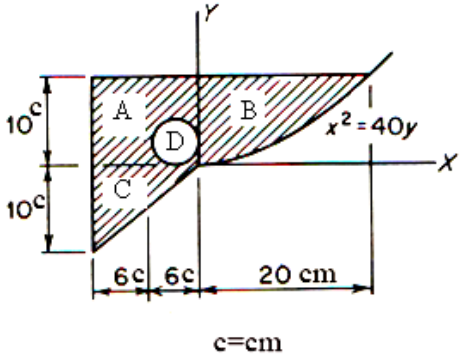
Shape	Area	$\bar{x}_c$	$A\bar{x}_c$	$\bar{y}_c$	$A\bar{y}_c$
A	6	0	0	2	12
B	12.566	0	0	6	75.396
C	-3.1415	0	0	6	-18.849
	+15.424				68.547

$$\bar{x}_c = 0 \qquad \bar{y}_c = \frac{68.547}{15.424} \qquad \bar{y}_c = 4.44 \ \ cm$$

3-38 مرکز ثقل هاشورزده شکل زیررا بدست آورید، در صورتیکه معادله منحنی برابر با $x^2 = 40y$ باشد







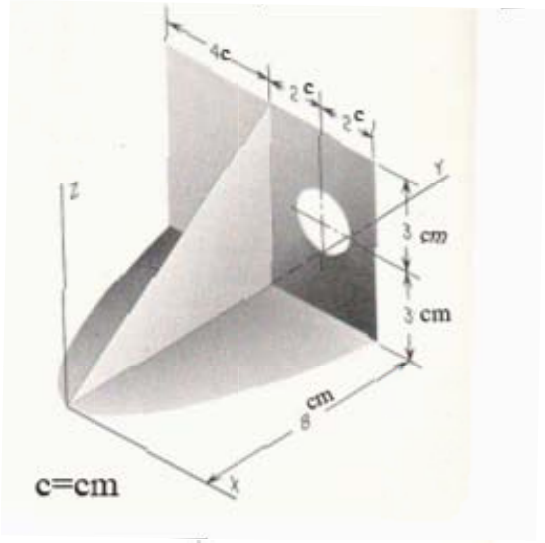
$$dA = xdy$$

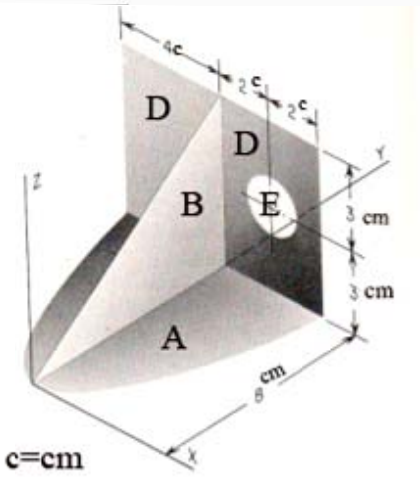
$$A = \int_0^{10} (40y)^{\frac{1}{2}} dy$$

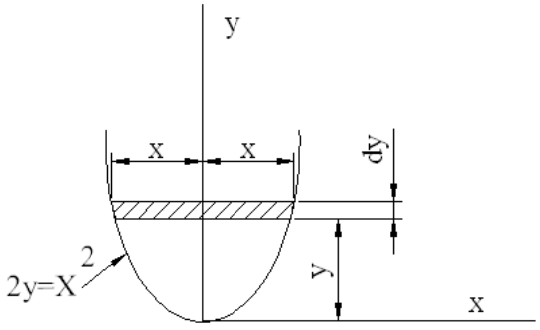
$$A = \sqrt{40}\int_0^{10} y^{\frac{1}{2}} dy$$

$$A = \sqrt{40}\left[\frac{y^{1.5}}{1.5}\right]_0^{10}$$

$$A = 133.33 \ \ cm^2$$







Shape	Area	$\bar{x}_c$	$A\bar{x}_c$	$\bar{y}_c$	$A\bar{y}_c$
A	120	-6	-720	5	600
B	133.33	6	800	7.5	1000
C	60	-8	-480	$-\frac{10}{3}$	-300
D	-28.27	-3	+84.81	3	-84.81
Total	285.06		-315.19		1215.19

$$m_x = yx\,dy = \int_0^{10} \sqrt{40}\,y^{1.5}dy$$

$$m_x = \sqrt{40}\left[\frac{y^{2.5}}{2.5}\right]_0^{10}$$

$$m_x = 800\ cm^3 \qquad \bar{x}_c = \frac{800}{133.33} = 6\ cm$$

$$m_y = (\frac{x}{2})dA = \frac{x}{2}\times dy = \frac{1}{2}x^2dy$$

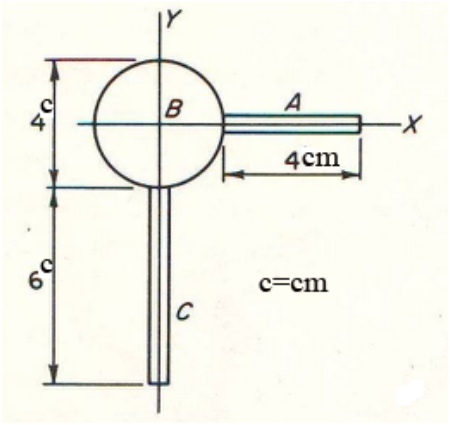
$$m_y = \frac{1}{2}\int_0^{10} 40y\ dy = 20\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{10} = 10[100] = 1000\ cm^3$$

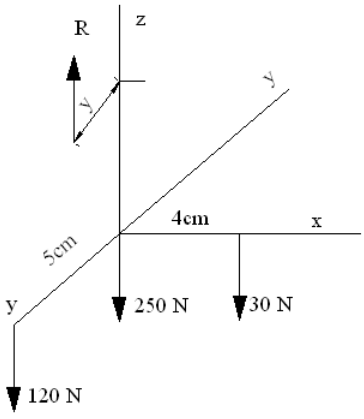
$$\bar{x}_c = \frac{A\bar{x}_c}{A} = \frac{-315.19}{285.06} = -1.1\ cm$$

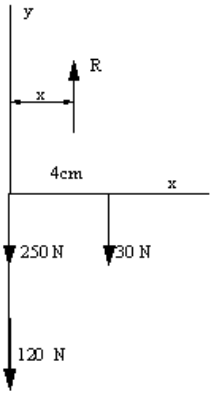
$$\bar{y}_c = \frac{1215.19}{285.06} = 1.26\ cm$$

3-42 یک صفحه نازک فلزی به وزن ۵ نیوتن بر سانتی متر مربع به شکل های مستطیل و مثلث و سهمی بریده می شود، در صفحه مستطیل شکل سوراخی به قطر ۲ اینچ ایجاد می گردد، مرکز ثقل این شکل بدست آمده را حساب کنید. در صورتیکه معادله سهمی برابر با $2y = x^2$ باشد.

3-44 سه جسم A و B و C به ترتیب ۳۰ و ۲۵۰ و ۱۲۰ نیوتن مطابق شکل زیر به هم وصل شده اند، اگر صفحه x , y صفحه قرینه باشد، مرکز ثقل جسم مرکب را بدست آورید.







$$dA = 2x\,dy$$

$$A = 2\int_0^8 (2y)^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$A = 2\int_0^8 \sqrt{2}\,y^{\frac{1}{2}}\,dy = 2\sqrt{2}\int_0^0 y^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$A = (2\sqrt{2})\left[\frac{y^{1.5}}{1.5}\right]_0^8 = 2\sqrt{2}\left[\frac{8^{1.5}}{1.5}\right] = 42.66 \ \ cm^2$$

Shape	A	$\bar{x}_c$	$A\bar{x}_c$	$\bar{y}_c$	$A\bar{y}_c$	$\bar{z}_c$	$A\bar{z}_c$
A	42.66	0	0	4.8	204.8	0	0
B	24	0	0	$\frac{16}{3}$	128	2	48
C	24	-2	-48	8	192	3	72
D	24	2	48	8	192	3	72
E	-3.14	2	-6.28	8	-25.12	3	-9.42
Total	111.52		-6.28		691.6		182.5

$$m_x = y\ dA = 2xy\ dy$$

$$m_x = \int_0^8 (2)(\sqrt{2})(y^{1.5})dy = 2\sqrt{2}\left[\frac{y^{2.5}}{2.5}\right]_0^8 = 204.8 \ \ cm^3$$

$$\bar{y}_C = \frac{204.8}{42.66} = 4.8 \ \ cm \qquad \bar{x}_c = 0$$

$$\bar{z} = 0$$

$$\bar{x}_c = \frac{A\bar{x}_c}{A} = \frac{-6.28}{111.52} = -0.0563 \ \ cm$$

$$\bar{y}_c = \frac{A\bar{y}_c}{A} = \frac{691.68}{111.52} = 6.2 \ cm$$

$$\bar{z}_c = \frac{A\bar{z}_c}{A} = \frac{182.58}{111.52} = 1.638 \ \ cm$$

$m_B = 250\ N$

$R = 30 + 250 + 120 = 400\ N$

$(400)(x) = (30)(4)$

$x = 0.3\ cm$

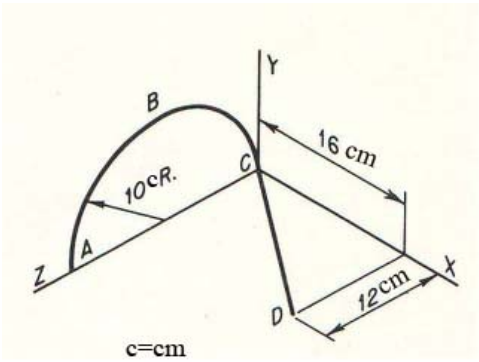
$+ (120)(5) + R(y) = 0$

$(120)(5) + 400(y) = 0$

$y = \dfrac{120 \times 5}{400} = -1.5\ cm$

$z = 0$

3-45 میله نازک با سطح مقطع ثابت به صورت شکل زیر خم گردیده است، قوس ABC در صفحه zy و میله مستقیم CD در صفحه zx قرار گرفته است، مطلوبست مرکز ثقل جسم مرکب را.



$y_c = \dfrac{2R}{\pi} = \dfrac{20}{\pi}$ $\qquad x_c = 0$ $\qquad G(8,0,6)$

$z = +R = +10''$

Shape	Length	x_c	$L\ x_c$	y_c	$L\ y_c$	z_c	$L\ z_c$
ABC	$2\pi R$ 62.83	0	0	$\dfrac{20}{\pi}$	400	+10	628.3
CD	20	8	160	0	0	6	120
	82.83		160		400		748.3

$L_B = \sqrt{16^2 + 12^2}$

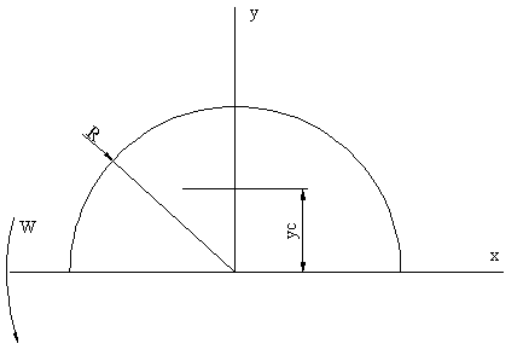
$L_B = \sqrt{256 + 144}$ $\qquad \bar{x}_c = \dfrac{160}{82.83} = 1.93\ cm$

$L_B = 20$

$\bar{y}_c = \dfrac{400}{82.83} = 4.83\ cm$

$\bar{z}_c = \dfrac{748.3}{82.83} = 9.03\ cm$

3-46 بوسیله قانون گلدن- پاپی یوس مرکز ثقل یک نیم قوس را بدست آورید



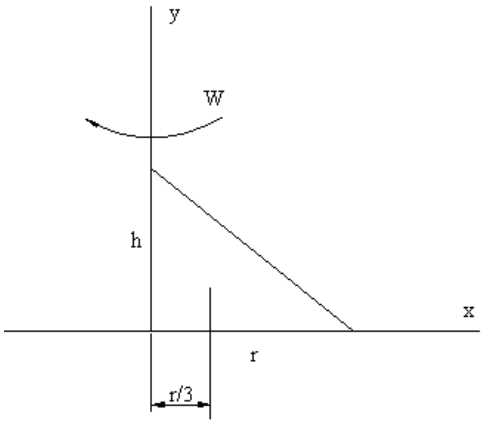
$s = L(2\pi\ \bar{y}_c)$

$s = 4\pi\ R^2$

$4\pi\ R^2 = \dfrac{2\pi R}{2}(2\pi\ \bar{y}_c)$

$\bar{y}_c = \dfrac{4\pi R^2}{\pi R \times 2\pi} = \dfrac{2R}{\pi}$

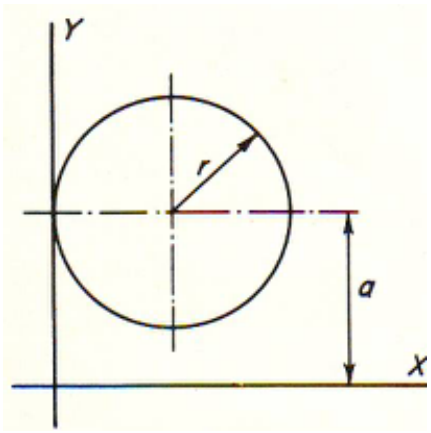
3-47 سطح جانبی مخروطی که ارتفاع آن h و شعاع قاعده آن r است را بوسیله قانون پاپی یوس بدست آورید.



$$s = (\sqrt{h^2 + r^2}\,(2\pi)(\frac{1}{3}r)$$

$$s = \frac{2}{3}\pi\sqrt{h^2r^2 + r^4} = \frac{2\pi r}{3}\sqrt{h^2 + r^2}$$

3-48 دایره ای به شعاع r مطابق شکل زیر حول محور x ها دوران می کند، بوسیله قانون پاپی یوس سطح جانبی این تیوب را بدست آورید.



$$s = L(2\pi\ \bar{y}_c)$$

$$\bar{y}_C = a$$

$$s = 2\pi r(2\pi a)$$

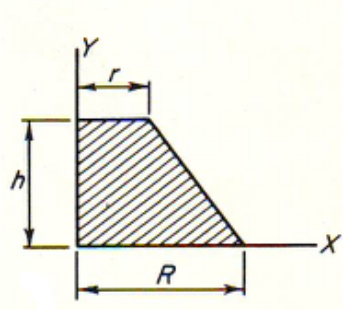
$$s = 4\pi^2 ra$$

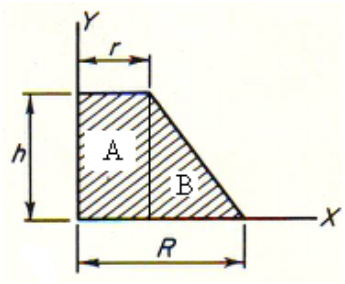
3-49 در مسئله 3-48 ، حجم بدست آمده این تیوب را بدست آورید

$$V = A(2\pi\ \bar{y}_c)$$

$$V = \pi r^2(2\pi)(a) = 4\pi^2 r^2 a$$

3-50 شکل هاشورزده زیر حول محور y ها دوران می کند، بوسیله قانون پاپی یوس حجم بدست آمده را حساب کنید





Shape	A	$\bar{x}_c$	$A\bar{x}_c$	$\bar{y}_c$	$A\bar{y}_c$
A	hr	$\frac{r}{2}$	$\frac{hr^2}{2}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{h^2r}{2}$
B	$\frac{h(R-r)}{2}$	$r+\frac{1}{3}(R-r)$		$\frac{1}{3}h$	

$$\bar{x}_c = \frac{A\bar{x}_c}{A} = \frac{\frac{hr^2}{2} + (\frac{h(R-r)}{2})(r + \frac{1}{3}(R-r)\Big]}{hr + \frac{hR}{2} - \frac{hr}{2}}$$

$$A = \frac{hr}{2} + \frac{hR}{2} = \frac{h}{2}(R+r)$$

$$A\bar{x}_c = \frac{hr^2}{2} + \left[\left[(\frac{hR}{2} - \frac{hr}{2})(r + \frac{1}{3}R - \frac{1}{3}r)\right]\right]$$

$$A\bar{x}_c = \frac{hr^2}{2} + (\frac{hR}{2} - \frac{hr}{2})(\frac{1}{3}R + \frac{2}{3}r)$$

$$A\bar{x}_c = \frac{hr^2}{2} + \frac{hR^2}{6} + \frac{hR^2}{6} + \frac{hRr}{6}$$

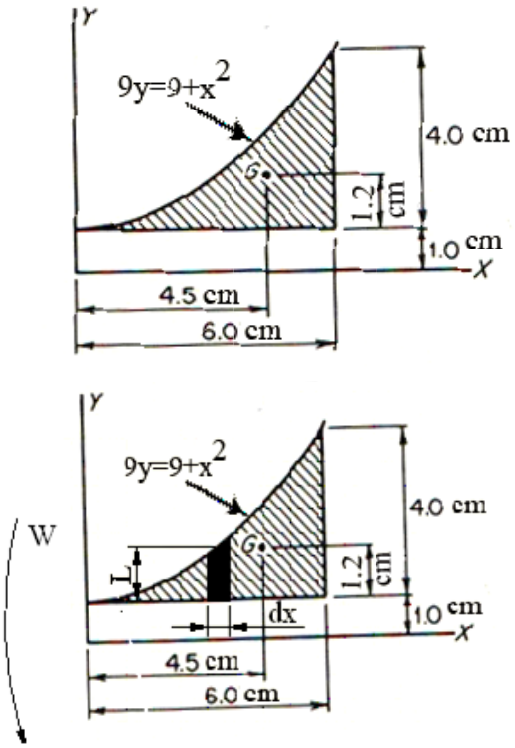
$$\bar{x}_c = \frac{\frac{h}{6}(r^2 + R^2 + Rr)}{\frac{h}{2}(R+r)} = \frac{1}{3}(\frac{r^2 + R^2 + Rr}{R+r})$$

$$V = (A)(2\pi\ \bar{y}_c)$$

$$V = \frac{h}{2}(R+r) \times 2\pi \times \frac{1}{3}(\frac{r^2 + R^2 + Rr}{R+r})$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + R^2 + Rr)$$

3-52 شکل هاشورزده زیر حول محور y ها دوران می کند،
بوسیله قانون پاپی یوس حجم بدست آمده را حساب کنید



$$A=\int_0^6(1+\frac{x^2}{9}-1)dx$$

$$A=\int_0^6\frac{x^2}{9}dx=\left[\frac{1}{9}x\frac{1}{3}x^3\right]_0^6$$

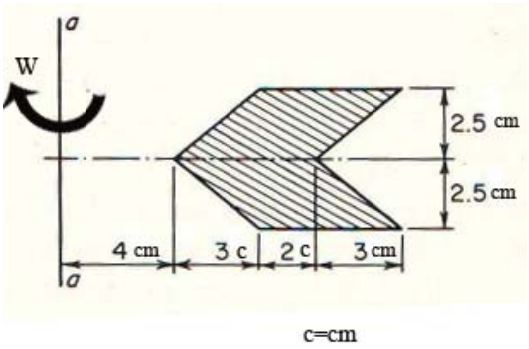
$$A=\frac{1}{27_3}\times 36^4\times \overset{2}{\cancel{6}}=8$$

$$V=(A)(2\pi)\bar{y}_c$$

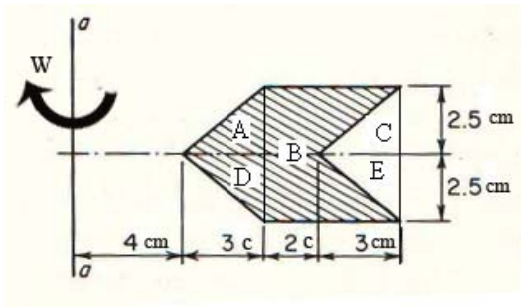
$$V=A(2\pi)\bar{y}_c$$

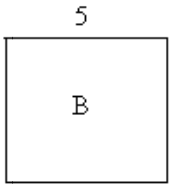
$$V=(8)(2\pi)(2.2)=110.6\quad cm^3$$

3-53 شکل هاشورزده زیر حول محور a-a ها دوران می کند،
بوسیله قانون پاپی یوس حجم بدست آمده را حساب کنید



c=cm





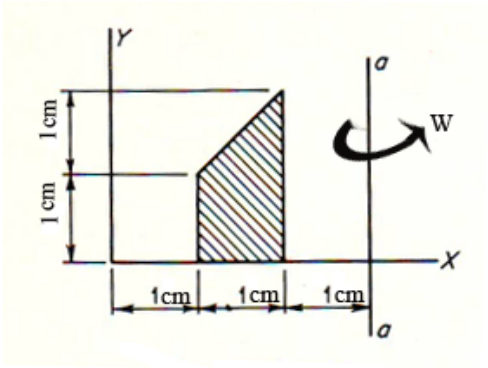
A+D+B-C_E

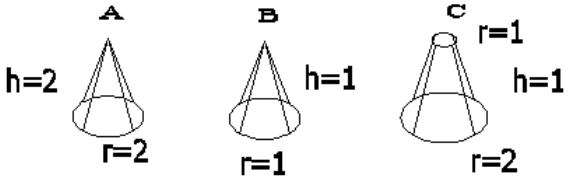
Shape	A	$\bar{x}_C$	$A\bar{x}_C$
A	3.75	2	7.5
B	25	5.5	137.5
C	-3.75	7	-26.25
D	3.75	2	7.5
E	-3.75	7	-26.25
	25		100

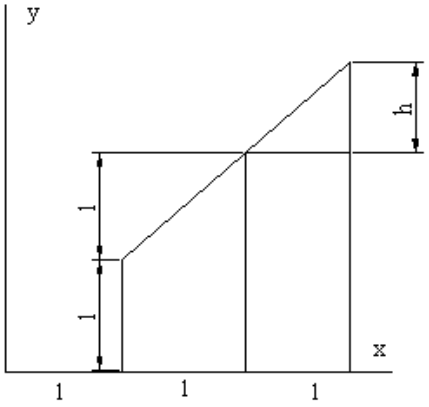
$$V=A(2\pi\ \bar{x}_a)\qquad \bar{x}_a=4+4=8$$

$$V=(25)(2\pi)(8)=1256.6\quad cm^3=400\pi\quad cm^3$$

3-54 شکل هاشورزده زیر حول محور aa دوران می کند، بوسیله قانون پاپی یوس حجم بدست آمده را حساب کنیـد. ثانیـاً مرکـز ثقل حجم بدست آمده را بدست آورید.







$$\frac{h}{1+h}=\frac{1}{2}$$

$$2h=h+1 \quad h=1$$

Shape	V	$\bar{y}_c$	$V\,\bar{y}_c$
A	$\frac{1}{3}\pi(2)(4)$	$\frac{2}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$
-B	$\frac{-\pi}{3}(1)(1)$	$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$	$\frac{-5\pi}{12}$
C	$\frac{8\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}=\frac{11\pi}{12}$

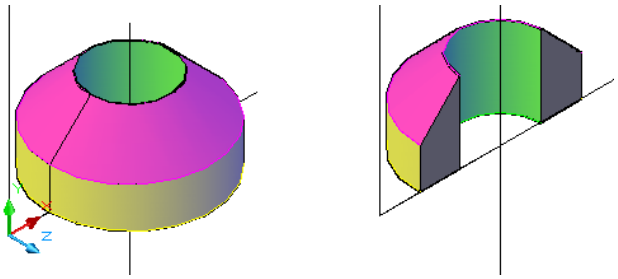
$$\bar{y}_c=\frac{\frac{11\pi}{12}}{\frac{7\pi}{3}}=0.3928\ \ cm$$

Shape	V	$\bar{y}_c$	$V\,\bar{y}_c$
C	$\frac{1}{3}\pi(7)$	1+0.3928	3.25π
D	4π	$\frac{1}{2}$	2π
-E	-2π	1	-2π
total	$\frac{7\pi}{3}+2\pi=4.33\pi$		3.25π

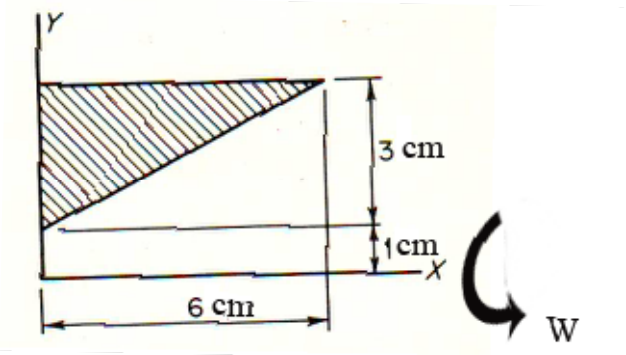
$$\bar{y}_c=\frac{3.25\pi}{4.33\pi}=0.75\ \ cm$$

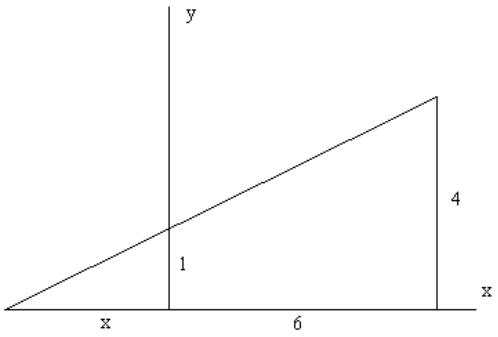
بوسیلهAutoCAD این حجم ترسیم شده و مرکز ثقل این حجم بدست آمده،که با محاسبه مطابقت می کند.

```
Mass:                   13.6136
Volume:                 13.6136
Bounding box:        X: 1.0000  --  5.0000
                     Y: 0.0000  --  2.0000
                     Z: -2.0000  --  2.0000
Centroid:            X: 3.0000
                     Y: 0.7500
                     Z: 0.0000
Moments of inertia:  X: 26.4417
                     Y: 154.2522
                     Z: 148.9639
Products of inertia: XY: 30.6305
                     YZ: 0.0000
                     ZX: 0.0000
Radii of gyration:   X: 1.3937
                     Y: 3.3661
                     Z: 3.3079
Principal moments and X-Y-Z directions about centroid:
```



3-55 شکل هاشورزده زیر حول محور x ها دوران می کند، بوسیله قانون پاپی یوس حجم بدست آمده را حساب کنید. ثانیاً مرکز ثقل حجم بدست آمده را بدست آوری‌د





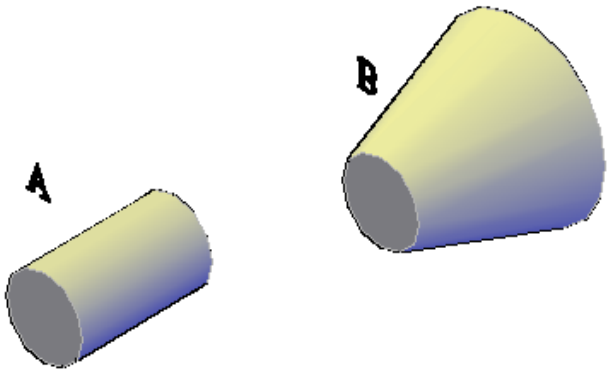
$A\,(cylinder) \Rightarrow R=4cm\,, h=6cm\,,$

$B \Rightarrow R_1=1cm\,, R_2=4cm\,, h=6cm$

$A-B=shape$

$B(truncated pyramid)=E(pyramid)-D(pyramid)$

$E \Rightarrow r_1=4cm, h=8cm,\quad D \Rightarrow r_1=1cm, h=1cm$



مرکز ثقل مخروط ناقص

Shape	V	$\bar{y}_c$	$V\,\bar{y}_c$
E	$\frac{1}{3}(16\pi(8))=\frac{128\pi}{3}$	$(6-\frac{h}{4})=6-\frac{8}{4}=4$	170.66π
-D	$-\frac{1}{3}(\pi)(1)(2)=-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{+\pi}{3}$
Total(B)	42π		171π

مرکز ثقل هرم ناقص

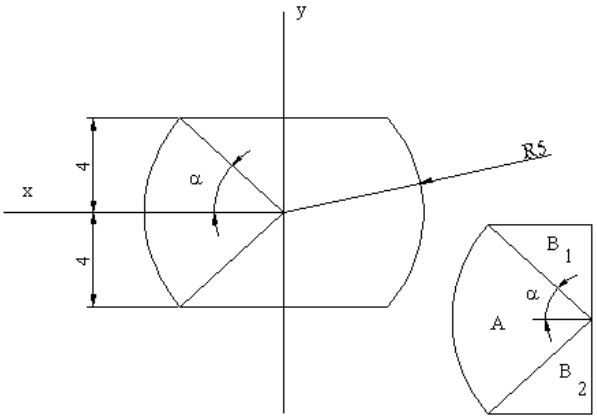
$$\overline{X_G}=\frac{171\pi}{42\pi}=4.07\ cm$$

Shape	V	$\bar{y}_c$	$V\,\bar{y}_c$
A	$\pi r^2 L = (6)(16)(\pi) = 96\pi$	$\frac{6}{2}$	288π
-B	$-\frac{1}{3}(\pi)(h)(r_1^{\,2} + r_2^{\,2} + r_1 r_2)$ $-\frac{1}{3}(6)(\pi)(16+1+4)$ $= -42\pi$	4.0	-170.94π
total	54π		170.06π

مرکز ثقل حجم بدست آمده از دوران

$$\overline{X_G} = \frac{170.06\pi}{54\pi} = 3.15\ cm$$

3-60یک کره چوبی به شعاع ۱۰سانتی متر از بالا و پایین به ارتفاع یک سانتی متر بریده شده است، مطلوبست وزن این شکل بدست آمده را به شرط اینکه چگالی چوب برابر با $\rho = 640\ Kg/m^3$ باشد.



$\alpha = 0.927^{Rad}$ $\rho = 640\ Kg/m^3$

$$sim\alpha = \frac{4}{5} \qquad \alpha = 53.13$$

$$\overline{X} = \frac{2rsim\alpha}{3\alpha} = \frac{2\times5\times0.8}{3\times0.927}$$

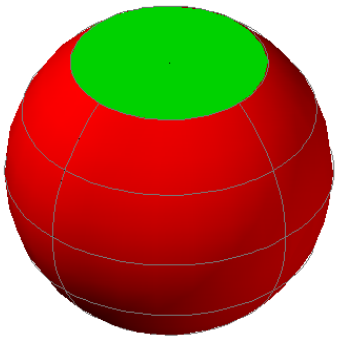
$$\overline{X} = 2.876$$

$$A = \alpha r^2 = \alpha(25) = 23.175$$

Shape	A	$\overline{X}$	$A\overline{X}$
A	۲۳,۱۷۵	۲,۸۷۶	۶۶,۶۵۱۳
B_1	۶	۱	۶
B_2	۶	۱	۶
ΣA	۳۵,۱۷۵		۷۸,۶۵۱۳

$$\overline{X} = \frac{78.6513}{35.175} = 2.236$$

بوسیله AutoCADحجم آن بدست آمده ومشاهده می کنید



حول محورy دوران می دهیم و طبق قانون پاپی یوس داریم

$$V = 2\pi\overline{X}A$$

$$V = 2\pi(2.236)(35.175) = 494.2\ \ cm^3$$

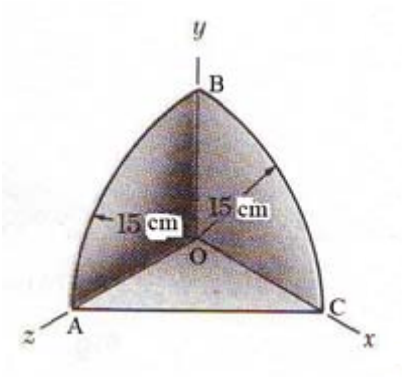
$$W = \rho\forall = (640\times494.2)/10^6$$

$$W = 0.3162\ \ Kg$$

$$W = 316.2\ \ gr$$

```
---------------    SOLIDS    ---------------

Mass:                    494.2772
Volume:                  494.2772
Bounding box:      X: 423.9304  --  433.9304
                   Y: -97.6545  --  -89.6545
                   Z: -5.0000   --   5.0000
Centroid:          X: 428.9304
                   Y: -93.6545
```

3-114 یک صفحه نازک به صورت سه بعدی مطابق شکل زیر تشکیل شده است، که صفحه AOC مثلث بوده و صفحه AOB و AOC بصورت $\frac{1}{4}$ دایره به شعاع ۱۵ سانتی متر می باشد، مطلوبست مرکز نقل این جسم را.



$$AC = \sqrt{15^2 + 15^2}$$

$$AC = 15\sqrt{2}$$

For AOB , BOC The Centeriod Are

$$\overline{X} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4\times 15}{3\pi} = 6.37$$

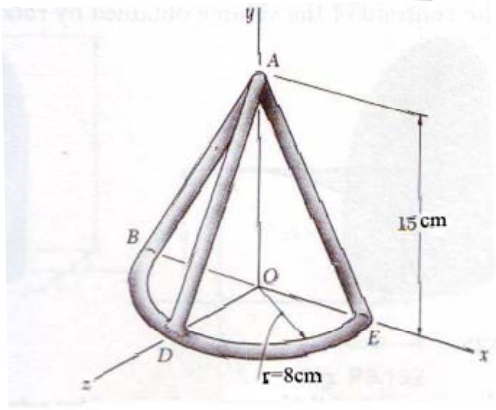
shape	A	$\overline{X}$	$A\overline{X}$	$\overline{Y}$	$A\overline{Y}$	$\overline{Z}$	$A\overline{Z}$
B	۱۷۶,۷	۶,۳۷	۱۱۲۵,۶	۶,۳۷	۱۱۲۵,۶	۰	۰
AOB	۱۷۶,۷	۰	۰	۶,۳۷	۱۱۲۵,۶	۶,۳۷	۱۱۲۵,۶
AOC	۱۱۲,۵	۵	۵۶۲,۵	۰	۰	۵	۵۶۲,۵
total	۴۶۵,۹		۱۶۸۸,۱		۲۲۵۱,۲		۱۶۸۸,۱

$$\overline{X} = \frac{1688.1}{465.9} = 3.62\ cm$$

$$\overline{y} = \frac{2251.2}{465.9} = 4.83\ cm$$

$$\overline{y} = \frac{1688.1}{465.9} = 3.62\ cm$$

3-116 مرکز ثقل شکل زیر را پیدا کنید، می دانیم سطح مقطع مفتول مسی شکل نامبرده ثابت می باشد.



Centriod For Arc BDE

$$\overline{Z} = \frac{2R}{\pi} = \frac{16}{\pi}$$

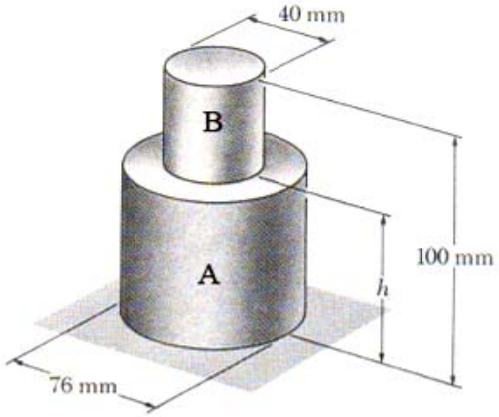
$$= 5.09\ Cm$$

Shape	L	$\overline{X}$	$L\overline{X}$	$\overline{Y}$	$L\overline{Y}$	$\overline{Z}$	$L\overline{Z}$
AE	۱۷	۴	۶۸	۷٫۵	۱۲۷٫۵	۰	۰
AB	۱۷	-۴	۶۸ −	۷٫۵	۱۲۷٫۵	۰	۰
AD	۱۷	۰	۰	۷٫۵	۱۲۷٫۵	۴	۶۸
BDE	۲۵٫۱۳	۰	۰	۰	۰	۵٫۰۹	۱۲۷٫۹۱
total	۷۶٫۱۳		۰		۳۸۲٫۵		۱۹۵٫۹۱۱

$$\overline{x} = 0$$

$$\overline{Y} = \frac{382.5}{76.13} = 5.03 \quad \overline{Z} = \frac{195.91}{76.13} = 2.57$$

3-118 استوانه برنجی به ارتفاع h=60mm مفروض است اگر استوانه آلومینیومی روی آن مطابق شکل زیر نصب شود، مطلوبست مرکز ثقل جسم مرکب را به شرط اینکه چگالی برنج $\rho = 8470 kg/m^3$ و چگالی آلومینیوم $\rho = 2800 kg/m^3$ باشد.



$$m_2 = \pi(38-20)60\times 8470 = 1666.75 \ \ Kg$$

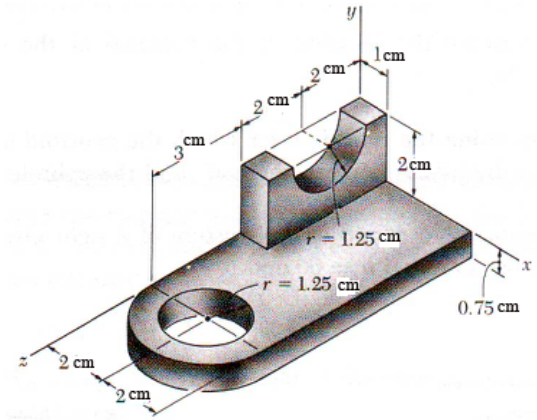
$$m_1 = 100\times\pi(20)\times 15\times 2800$$
$$A1: m_1 = 351.85 kg$$

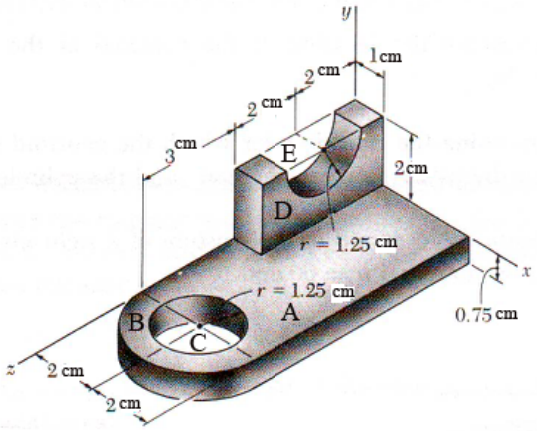
shape	M	$\overline{X}$	$M\overline{X}$	$\overline{Y}$	$M\overline{Y}$	Z	MZ
A	۳۵۱٫۸۵	۰	۰	۵	۱۷۵۹۲٫۵	۰	۰
B	۱۶۶۶٫۷۵	۰	۰	۳	۵۰۰۰۲٫۵	−	−
Total	۲۰۱۸٫۶				۶۷۵۹۵		

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma mv}{M}$$

$$\overline{Y} = \frac{67595}{2018.6} = 33.48 \ \ above \ \ base$$

3-108 مطلوبست مرکز ثقل شکل زیر.





$$V_A = 7\times 0.75\times 4 = 21$$

$$V_B = \frac{\pi}{2}(2)^2\times 0.75 = 4.71$$

$$V_C = \pi(1.25)^2\times 0.75 = 3.68$$

$$V_D = 2\times 1\times 4 = 8$$

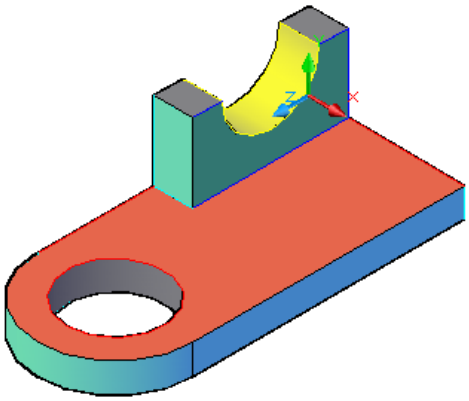
$$V_E = \frac{\pi}{2}(1.25)^2\times 1 = 2.45$$

Shape	volume	$\overline{X}$	$V\overline{x}$	$\overline{Y}$	$V\overline{y}$	$\overline{Z}$	$V\overline{z}$
A	۲۱	۲	۴۲	$\frac{0.75}{2}$	-۷,۸۸	۳,۵	۷۳,۵
B	۴,۷۱	۲	۹,۴۲	$\frac{0.75}{2}$	-۱,۷۷	۷,۸۵	۳۶,۹۷
C	-۳,۶۸	۲	-۷,۳۶	$\frac{0.75}{2}$	۱,۳۸	۷	-۲۵,۷۶
D	۸	۰,۵	۴	۱	۸	۲	۱۶
E	-۲,۴۵	۰,۵	-۱,۲۳	۱,۴۷	-۳,۶	۲	-۴,۹
Total	۲۷,۵۸		۴۶,۸۳		- ۳,۸۷		۹۵,۸۱

$$\overline{X} = \frac{\sum V\overline{X}}{\sum V} = \frac{46.83}{27.58} = 1.7\ cm$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum V\overline{Y}}{\sum V} = \frac{-3.87}{27.58} = -0.14\ cm$$

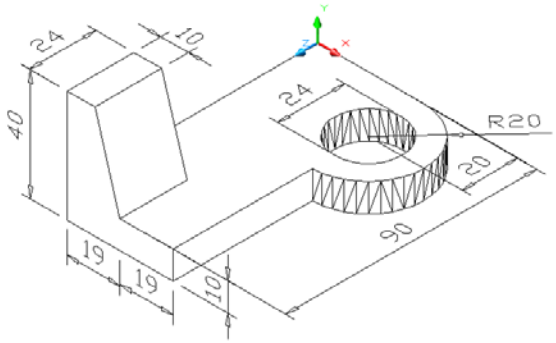
$$\overline{Z} = \frac{\sum V\overline{Z}}{\sum V} = \frac{95.81}{27.58} = 3.47\ cm$$



بوسیله AutoCADشکل بدست آمده با جواب مطابقت دارد

```
----------------    SOLIDS    -------

Mass:                    27.5765
Volume:                  27.5765
Bounding box:       X:  0.0000  --
                    Y: -0.7500  --
                    Z:  0.0000  --

Centroid:           X:  1.6983
                    Y: -0.1403
                    Z:  3.4742

Moments of inertia: X:  493.9060
                    Y:  605.9218
                    Z:  130.4768
```

3-110 مطلوبست مرکز ثقل شکل روبرو،تمام واحدها بر حسب میلی متر است.



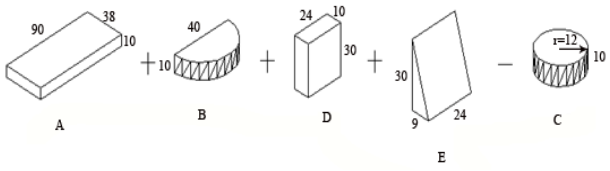
$$B \Rightarrow \quad X_G = 38 + \frac{4r}{3\pi} = 38 + \frac{4(20)}{3\pi} = 46.48 \ cm$$

$$E \ \Rightarrow X_G = 10 + \frac{9}{3} = 13 \ cm$$

$$E \Rightarrow Y_G = \frac{30}{3} = 10 \ cm$$

$$E \Rightarrow Z_G = 90 - 12 = 78$$

$$V_E = \frac{\pi}{2}(1.25)^2 \times 1 = 2.45$$



شکل ها	V حجم mm^3	X_G mm	$V^* X_G$ mm^4
A	34200	19	649800
B	6283	46.48	292033.8
C	-4523.8	38	-171904.4
D	7200	5	36000
E	3240	13	42120
Total	46399.2		840049.4

Y_G mm	$V^* Y_G$ mm^4	Z_G mm	$V^* Z_G$ mm^4
-5	-171000	45	1539000
-5	-31415	20	125660
-5	22619	20	-90476
15	108000	78	561600
10	32400	78	252720
	-39396		2388504

$$X_G = \frac{840049.4}{46399.2} = 18.2 \ \ mm$$

$$Y_G = \frac{-39396}{46399.2} = -0.85 \ \ mm$$

$$Z_G = \frac{2388504}{46399.2} = 51.5 \ mm$$

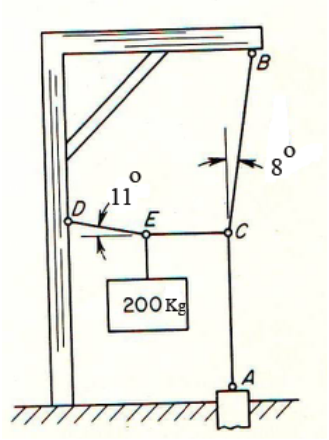
بوسیله AutoCADشکل بدست آمده با جواب مطابقت دارد

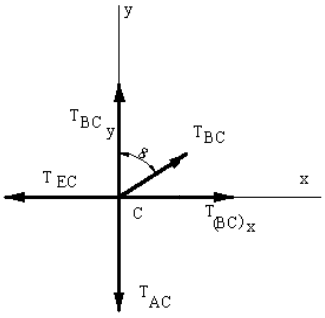
```
---------------    SOLIDS    -----------------
ss:                          46399.2919
lume:                        46399.2919
inding box:              X:  0.0000  --  58.0000
                         Y: -10.0000  --  30.0000
                         Z:  0.0000  --  90.0000
itroid:                  X:  18.2786
                         Y:  -0.8491
                         Z:  51.4772
ients of inertia:        X:  161371898.1848
                         Y:  181850936.3521
                         Z:  28168324.2930
oducts of inertia:       XY: -2913080.2859
                         YZ:  3080270.8114
                         ZX:  37738281.1437
lii of gyration:         X:  58.9737
                         Y:  62.6040
                         Z:  24.6391
```

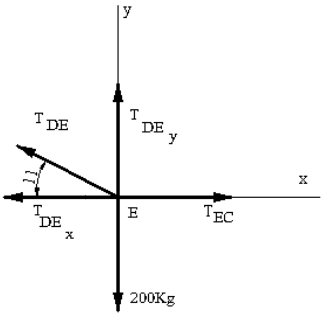
فصل ۴

تعادل اجسام صلب وقاب ها

4-12 در شکل زیر کشش در کابل AC را حساب کنید.







$$T_{EC} = T_{DE}\cos 11^\circ$$

$$\bar{Z}Fy = 0 \qquad T_{DE}\sin 11^\circ = 200$$

$$T_{EC} = \frac{200}{\sin 11^\circ} \times \cos 11 = (\cot 11^\circ)(200)$$

$$T_{EC} = T_{BC}\sin 8^\circ$$

$$T_{AC} = T_{BC}\cos 8^\circ$$

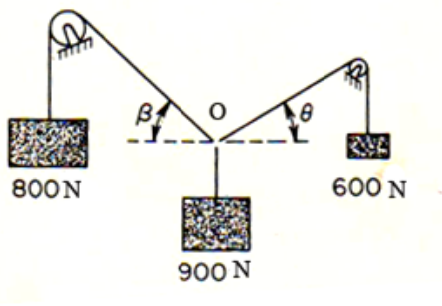
$$T_{BC} = \frac{(\cot 11^\circ)(200)}{\sin 8^\circ}$$

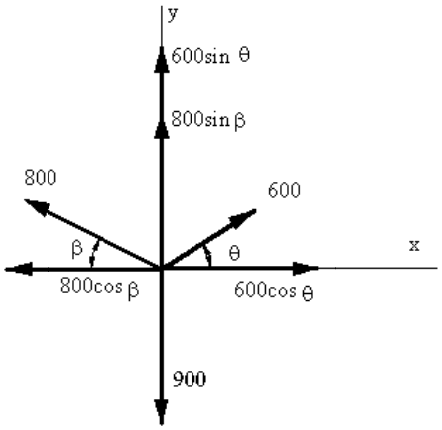
$$T_{AC} = \cot 11^\circ (200)(\cos 8^\circ / \sin 8^\circ)$$

$$T_{AC} = \frac{200}{\tan 11^\circ \tan 8^\circ \ x9.81}$$

$$T_{AC} = 746.3 \ N$$

4-18 سیستم شکل زیر به حالت تعادل قرار گرفته است، مطلوبست زاویه β و θ . قرقره ساده بوده و بدون اصطکاک است.





$$800\cos B = 600\cos\theta$$

$$\sum Fy = 0$$

$$600\sin\theta + 800\sin B = 900$$

$$\begin{cases} 6\sin\theta + 8\sin B = 9 \\ 8\cos B = 6\cos\theta \end{cases}$$

$$6\sin\theta = 9 - 8\sin B$$

$$36\sin^2\theta = 81 + 64\sin^2 B - 144\sin B$$

$$36(1-\cos^2\theta) = 81 + 64\sin^2 B - 144\sin B$$

$$36 - 36(\cos^2\theta) = 81 + 64\sin^2 B - 144\sin B$$

$$36 - 64\cos^2 B = 81 + 64\sin^2 B - 144\sin B$$

$$144\sin B = 81 - 36 + 64 = 109$$

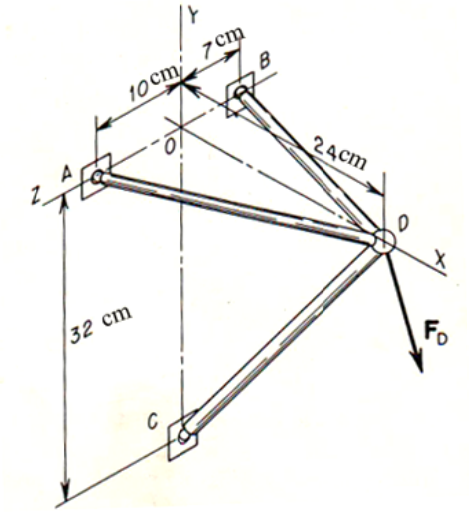
$$\sin B = 0.7569 \qquad B = 49.2^\circ$$

$$8\cos B = 6\cos\theta$$

$$6\cos\theta = 8\cos 49.2 = 5.2278$$

$$\cos\theta = 0.8713 \qquad \theta = 29.4^\circ$$

4-30 در شکل زیر بازوهای CD و BD و AD عضو صلب سیستم مذبور بوده و نقاط A و B و C ، کاسه و ساچمه می باشد، اگر در نقطه D نیرویی به صورت $F_D = 150i - 1200j - 600k$ وارد شود، کشش در بازوهای CD و AD را حساب کنید.



$F_D = 150i - 1200j - 600k$

CD, AD ?

$A(0,0,10) B(0,0,-7) C(0,-32,0) D(24,0,0)$

$D\vec{A}, D\vec{C}\ D\vec{B}$

$D\vec{A}, r_{DA} = -24i + 10k$

$F_1 = \frac{T_{DA}}{\sqrt{676}}(-24i + 10k)$

$F_1 = \frac{T_{AD}}{26}(-24i + 10k)$

$D\vec{C}, r_{D\vec{C}} = -24i - 32j$

$F_2 = \frac{T_{DC}}{\sqrt{1600}}(-24i - 32j) = \frac{T_{DC}}{40}(-24i - 35j)$

$D\vec{B}\ r_{DB} = -24i - 7k$

$F_3 = \frac{T_{DB}}{\sqrt{625}}(-24i - 7k) = \frac{T_{DB}}{25}(-24i - 7k)$

$$\begin{cases} \frac{-24}{26}T_{AD} - \frac{24}{40}T_{DC} - \frac{24}{25}T_{DB} + 150 = 0 \\ \frac{T_{DC}}{40}(-32) - 1200 = 0 \\ \frac{T_{AD}}{26}(10) - \frac{T_{DB}}{25}(7) - 600 = 0 \end{cases}$$

$T_{DC} = -1500\ N$

$T_{CD} = 1500(0.6i + 0.8j)$

$\frac{T_{DB}}{25} = \frac{-600}{7} + \frac{T_{AD}(10)}{7(26)}$

$-\frac{24}{26}T_{AD} - \frac{24}{40}(-1500) - 24\left[-\frac{600}{7} + \frac{T_{AD}(10)}{(26)(7)}\right]$

$= -150$

$-0.923\ T_{AD} + 900 + 2057.14 - 1.31868$

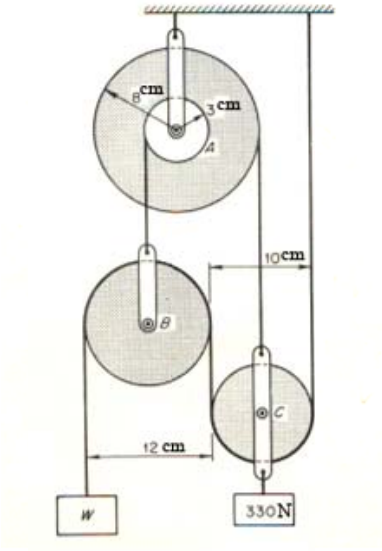
$T_{AD} = -150$

$2.24T_{AD} = 3107.14$

$T_{AD} = 1387\ \ N$

$\vec{T}_{AD} = 1387\,(-0.922i + 0.385k)\ \ N$

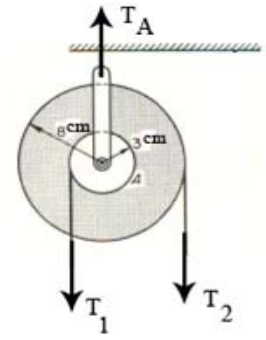
4-36 قرقره مرکب شکل زیر ، وزن ۳۳۰ نیوتن را بوسیله وزن W به حالت تعادل در می آورد. وزن w را حساب کنید.

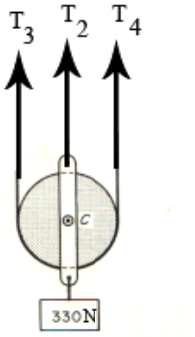


$T_1(3) = T_2(8)$

$T_A = T_1 + T_2 = T_2 + T_2\frac{8}{3}$

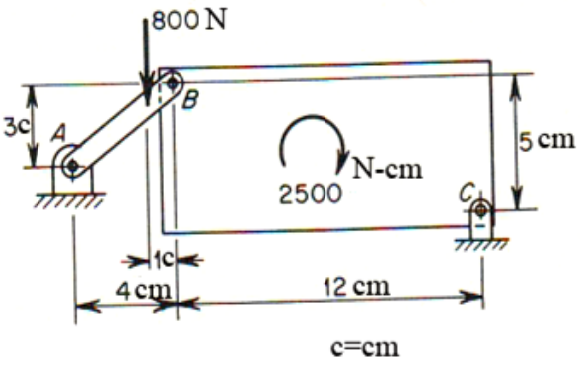
$$T_A = \frac{11}{3} T_2$$

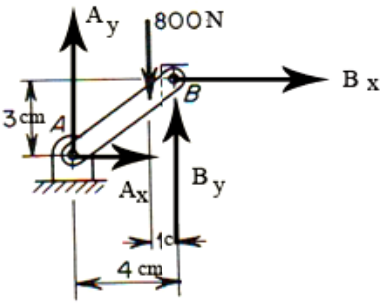


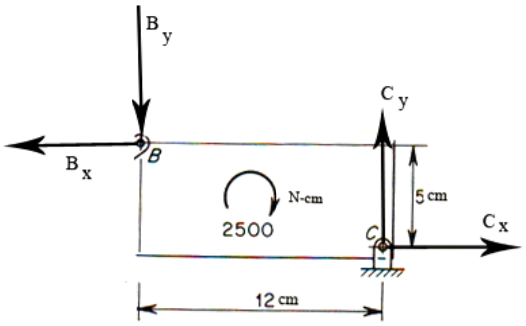


$$T_1 = w + T_3$$
$$T_3 = w$$
$$T_1 = 2w$$
$$T_2 + T_3 + T_4 = 330$$
$$T_4 = T_3$$
$$2T_3 + T_1 \frac{3}{8} = 330$$
$$16T_3 + 3T_1 = 8 \times 330$$
$$16T_3 + 6w = 8 \times 330$$
$$(16)w + 6w = 8 \times 330$$
$$22w = 8 \times 330$$
$$w = 120^{lb}$$

4-52 در شکل زیر مطلوبست عکس العمل نیروها در پین B از بازوی AB.





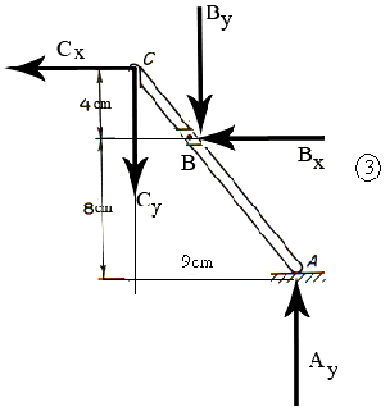


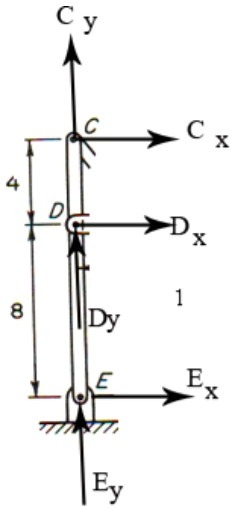
$$\sum MA = 0$$
$$(By)(4) - Bx(3) + 800(-3) = 0$$
$$MC = 0$$
$$(By)(12) + bx(5) - 2500 = 0$$

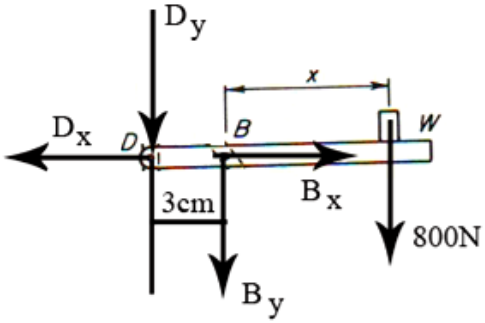
$$\begin{cases} 12By + 5Bx - 2500 = 0 & 14Bx = -4700 \\ -12By + 9Bx + 7200 = 0 & Bx = -336\ N \leftarrow \end{cases}$$

$$4By = +2400 - 1008$$
$$By = 348 \quad N \uparrow$$

4-54 در شکل زیر عکس العمل نیرو در پین B از ۳۰۰۰ نیوتن تجاوز نمی کند، اگر وزن W برابر با ۸۰۰ نیوتن باشد، مطلوبست محاسبه فاصله x. سطح تکیه گاه را Aصاف در نظر بگیرید







2

$$\frac{3}{EA}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\quad EA=9$$

$w=800\ N$

$F_B=3000\ N$

$\curvearrowleft^{-}\ \Rightarrow 1\quad \sum ME=0\quad -(Cx)(12)-(Dx)(8)=0$

$$Cx+Dx+Ex=0$$

$$Cy+Dy+Ey=0$$

$\curvearrowleft^{-}\quad \Rightarrow 3\quad MA=0$

$$(Cy)(9)+Cx(12)+By(6)+Bx(8)=0$$

$$-Cx-Bx=0$$

$$Ay-By-Cy=0$$

$$Cx=-Bx$$

$\curvearrowleft^{-}\quad \Rightarrow 2\quad M_D=0$

$$-800(x+3)+(By)(3)=0$$

$$Bx-Dx=0$$

$$-Dy+By-800=0$$

$$Dx=Bx$$

$$+12Bx-8Bx=0\quad \Rightarrow B_x=0$$

$F^2=F_{Bx}{}^2+F_{By}{}^2$ $\qquad F_{By}=By=3000$

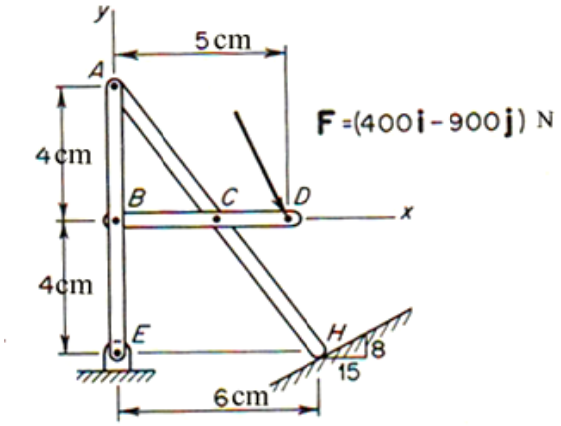
$F^2=B_y{}^2$

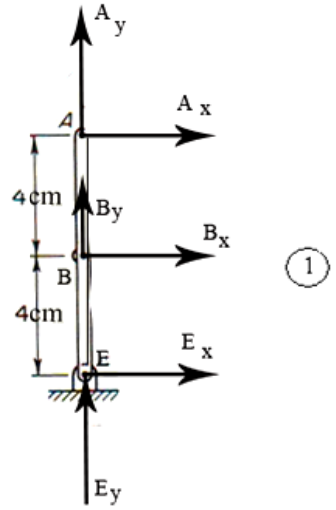
$$-800(x+3)=-3(3000)$$

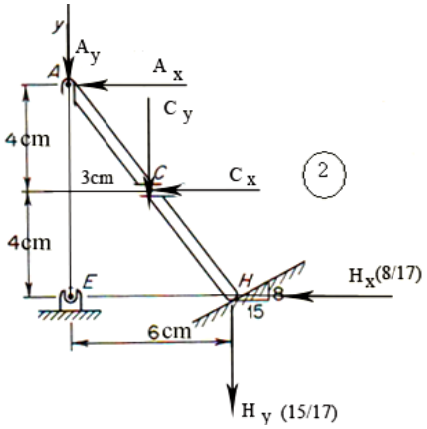
$x+3=11.25$

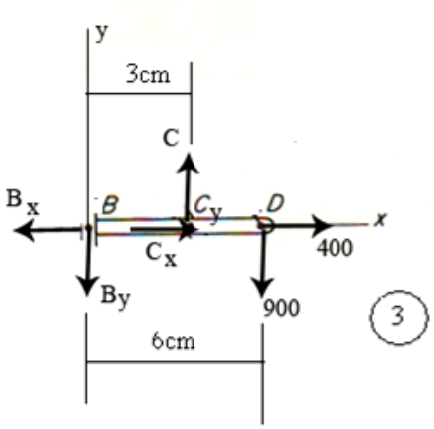
$x=8.25\ cm$

4-56 در شکل زیر مطلوبست محاسبه عکس العمـل نیروهـا در پین C از بازوی AH ، سطح شیب دار را صاف در نظر بگیرید.









$$\frac{BC}{6}=\frac{4}{8}$$

$$BC = 3cm$$

$$F_D = 400i - 900\,j$$

$$\curvearrowleft^{+} \sum ME = 0 \Rightarrow 1 \quad (Ax)(8) + Bx(4) = 0$$

$$Ax = \frac{-Bx}{2}$$

$$Ax + Bx + Ex = 0$$

$$Ay + By + Ey = 0$$

$$\curvearrowleft^{+} \sum MB = 0 \Rightarrow 3 \quad -(Cy)(3) + r \times F_D = 0$$

$$-3Cy + 5i \times (400i - 900\,j) = 0$$

$$-3Cy - 4500(-1) = 0$$

$$Cy = +1500 \;\; N$$

$$Cy - By - 900 = 0$$

$$Cx - Bx + 400 = 0$$

$$\curvearrowleft^{-} \; MA = 0 \;\Rightarrow 2$$

$$+ Ax(8) + (Ay)(6) + Cy(3) + Cx(4) = 0$$

$$-Ay - Cy + \frac{15}{17}Hy = 0$$

$$-\frac{8}{17}Hy - Cy - Ax = 0$$

$$Ax = -\frac{Bx}{2}$$

$$Cx = Bx - 400$$

$$Hy\frac{8}{17} = -Cx - Ax = -Bx + 400 + \frac{Bx}{2} = -\frac{1}{2}Bx + 400$$

$$\frac{15}{17}Hy = Ay + Cy = Ay + 1500$$

$$Ay = -1500 + \frac{15}{17}(-\frac{1}{2}Bx + 400)\frac{17}{8}$$

$$Ay = -1500 - \frac{15}{16}Bx + 750 = -750 - \frac{15}{16}Bx$$

$$8Ax + 6Ay + 3Cy + 4Cx = 0$$

$$-4Bx + 6(-750 - \frac{15}{16}Bx) + 3(+1500) + 4(Bx - 400) = 0$$

$$-4Bx - 4500 - 5.625Bx + 4500 + 4Bx - 1600 = 0$$

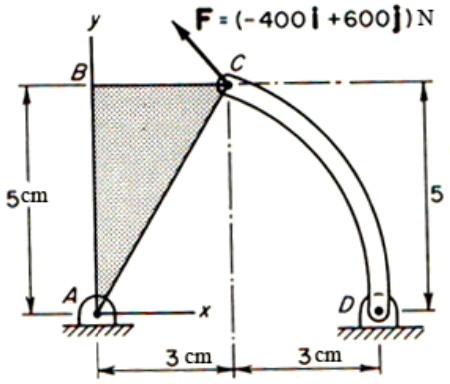
$$-5.625Bx = 1600$$

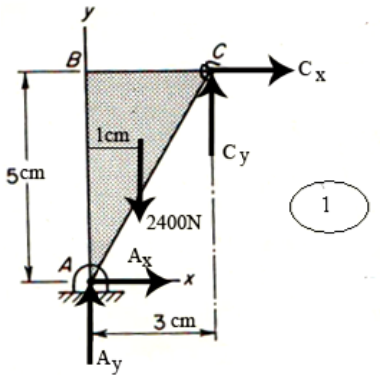
$$Bx = -284.4 \ \ N$$

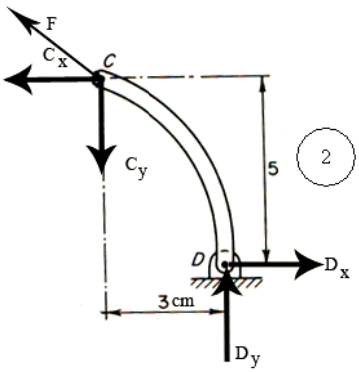
$$C_x = B_x - 400$$

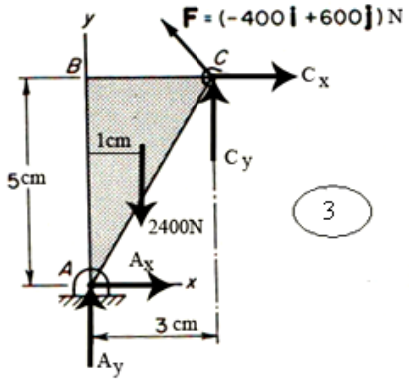
$$C_x = -684 \ \ N$$

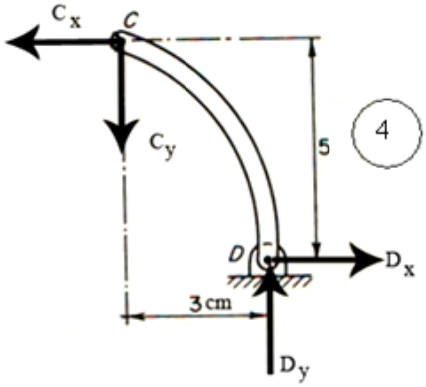
4-58 صفحه همگن ABC با ضخامت یکسان در شکل زیر بصورت عمودی قرا گرفته است، در نقطه C نیروی F مطابق شکل به آن وارد می شود اگر وزن صفحه ۲۴۰۰ نیوتن باشد، مطلوبست محاسبه عکس العمل نیروها در پین C را.











$$M_{plate} = 2400 \ \ N$$

$$F = -400i + 600\,j$$

$$C(3,5) \ , \ D(6,0)$$

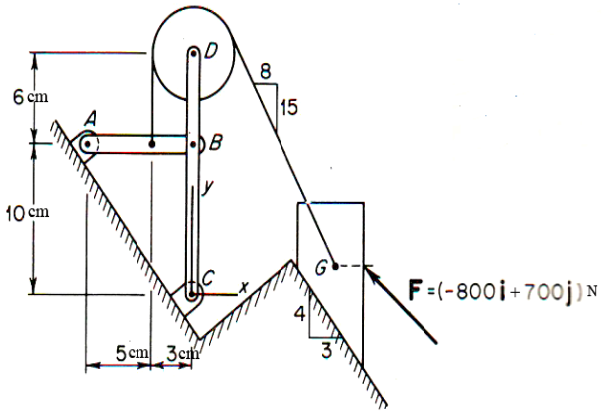
$$r_{DC} = -3i + 5j$$

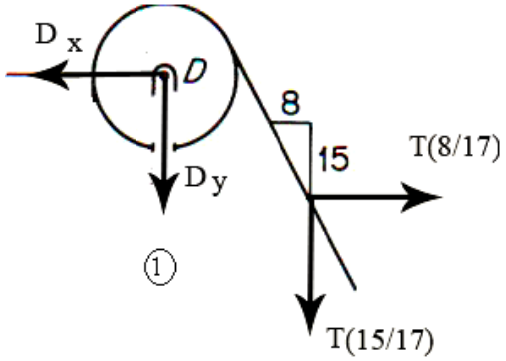
$$\curvearrowleft^{-} \ MA = 0 \ \Rightarrow 1$$

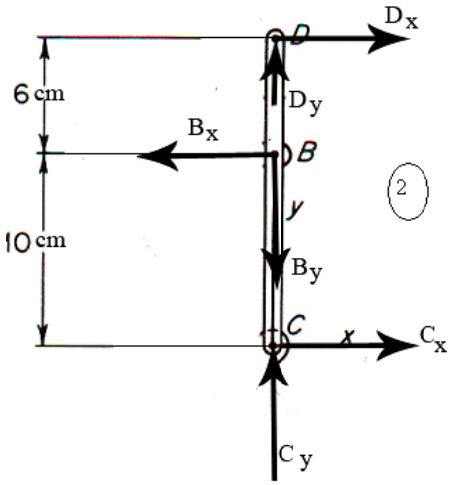
$$(3)(Cy) - 5(Cx) - 2400 = 0$$

$$\curvearrowleft^{-} \ M_D = 0 \ \Rightarrow 2$$

$$5Cx + 3Cy + (-3i + 5\,j) \times (-400i + 600\,j)$$







$$5Cx+3Cy-1800+2000=0$$

$$\begin{cases}5Cx+3Cy+200=0\\3Cy-5Cx-2400=0\end{cases}$$

$$6Cy=2200$$

$$5Cx=-200-1100$$

$$Cx=-260 \quad N\leftarrow$$

$$ON \quad Arm \quad ABC$$

$$Cy=367 \quad N\uparrow$$

$$r_{AC}=3i+5j$$

$$\curvearrowleft^{-} \quad MA=0 \Rightarrow 3$$

$$3Cy-5Cx-2400+(3i+5j)\times(-400i+600j)=0$$

$$3Cy-5Cx-2400+1800+2000=0$$

$$\curvearrowleft^{-} \Rightarrow 4\ M_D=0 \begin{cases}3Cy-5Cx+1400=0\\3Cy+5Cx=0\end{cases}$$

$$6Cy+1400=0$$

$$5Cx=-3Cy$$

$$5Cx=+700$$

$$Cy=-233 \ N\uparrow$$

$$ON \quad Arm \quad CD$$

$$Cx=140 \quad N\rightarrow$$

4-60 بلوک ۳۴۰۰ نیوتنی روی سطح شیب دار صاف مطابق شکل زیر قرار گرفته است اگر نیروی F برابر با $F=-800i+700j$ باشد، نیروی عکس العمل در پین B ، از بازوی AB را حساب کنید.

$$D_x = \frac{8}{17}\times 1700 = 800 \quad N$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow 1 \Rightarrow \quad -D_y - \frac{15T}{17} = 0$$

$$D_y = -(\frac{15}{17})(1700) = -1500 \quad N$$

$$\curvearrowleft^{+} \quad \Rightarrow 2 \quad \sum Mc = 0$$

$$(Dx)(16) - Bx(10) = 0$$

$$10Bx = 16(800)$$

$$Bx = 1280 \quad N \rightarrow$$

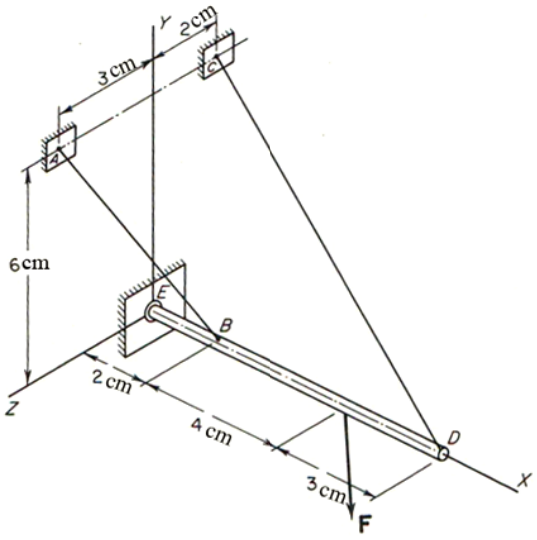
$$\curvearrowleft^{-} \quad \Rightarrow 3 \quad \Rightarrow \quad \sum MA = 0$$

$$T(5) + By(8) = 0$$

$$By = -\frac{5T}{8} = -\frac{5}{8}(1700)$$

$$By = -1062 \quad N \downarrow$$

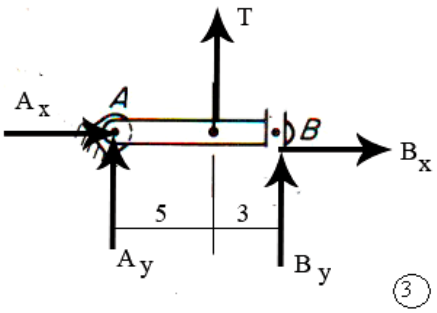
4-106 تیرک ED بوسیله یک کاسه و ساچمه E و دو کابل CD و AB نگهداری می شوند. اگر نیروی F برابر با $F = 300i - 1500j + 400k$ به تیرک ED وارد شود، مطلوبست کشش در کابل CD و AB و عکس العمل نیروها در کاسه و ساچمه E را

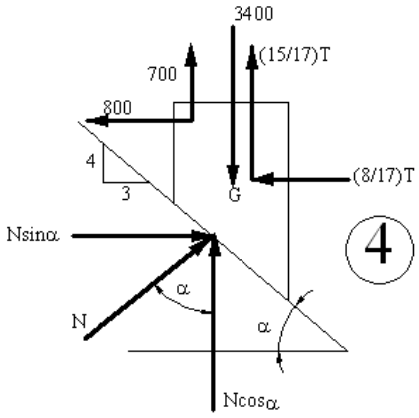


$$F = 300i - 1500j + 400k$$

$$AB, CD, Ex, Ey, Ez$$

$$A(0,6,3) \qquad C(0,6,-2)$$





$$F = -800i - 700j \qquad W = 3400 \quad N$$

$$\sum F_{x,y} = 0 \quad \Rightarrow 4 \quad \begin{cases} \frac{15}{17}T + \frac{3}{5}N - 3400 + 700 = 0 \\ \frac{4}{5}N - \frac{8T}{17} - 800 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N\cos\alpha = N\frac{3}{5} \\ N\sin\alpha = N\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\frac{4}{5}N = \frac{8T}{17} + 800$$

$$\frac{N}{5} = \frac{2T}{17} + 200$$

$$\frac{15}{17}T + \frac{6T}{17} + 600 - 2700 = 0$$

$$\frac{21T}{17} = 2100 \qquad T = 1700 \quad N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 1 \qquad \Rightarrow -D_x + \frac{8}{17}T = 0$$

$B(2,0,0)$ $D(9,0,0)$

$\vec{AB}$ $r_{AB} = 2i - 6j - 3k$

$$F_1 = \frac{F_{AB}}{\sqrt{49}}(2i - 6j - 3k)$$

$\vec{CD}$ $r_{CD} = 9i - 6j + 2k$

$$F_2 = \frac{F_{CD}}{\sqrt{121}}(9i - 6j + 2k)$$

$$\sum M_E = 0 = r_2 \times F_2 + r_1 \times F_1 + r \times F$$

$$0 = 9i \times \frac{F_{CD}}{11}(9i - 6j + 2k) + 2i \times \frac{F_{AB}}{7}(2i - 6j - 5k)$$

$$6i \times (300i - 1500j + 400k)$$

$$9 \times \frac{F_{CD}}{11}(-6)(k) + 9 \times F_{CD} \times 2(-j) + 2 \times \frac{F_{AB}}{7}(-6)(k)$$

$$+ 2 \times \frac{F_{AB}}{7}(-3)(-j) + 6(-1500)k + 6(400)(-y) = 0$$

$$(-4.9F_{CD} - 1.714F_{AB} - 900)k$$
$$+ (-1.636F_{CD} + 0.857F_{AB} - 2400)j = 0$$

$$2.995\begin{cases} 4.9F_{CD} + 1.714F_{AB} = -9000 \\ 0.857F_{AB} - 1.636F_{CD} = 2400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4.9F_{CD} + 1.714F_{AB} = -9000 \\ 2.5F_{AB} - 4.9F_{CD} = 7188 \end{cases}$$

$$4.28F_{AB} = -1812$$

$$F_{AB} = -423.3 \quad N$$

$$F_{AB} = +423.3(-0.285i + 0.857j + 0.429k)$$

$$4.9F_{CD} = -9000 - 1.714(-423.3)$$

$$4.9F_{CD} = -9000 + 725.53 = -8274.46$$

$$F_{CD} = -1688.6 \quad N$$

$$F_{CD} = 1688.6(-0.818i + 0.545j - 0.182k)$$

$$\sum Fx = 0$$

$$Ex + (1688.6)(-0.818) - 423.3(-0.285) + 300 = 0$$

$$Ex = +1200\,i \quad N$$

$$\sum Fy = 0$$

$$Ey + 1688.6(0.545) + 423.3(0.857) - 1500 = 0$$

$$Ey + 920.3 + 362.7 - 1500$$

$$Ey = 217\,j \quad N$$

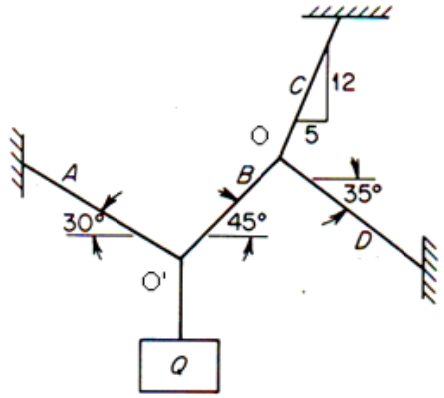
$$\sum Fz = 0$$

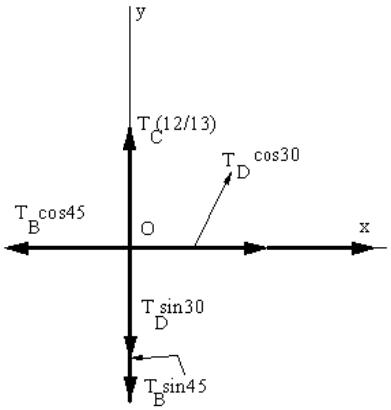
$$Ez - 1688.6(0.182) + 423.3(0.429) + 400 = 0$$

$$Ez - 307.3 + 181.6 + 400 = 0$$

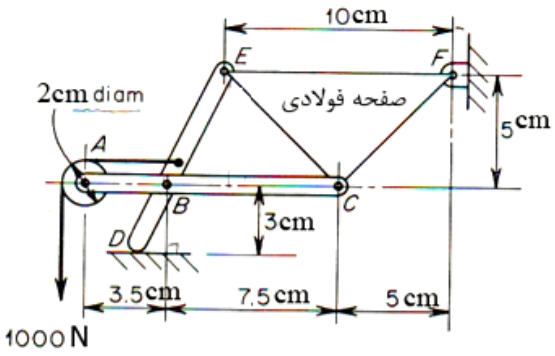
$$Ez = -274k$$

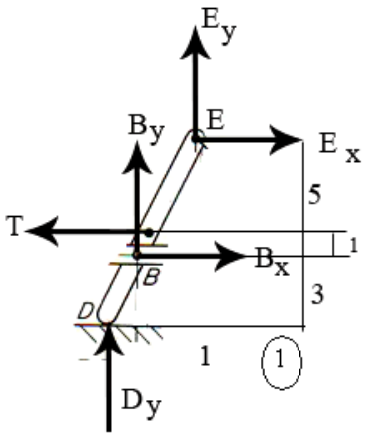
4-122 وزنه Q برابر ۵۰۰ نیوتنی بوسیله چهار کابل D و C و B و A مطابق شکل به حالت تعادل قرار گرفته است، کشش کابل D را محاسبه کنید.

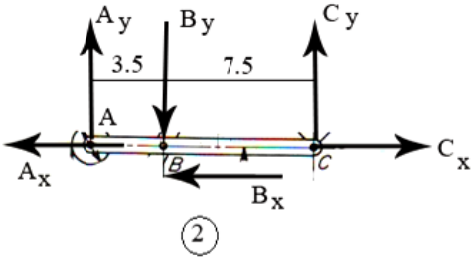


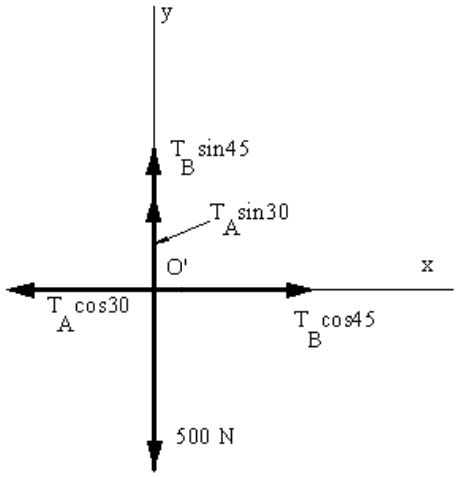


4-124 صفحه صلب EFC و بازوی DE روی سطح صاف مطابق شکل زیر قرار گرفته است، عکس العمل نیروها در پین B را محاسبه کنید.









$Q = 500 \ \ N$

$T_D = ?$

$$\frac{12 \ \ Tc}{13} = T_D \sin 30 + T_B \sin 45$$

$$T_B \cos 45 = T_D \cos 30 + \frac{5}{13} T_C$$

$$T_B \cos 45 = T_A \cos 30$$

$$T_B \sin 45 + T_A \sin 30 = 500$$

$$T_A \frac{\cos 30}{\cos 45} \times \sin 45 + T_A \sin 30 = 500$$

$$0.866 T_A + 0.5 T_A = 500 \qquad T_A = 366$$

$$T_B = 366 \times \frac{\cos 30}{\cos 45} = 448.3$$

$$T_C = \frac{3}{12} \sin 30 T_D + 448.3 \sin 45 \times \frac{13}{12}$$

$$T_C = 0.541 T_D + 343.4$$

$$T_C = -T_D \cos 30 \times \frac{13}{15} + 448.3 \cos 45 \times \frac{13}{5}$$

$$T_C = -2.251 T_D + 824.2$$

$$0.514 T_D + 343.4 = -2.251 T_D + 824.2$$

$$2.792 T_D = 480.8$$

$$T_D = 172.6 \ \ N$$

$$Ey(DM+BH)+Ex(5+3)+By(DM)+Bx(BM)-T(4)$$

$$Ey(-4)+Ex(8)+By(-1.5)+Bx(3)-T(4)=0$$

$$Dy+By+Ey=0$$

$$\curvearrowleft^{+}\ 2\Rightarrow\ \sum M_C=0$$

$$+11(Ay)-7.5(By)=0$$

$$Ay-By+Cy=0$$

$$Ax-Bx+Cx=0$$

$$\curvearrowleft^{+}\ 3\Rightarrow\sum M_F=0$$

$$-(Ey)(10)-Cy(5)+Cx(5)=0$$

$$-Ey-Cy+Fy=0$$

$$-Ex-Fx-Cx=0$$

$$\begin{cases}-4Ey+8Ex-1.5By+3Bx=4000\\ Dy+By+Ey=0\\ Bx+Ex=1000 \qquad 11(-1000)=7.5By\\ Bx+Ex=1000\\ 11Ay=7.5By \qquad [By=-1467\ N]\ Ans.\\ Ay-By+Cy=0\\ Ax-Bx+Cx=0 \qquad -1000+1467+Cy=0\\ -10Ey-5Cy+5Cx=0 \qquad Cy=-467\\ Ey+Cy=Fy\\ Ex+Fx+Cx=0\end{cases}\quad 9Eq\ \&\ 9Unk.$$

$$Bx+Ex+Ax-Bx+Cx=1000$$

$$Ex+Cx=0$$

$$Bx=Ax+Cx$$

$$Fx+Ex+Cx=0 \qquad Fx=0$$

$$Bx=1000-Ex$$

$$-4Ey+8Ex-1.5(-1467)+3(1000-Ex)=4000$$

$$Bx=1000+38$$

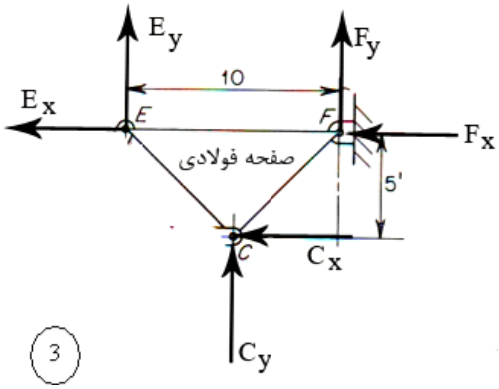
$$\begin{cases}-4Ey+5Ex=4000-3000-2200=-1200\\ -10Ey-5Ex=+5(-467)=-2334\end{cases}$$

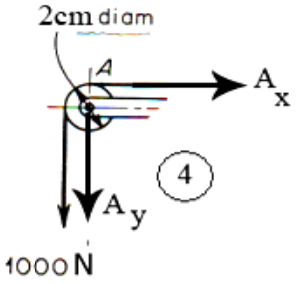
$$[Bx=1038\ N]\ Ans.$$

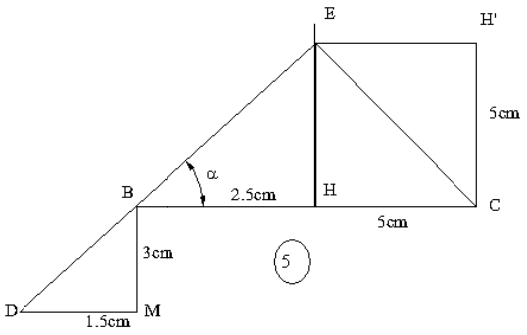
$$5Ex=-1200+4(252.42)$$

$$5Ex=-1200+1010$$

$$Ex=-38\ \ N$$







$$4\ \Rightarrow T=1000 \qquad -Ax+T=0 \qquad Ax=1000$$

$$Ay+1000=0 \quad Ay=-1000$$

$$5\Rightarrow\ \overline{EC}^{2}=25+25$$

$$EC=7.07$$

$$\overline{HC}^{2}=50-25=25 \qquad HC=5$$

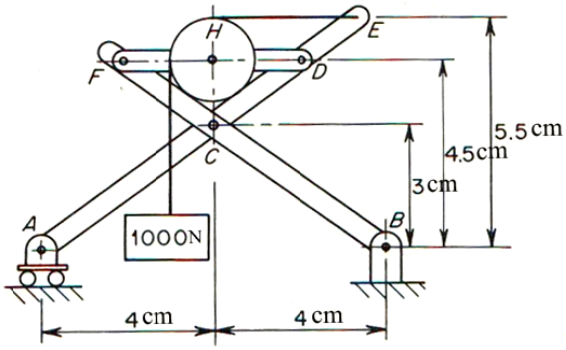
$$\tan\alpha=\frac{5}{2.5}=2$$

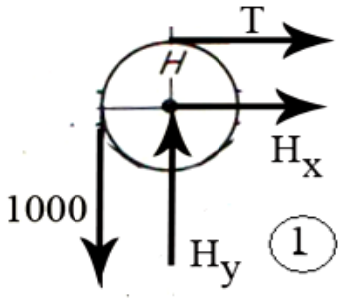
$$\tan\alpha=\frac{3}{DM}=2$$

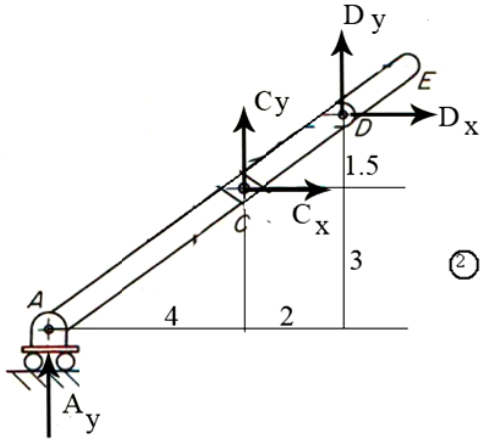
$$DM=1.5$$

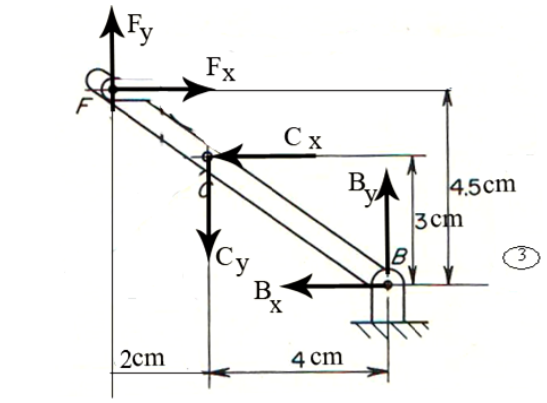
$$\curvearrowleft^{+}\ 1,\ 5\Rightarrow\ \sum M_D=0$$

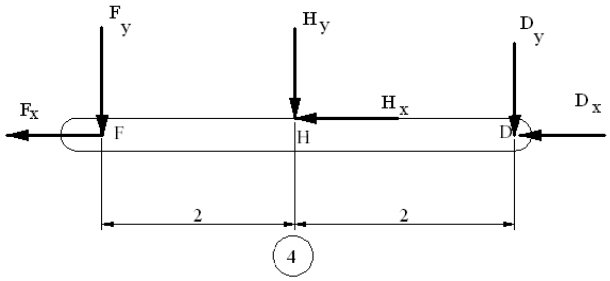
4-126 قرقره H روی بازوی FD پرچ شده است، این قرقره بوسیله کابلی به نقطه E متصل گردیده بدون اینکه به جدار قاب مماس شود، وزنه ۱۰۰۰ نیوتنی را نگهداری می کند. مطلوبست عکس العمل نیروها در پین C از بازوی AE را از وزن همه بازوهای قاب صرف نظر می شود.

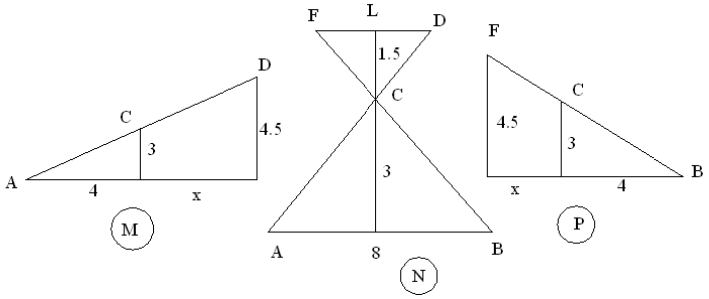












$$1 \Rightarrow \curvearrowleft^{+} \sum M_H = 0$$

$$(T)(R) - 1000(R) = 0$$

$$M \quad \Rightarrow \frac{3}{4.5} = \frac{4}{x+4} \quad x = 2 \ \ cm$$

$$T = 1000 \ \ N \rightarrow$$

$$N \Rightarrow \frac{L}{8} = \frac{1.5}{3} \quad L = 4 \ \ cm$$

$$\uparrow^{+} \sum Fx = 0 \quad T + Hx = 0$$

$$Hx = -1000 \ \ N$$

$$P \ \Rightarrow \frac{4}{x+4} = \frac{3}{4.5} \quad x = 2$$

$$\uparrow^{+} \sum Fy = 0 \quad Hy - 1000 = 0 \ \ Hy = 1000 \ \ N$$

$$2 \Rightarrow \curvearrowleft^{+} \ \sum M_A = 0$$

$$(Cy)(-4)+Cx(3)+Dy(-6)+Dx(4.5)-T(5.5)=0$$

$$\sum Fx=0 \qquad Cx+Dx-T=0$$

$$\sum Fy=0 \qquad Ay+Cy+Dy=0$$

$$3 \Rightarrow \curvearrowleft^{+}\sum M_B=0$$

$$(Fy)(6)+Fx(4.5)-Cx(3)-Cy(4)=0$$

$$Fy+By-Cy=0$$

$$-Fy-Hy-Dy=0$$

$$-Dx-Hx-Fx=0$$

$$4 \Rightarrow \curvearrowleft^{+}M_F=0$$

$$-(Dy)(4)-Hy(2)=0$$

$$4Dy=-2000 \qquad Dy=-500$$

$$-Fy-1000+500=0 \qquad Fy=-500 \ \ N$$

$$-4Cy+3Cx-6Dy+4.5Dx=+5500$$

$$6Fy+4.5Fx-3Cx-4Cy=0$$

$$Cx \pm Dx=1000$$

$$Ay+Cy+Dy=0$$

$$Fy+By-Cy=0$$

$$Fx-Cx-Bx=0$$

$$+Dx+Fx=-1000$$

$$7\ Eq\ \&\ 7Unk.\begin{cases}-4Cy+3Cx+4.5Dx=2500\\4.5Fx-3Cx-4Cy=+3000\\Cx+Dx=1000\\Ay+Cy=+500\\By-Cy=+500\\Fx-Cx-Bx=0\\Dx+Fx=+1000\end{cases}$$

$$\begin{cases}-4.5Fx+6Cx+4.5Dx=-500\\-4.5(+1000-Dx)+6Cx+4.5Dx=-500\\-4500+4.5Dx+6Cx+4.5Dx=-500\end{cases}$$

$$\begin{cases}9Dx+6Cx=4000\\Cx+Dx=1000\end{cases}$$

$$-3Cx+9000=4000$$

$$-3Cx=-5000$$

$$\left[Cx=+\frac{5000}{3}=1667\ \ N\rightarrow\right]Ans.$$

$$\begin{cases}9Dx+6Cx=4000\\Cx+Dx=1000\end{cases}$$

$$Dx=1000-\frac{5000}{3}=-\frac{2000}{3}$$

$$Fx=+1000+\frac{2000}{3}=\frac{5000}{3}$$

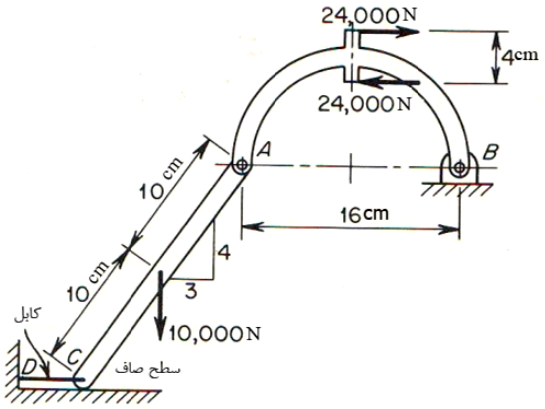
$$4.5(+\frac{5000}{3})-3(+\frac{5000}{3})-4Cy=3000$$

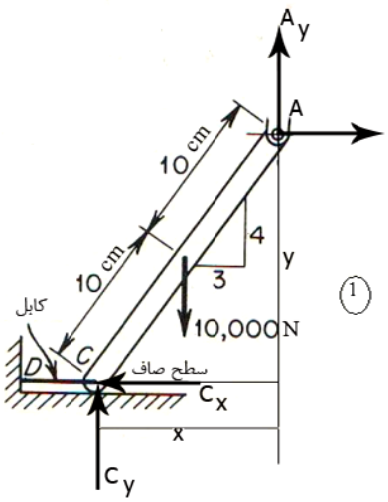
$$+7500-5000-4Cy=+3000$$

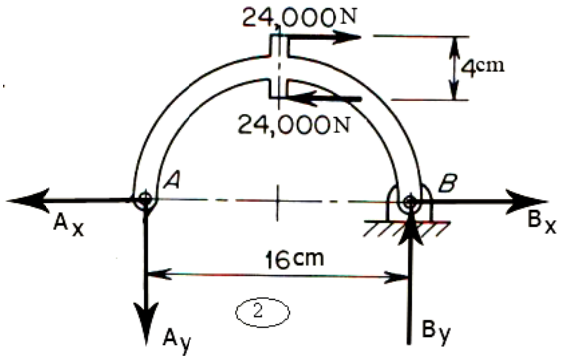
$$4Cy=-500$$

$$\left[Cy=-125\ \ N\downarrow\right]Ans.$$

4-128 بازوی AC روی سطح صاف بوسیله کابل CD نگهداری می شود، اگر از وزن تمام بازوهای قاب صرف نظر شود، مطلوبست کشش کابل وعکس عمل نیروها در پینA را.







$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \qquad \sin\alpha = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{3}{5}\times 20 = 12$$

$$y = \frac{4}{5}\times 20 = 16$$

$$1 \Rightarrow \curvearrowleft^{+} \sum Mc = 0$$

$$-(Ay)(12) + Ax(16) + 10/000(6) = 0$$

$$C_x = A_x$$

$$Cy + Ay = 1000$$

$$\Rightarrow 2 \curvearrowleft^{+} \sum M_B = 0$$

$$(Ay)(-16) + M = 0$$

$$Ay = By$$

$$Ax = Bx$$

$$M = (24000)(4) = 96000 \quad N - cm$$

$$Ay = \frac{96000}{16} = 6000 \quad N$$

$$[By = 6000 \quad N] \quad Ans.$$

$$-6000(12) + Ax(16) + 60000 = 0$$

$$Ax = 750 \quad N$$

$$16Ax = 12000$$

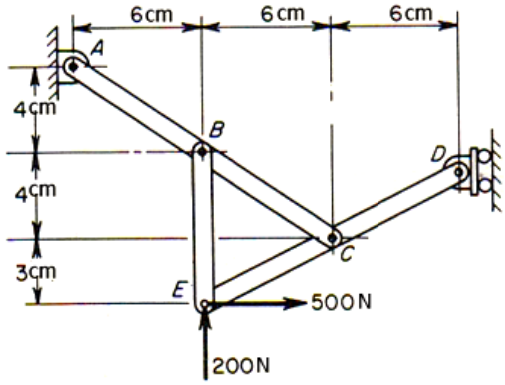
$$C_x = 750 \quad N \quad \rightarrow$$

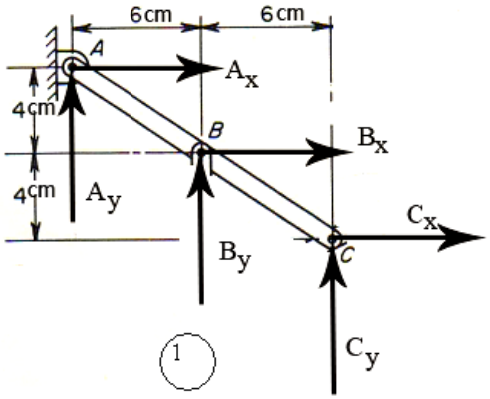
$$[Ax = Bx = 750\ ]\ N \rightarrow Ans.$$

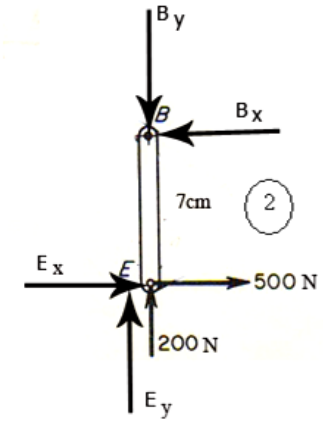
$$Ax + Bx + Cx = 0$$

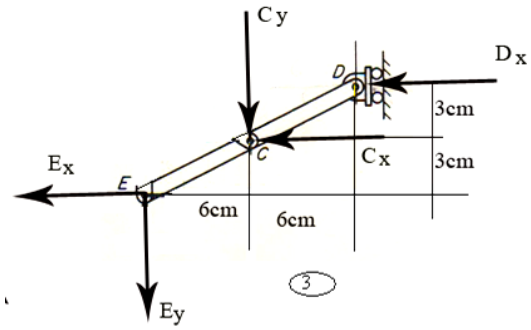
$$[C_x = T_{DC} = 750\ N] \leftarrow Ans.$$

4-132 نیروهای عکس العمل در پین C و A از بازوی AC قاب شکل زیر را محاسبه کنید، از وزن تمام بازوها صرف نظر شود.









$$1 \Rightarrow \curvearrowleft^{+} \quad \sum MA = 0$$

$$(Cy)(-12) - (Cx)(8) + By(-6) + Bx(4) = 0$$

$$Ay + By + Cy = 0$$

$$Ax + Bx + Cx = 0$$

$$2 \Rightarrow \curvearrowleft^{+} M_E = 0$$

$$Bx = 0 \qquad -Bx(7) = 0$$

$$2 \Rightarrow \curvearrowleft^{+} M_B = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-Ex(7) + 500(-7) = 0 \quad E_x = -500 \ \ N$$

$$Ex - Bx + 500 = 0$$

$$Ey + 200 - By = 0$$

$$3 \Rightarrow \curvearrowleft^{+} M_D = 0$$

$$(Ex)(+6) - Ey(12) + C_x(3) - C_y(6) = 0$$

$$-200(12) + Cx(3) - Cy(6) = 0$$

$$Dx + Cx + Ex = 0$$

$$-Cy + Ey = 0$$

$$\begin{cases} -12Cy - 8Cx - 6By = 0 \\ Ay + By + Cy = 0 \\ Ax + Cx = 0 \\ Ey - By + 200 = 0 \\ -12Ey + 6Ex + 3C_x - 6Cy = 0 \\ Dx + Cx + Ex = 0 \\ Ey + Cy = 0 \\ Ax - Dx + 500 = 0 \\ 200 + Ay = 0 \end{cases}$$

$$\left[Ay = -200 \ \ N \quad \downarrow\right] Ans.$$

$$6(Ey - 200) + 8Cx - 12(Ey) = 0$$

$$-6Ey + 8Cx = -1200$$

$$-12Ey + 3Cx - 6(-500) - 6(-Ey) = 0$$

$$\begin{cases} -6Ey + 3Cx = 3000 \\ -6Ey + 8Cx = -1200 \\ 5Cx = -4200 \end{cases}$$

$$\left[Cx = -840 \ \ N \leftarrow\right] Ans.$$

$$Ax + Cx = 0$$

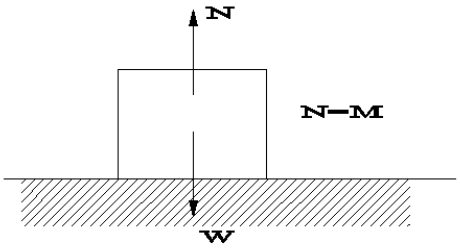
$$\left[Ax = 840 \ \ N \rightarrow\right] Ans.$$

$$-6Ey = 3000 - 3(-840) = 5520$$

$$\left[Cy = -Ey = 920 \ \ N \uparrow\right] Ans.$$

فصل ۵

FRICTION(اصطکاک)



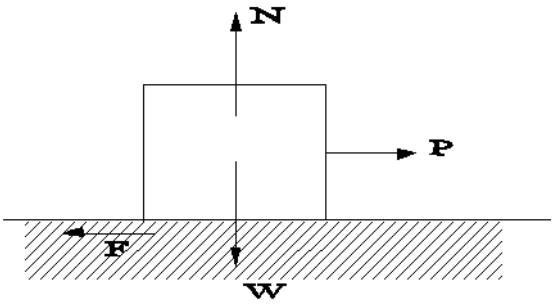
اصطکاک

در حالت صیقلی $N = W$

تعریف اصطکاک :

وقتی که جسم صلبی روی سطح ناصاف و یا روی جسم دیگر می خواهد بلغزد یا شروع به لغزیدن میکند نیرویی در جهت مخالف حرکت بوجود می آید که

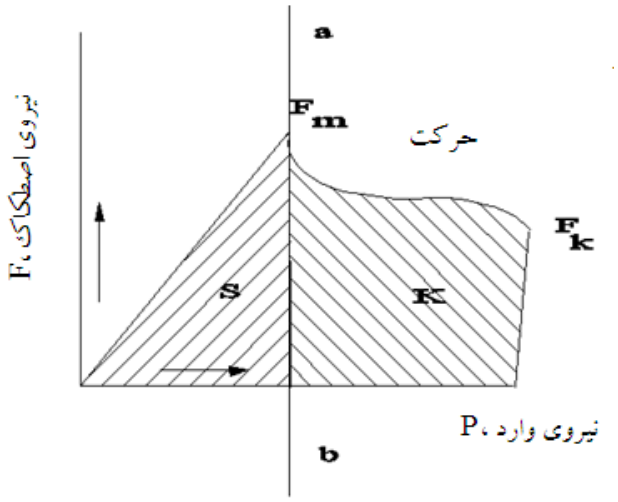
مماس بر سطح تماس حرکت می باشد .



اصطکاک : عموماً فرض می شود به ناصافی های موجود در سطح تماس ،

و همچنین نیروی چسبندگی (attractive-Force)و جاذبه مولکولی سطح تماس می باشد .

P زیاد ، F هم زیاد می شود . $P \propto F$



Law of Friction(قانون اصطکاک)

$1 - F_m = \mu_s N$

$2 - F_m \neq F(A)$ سطح تماس

$3 - F_m > F_K$

$4 - F_K \neq F(V)$ تابع سرعت نیست

$S - F_K = F(V)$ سرعت بسیار بالا

نیروی اصطکاک F_K بتدریج کم می شود .

Static-Friction نیروی اصطکاک استاتیکی Fm نیروی ماکزیمم Kinetic - Friction نیروی اصطکاک جنبشی Fk به خاطر حرکت ان است . $F_k > F_M$

تجربه نشان داده است که نیروی اصطکاک استاتیکی برابر است:

با حاصل ضرب مولفه قائم بر سطح یعنی N $Fm = N\mu s$

در ضریب اصطکاک $Fk = N\mu k$

ضریب اصطکاکا استاتیکی μs

ضریب اصطکاک جنبشی μk

μs و μk ، بستگی به اندازه سطح تماس نداشته بلکه تابع نوع و جنس و طبیعت سطوح تماس می باشند که درصفحه ۸۳۵ ودر جدول ۷ این ضرایب آمده است.

نیروی وارد بر جسم

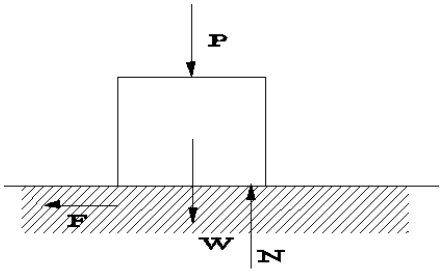
چهار حالت رخ می دهد .

حالت اول : P عمود بر سطح باشد .

و جسم ساکن است .

$N = W + P \qquad \sum Fy = 0$

نیروی اصطکاک وجود ندارد $F = 0 \qquad \sum Fy = 0$



Law of Friction $F_m = N\mu_S$ (قانون اصطکاک)

حالت دوم : جسم ساکن است و P مایل

$$\sum Fy = 0$$

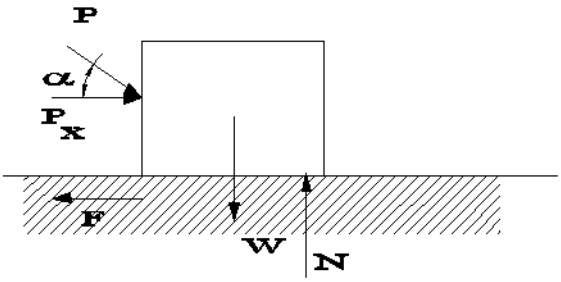
$$+N - W - P\sin\propto = 0$$

$$N = W + P\sin\propto$$

$$F = p\cos\propto$$

$F < \mu_s N = F_m$ بدون حرکت

چون نمی دانیم که نیروی F به حداکثر خود F_m رسیده نمی توان از $F_m = N\mu_s$ استفاده کرد .



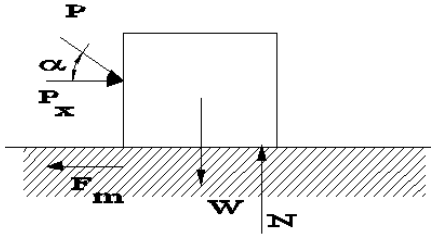
حالت سوم : جسم در شرف حرکت است

$$N = W + P\sin\propto$$

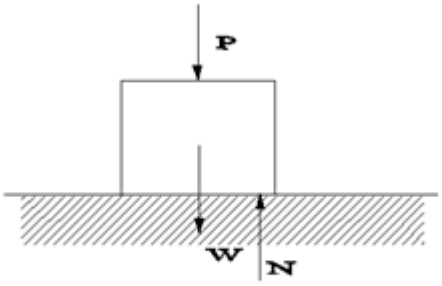
$$F_M = P\cos\propto$$

$$F_M = \mu_s N$$

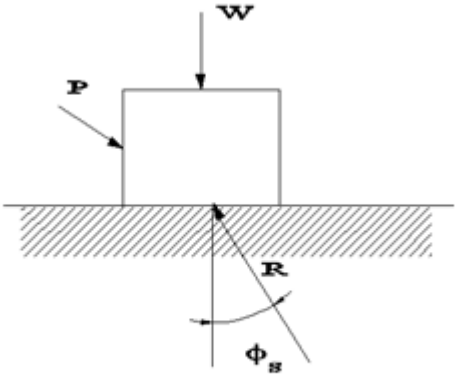
$F_M = P_x = p\cos\propto$ درشرف حرکت است



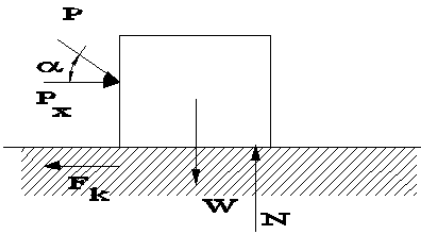
حالت چهارم : جسم به حرکت در می آید .



بدون اصطکاک



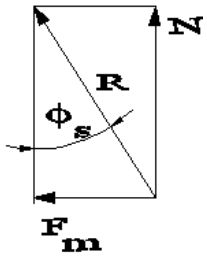
بدون حرکت

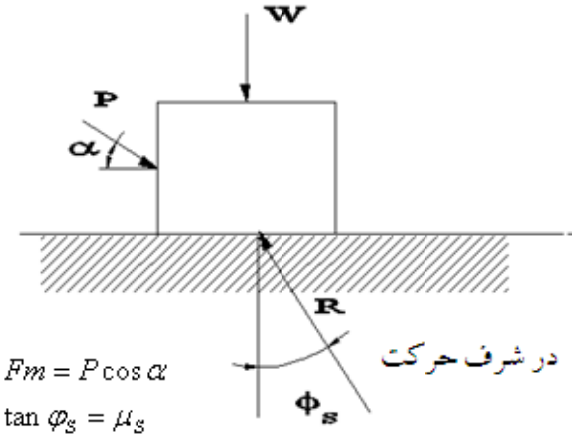


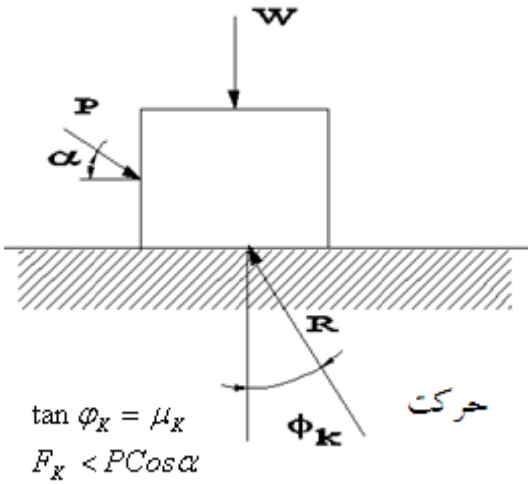
نمی توان $\sum Fx = 0, \sum Fy = 0$ را استفاده کرد . چون $px > Fm \quad Fk = \mu kN < px$

$$tam\varphi s = \frac{Fm}{N} = \mu s$$

φs را زاویه اصطکاک استاتیکی می گویند .

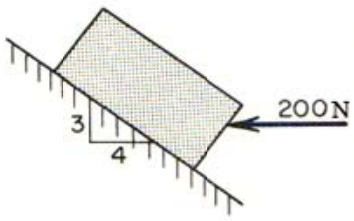


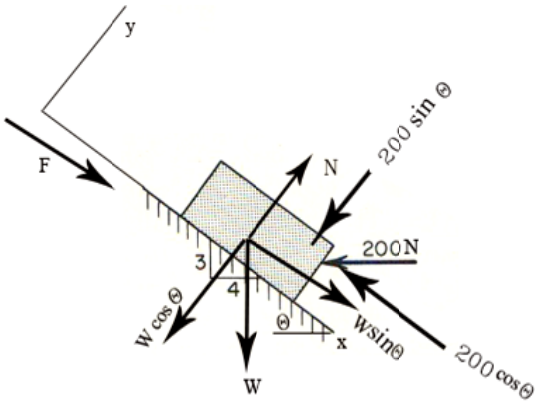




φ_Kرا زاویه اصطکاک جنبشی می گویند .

5-2 جعبه ۲۵۰ نیوتنی روی سطح شیب دار مطابق شکل زیر قرار گرفته است، اگر ضریب اصطکاک بین سطح شیب دار و جعبه برابر با $\mu = 0.20$ باشد، نیروی اصطکاک را محاسبه کنید.





$W_A = 250 \;\; N$

$\sin\theta = \frac{3}{5} = 0.6 \qquad \cos\theta = \frac{4}{5} = 0.8$

$\mu = 0.2$

$\uparrow^{+} \sum Fx = 0$

$F + w\sin\theta - 200\cos\theta = 0$

$F = 200(0.8) - 250(0.6) = 10 \;\; N$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fy = 0$

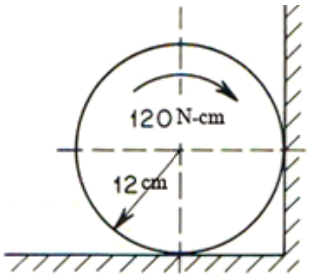
$N - w\cos\theta - 200\sin\theta = 0$

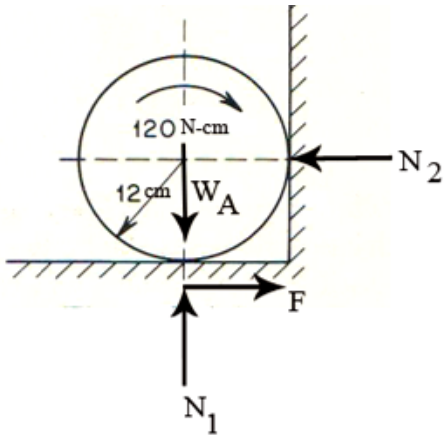
$N = 250\,(0.8) - 200(0.6) = 80 \;\; N$

$F' = \mu N = (0.2)(80) = 16$

$F < F' \qquad$ *No Impending*

5-4 چرخ همگن شکل زیر به وزن ۱۰۰ نیوتن به دیوار عمودی تماس داشته و صاف می باشد، ولی ضریب اصطکاک بین چرخ و سطح افقی $\mu = 0.3$ است، نیروی اصطکاک که سطح افقی بر چرخ وارد می کند را حساب کنید.





$\sum Fy = 0 \qquad N_1 - W_A = 0$

$N = 100 \;\; N$

$\sum Fx = 0$

$-N_2 + F = 0 = 0 \quad F = N_2$

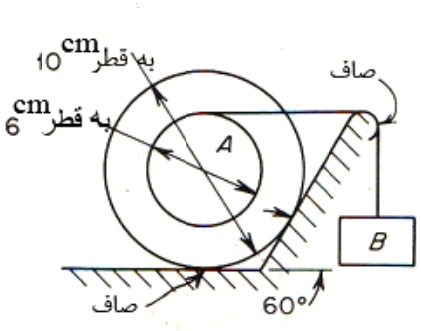
$\sum M_{N1} = 0$

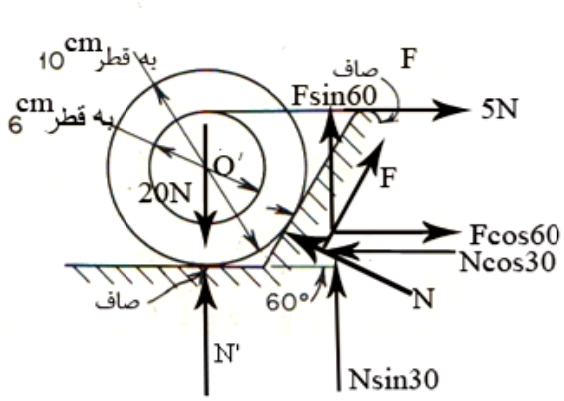
$N_2(12) - 120 = 0$

$N_2 = 10 \;\; N$

$F = 10 \quad N \rightarrow$

5-6 در شکل زیر شکل A و B به ترتیب ۲۰ و ۵ نیوتن وزن دارند، سطح افقی صاف و ضریب اصطکاک در سطح شیب دار برابر با $\mu = 0.4$ است . سیستم در حالت اولیه ساکن است، نیروی عکس العمل سطح افقی که بر جسم A وارد می شود را بدست آورید.





$M_O = 0$

$-5(F) + 5(3) = 0$

$5F = 15 \quad F = 3 \;\; N$

$\Sigma Fx = 0$

$+5 - N\cos\theta + F\cos = 0$

$5 - N\cos 30 + 3\cos 60 = 0$

$N\cos 30 = 5 + 3(\cos 60) = 5 + 1.5$

$N = 7.5 \;\; N$

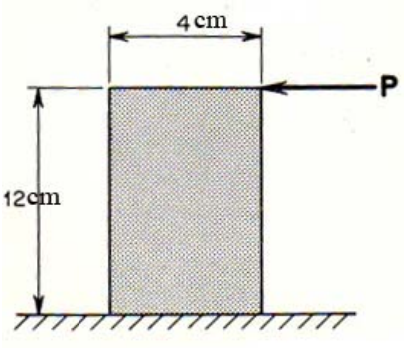
$-20 + N' + F\sin 60 + Nsim30 = 0$

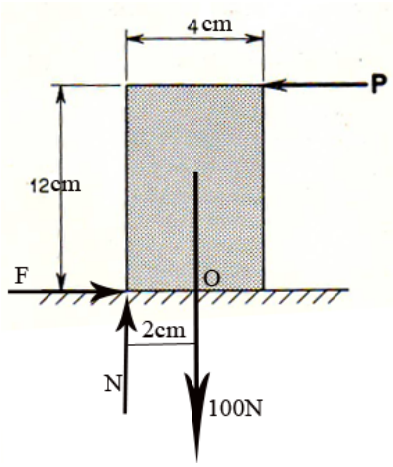
$N' = 20 - Fsim60 - Nsim30$

$N' = 20 - 3 \times sim60 - 7.5 \times sim30$

$N' = 20 - 2.6 - 3.27 = 13.65 \uparrow \;\; N$

5-8 جسم همگن شکل زیر به وزن ۱۰۰ نیوتن روی سطح افقی قرار گرفته است، ضریب اصطکاک بین سطح افقی و جسم $\mu = 0.2$ است، اگر نیروی P به تدریج اضافه شود، تا به حالت حرکت درآید، حساب کنید، در چه موقع می لغزد و در چه موقع واژگون می گردد.





Take slip $F = \mu N$

$+\uparrow \quad \Sigma F_y = 0 \quad N - 100 = 0 \quad N = 100 \ N$

$F = 0.2 \times 100 = 20 \ N \qquad \Sigma F_F = 0$

$p = F = 20 \ N$

If Tip Assumed Through C $\Sigma M_0 = 0$

$-12p + (2)(N) = 0$

$12p = 200$

$p = 16.66 \ N \ \uparrow$ *To Tip Left*

to take Slip $F = \mu N$

$\uparrow^{+} \Sigma F_Y = 0$

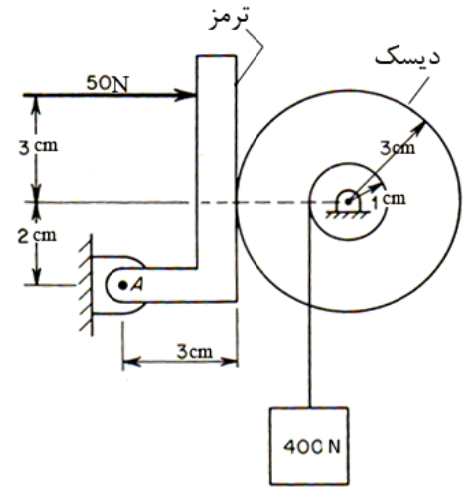
$N - 100 = 0 \qquad N = 100 \ N$

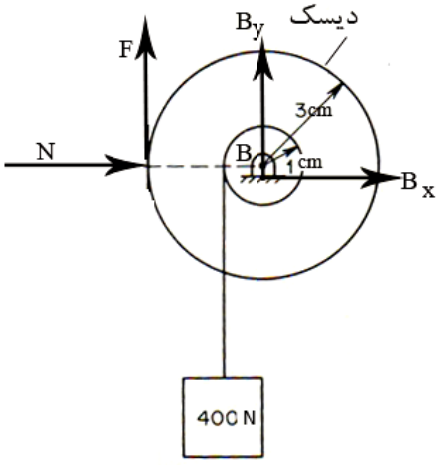
$F = 0.2 \times 100 = 20 \ N$

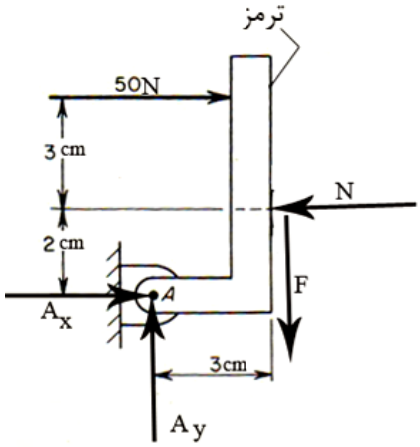
$\Sigma Fx = 0 \qquad p - F = 0$

$P = F = 20 \ N$

5-10 ضریب اصطکاک بین ترمز و دیسک شکل زیـر $\mu = 0.5$ است، مطلوبست محاسبه عکس العمل نیروهـای افقـی و عمـودی در پین A ، از وزن دیسک صرف نظر می شود.





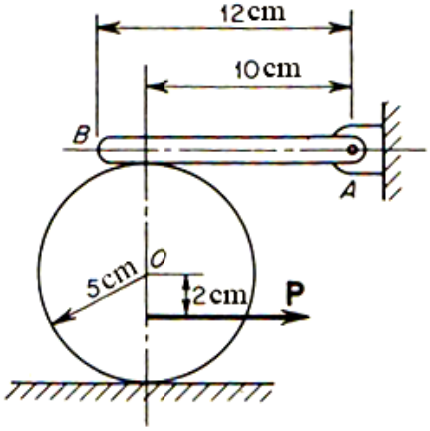


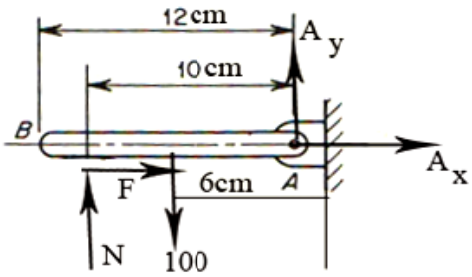
$$\Sigma M_B = 0$$
$$(F)(3) - 400(1) = 0$$
$$F = {}^{400}\!/_{3} = 133.33 \quad N$$
$$\Sigma Fy = 0 \quad Ay - F = 0$$

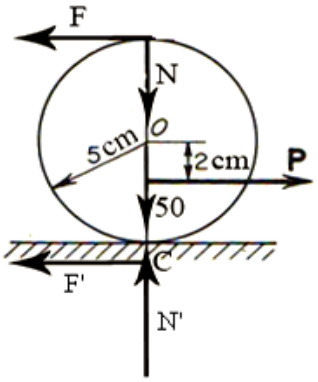
$$Ay = {}^{400}\!/_{3} = 133.33 \uparrow$$
$$\Sigma M_A = 0$$
$$-50(5) + 2N - 3(F) = 0$$
$$2N = 250 + 3(133.33)$$
$$N = 325 \quad N \rightarrow$$
$$\Sigma Fx = 0$$
$$Ax + 50 - N = 0$$
$$Ax = 325 - 50$$
$$Ax = 275 \rightarrow$$

$$F = 0.5(325)$$
$$F = 162.5 \quad Not \ \ correct \ , then$$
$$F = 133.33 \ N \ \ is \ \ correct$$

5-12 بازوی AB بـه وزن ۱۰۰ نیـوتن و سـیلندر بـه وزن ۵۰ نیوتن مطابق شکل زیر قرار گرفته است، ضـریب اصـطکاک بـین بازوی AB و سیلندر $\mu = 0.2$ و ضریب اصطکاک بین سـیلندر و سطح افقی $\mu = 0.4$ مـی باشـد، مطلوبسـت تعیـین حـداکثر نیروی P وقتی که سیلندر به حالـت حرکـت درآیـد. از ضـخامت بازوی AB صرف نظر می شود.







$$w_{AB} = 100 \quad N$$
$$cylinder = 50 \ N$$
$$\Sigma M_A = 0$$
$$10N - 100 \times 6 = 0$$
$$N = 60N \uparrow$$
$$F = \mu N = (0.2)(60) = 12 \quad N$$
$$+\downarrow \sum F_y = 0 \quad N + 50 - N' = 0$$

$N' = 60 + 50 = 110 \quad N$

$F' = \mu' N' = 0.4 \times 110 = 44 \quad N$

$\curvearrowleft^{+} \sum M_C = 0$

$-10F + 3P = 0$

$3p = 10x12$

$p = 40 \quad N$

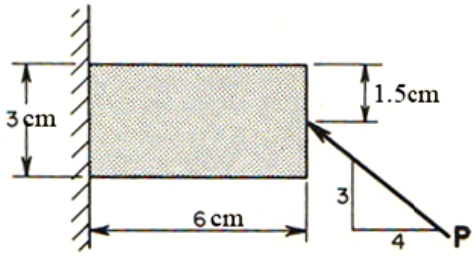
$\sum F_x = 0$

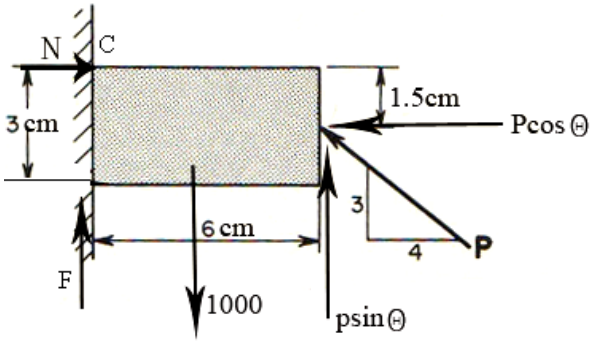
$P = F' + F = 44 + 12 = 56 \quad N$

۵۶نیوتن قابل قبول نیست،پس

$[p = 40 \quad N] \; Ans.$

5-14 جسم همگن به وزن ۱۰۰ نیوتن مطابق شکل زیر بوسیله نیروی P به دیوار تکیه داده شده است، اگر ضریب اصطکاک بین جسم و دیوار $\mu = 0.2$ باشد، تحلیل کنید که آیا سیستم در حالت تعادل است یا نه وقتی که نیروی P ، الف: ۱۰۰۰ نیوتن و ب: ۱۵۰۰ نیوتن، باشد.





$a) p = 1000 \quad N$

$b) p = 1500 \quad N$

$\cos\theta = 4/5 = 0.8$

$sim\theta = 3/5 = 0.6$

فرض گرفته می شود،که جسم در حالت واژگون قرار گرفته است پس،بنابراین N ازC می گذرد

$\sum Mc = 0$

$(1000)(3) - psim\theta(6) + p\cos\theta(1.5) = 0$

$3000 = P(-\cos\theta \times 1.5 + sim\theta \times 6)$

$3000 = p(-1.2 + 3.6) \qquad p = 1250 \quad N$

$\sum F_x = 0$

$N = 0.8P = 0.8(1250) = 1000 \quad N$

$\sum F_y = 0$

$F + 0.6(1250) - 1000 = 0$

$F = 250 \; N$

$Limiting \; Value \quad F' = \mu N = 0.2(1000) = 200 \quad N$

$F' < F$

$\sum F_y = 0$

$-1000 + psim\theta + F = 0$

$-1000 + p\sin\theta + \mu N = 0$

$-1000 + (p)(0.6) + 0.2(p)(0.8) = 0$

$1000 = P(0.6 + 0.16)$

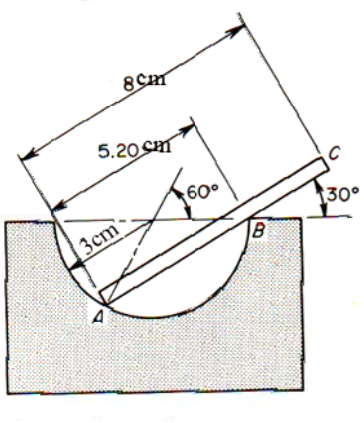
$P = 1316 \quad N$

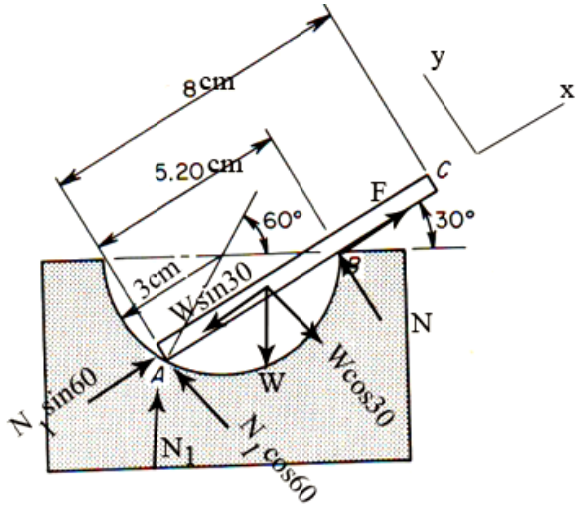
سیستم به حالت تعادل نیست می لغزد

$b) \; P = 1500 \quad N \Rightarrow 1316 < 1500$

سیستم به حالت تعادل نیست واژگون می شود

5-16 میله AC در شکل زیر ۱۲۰ نیوتن وزن دارد، وضعیت تماس در نقطه A ، صاف و بدون اصطکاک است،ولی در نقطه B ضریب اصطکاک $\mu = 0.3$ است،مطلوبست واکنش نیروها در نقطه B و A





$a)\ P = 1000 \quad N \Rightarrow 1000 < P$

$W_{AC} = 120 \quad N$

$at A \quad smooth$

$\mu_B = 0.3$

$\sum M_A = 0$

$(N)(5.2) - W\cos 30(4) = 0$

$N = \dfrac{4 \times 120 \times 0.866}{5.2} = 80$

$F = 0.3 \times 80 = 24$

$\sum F_Y = 0$

$N_1 \cos 60 - 120\cos 30 + 80 = 0$

$N_1 = 47.84 \quad N$

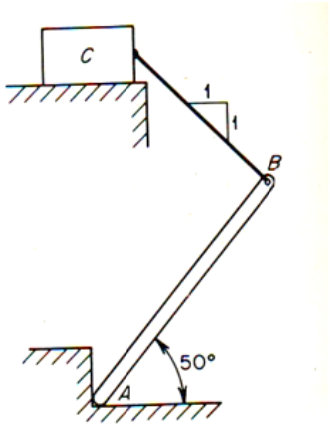
$\sum F_x = 0$

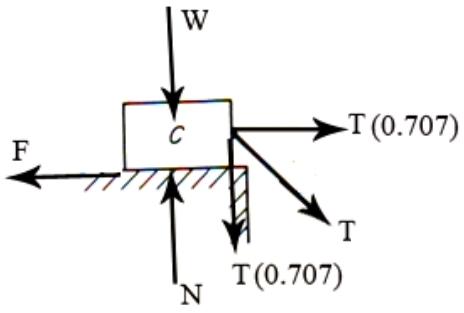
$F - W\sin 30 + N_1 \sin 60 = 0$

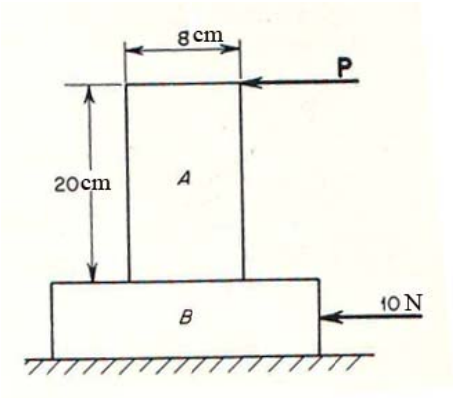
$F = 120\sin 30 - 47.84\sin 60$

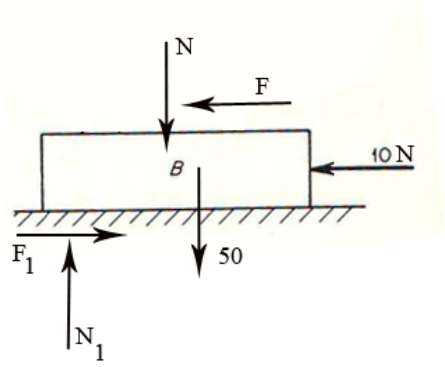
$F = 18.57 \quad N \quad As\ shown$

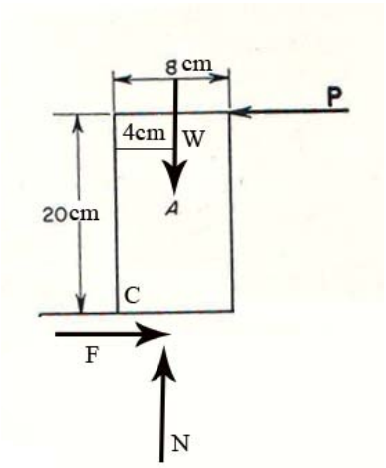
5-18 جسم همگن میله AB و بلوک C هر کدام ۱۰ نیوتن وزن دارد، ضریب اصطکاک بین سطح و بلوک C $\mu = 0.2$ است، نیروی اصطکاک بین سطح و بلوک C را پیدا کنید.











$W_A = 40 \;\; N$

$W_A = 50 \;\; N$

$\mu = 0.4 \quad A, B$

$\mu = 0.3 \quad B,\ H.P$

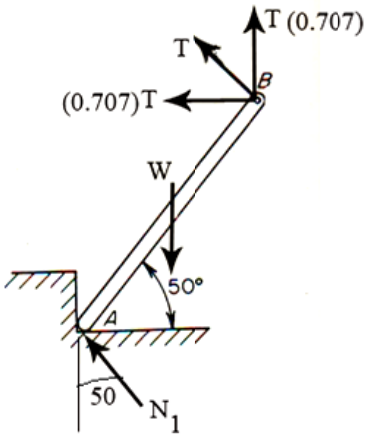
$p = ? \quad No \;\; impending$

$N = 40 \;\; N$

$F = +P$

$N = 40 \;\; N$

$F = +P$



$W_{AB} = 10 \;\; N, Wc = 10 \;\; N$

$\mu_C = 0.2$

$-W + N - 0.707T = 0$

$F = (0.707)T$

$\curvearrowleft^{+} \;\; \Sigma M_A = 0$

$(10)(l/2)\cos 50 - T(0.707)l\cos 50 - T(0.707)l\sin 50 = 0$

$5\cos 50 = T(0.707)(\cos 50 + sim 50)$

$T = 3.22 \;\; N$

$F = (0.707)T$

$F = (0.707)(3.22) = 2.28 \;\; N \leftarrow$

5-20 اجسام همگن A و B به ترتیب ۴۰ و ۵۰ نیوتن وزن دارد ، ضریب اصطکاک بین A و B ، $\mu = 0.2$ است و ضریب اصطکاک بین سطح B و سطح افقی $\mu = 0.3$ است، مطلوبست تعیین حداکثر نیروی P وقتی که این نیرو بتواند جلوی حرکت را بگیرد.

$$N - W = 0$$
$$F = P = 0$$

$$-N + N_1 - 50 = 0 \qquad N_1 = 40 + 50 = 90 \ \ N$$

$$10 + F = F1$$

$$(p)(20) - 40(4) = 0 \quad p = 8 \ \ N$$

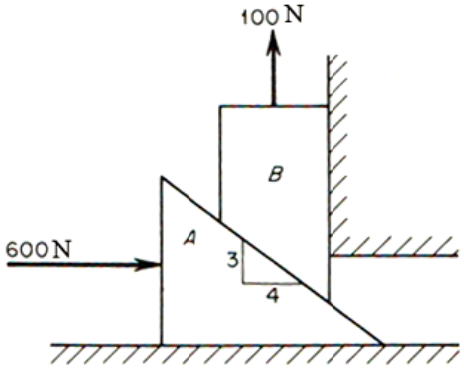
$$F' = \mu N = 0.4 \times 40 = 16 > F \quad No \ \ Tip$$

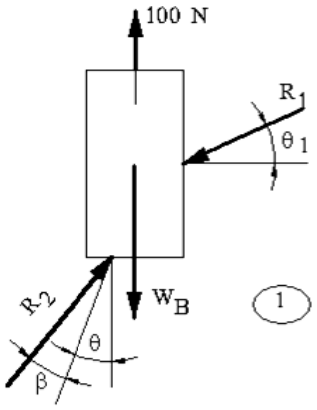
$$F_1 - F = 10$$

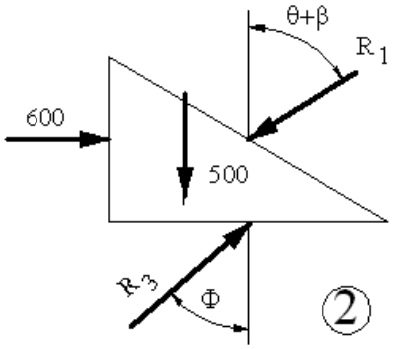
$$F_1 = \mu \times N_1 = 90 \times 0.3 = 27 \quad N$$

$$Then \quad p = 8N \ \leftarrow$$

5-22 در شکل زیر بلوک A به وزن ۵۰۰ نیوتن است، ضریب اصطکاک بین بلوک A و سطح افقی $\mu = 0.5$ است و ضریب اصطکاک بین بلوک A و بلوک B ، $\mu = 0.5$ است و ضریب اصطکاک بین بلوک B و دیوار $\mu = 0.4$ است، مطلوبست تعیین حداقل وزن بلوک B به طوری که از حرکت بلوک A جلوگیری کنند.



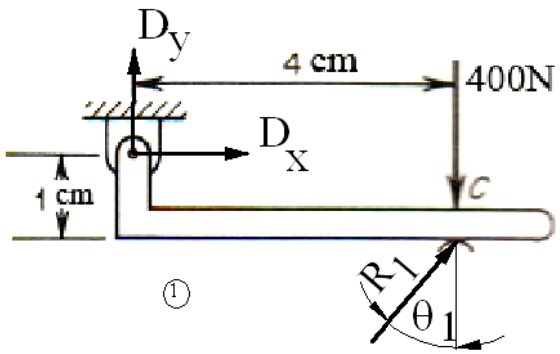


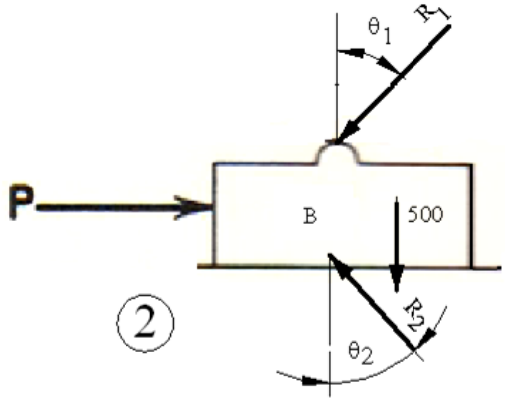


$$\mu = 0.5 A, H, plan$$
$$\mu = 0.5 A, B$$
$$\mu = 0.4 B \ \ , V.plan$$
$$W_B = ?$$

$$\tan\theta_1 = 0.4 \quad \theta_1 = 21.8$$
$$\tan\theta = 3/4 = 0.75 \quad \theta = 36.86$$
$$\tan B = 0.5 \quad B = 26.56$$
$$\tan\phi = 0.5 \quad \phi = 26.56$$

$$\sum F_Y = 0$$
$$1 \Rightarrow 100 - WB + R_2 \cos(\theta + \beta) - R_1 sim\theta_1 = 0$$
$$100 - WB + R_2 \cos 63.43 - R_1 sim 21.8 = 0$$
$$\sum F_x = 0$$
$$1 \Rightarrow \ -R_1 \cos 21.8 + R_2 sim 63.43 = 0$$





$W_A = 500\ \ N \quad W_B = 400\ \ N \quad \mu = 0.2 \quad A, P$

$\mu = 0.1 A, B \qquad \mu = 0.3 C, B$

$P = ? \quad impending$

$\tan\theta_1 = 0.3 \quad \theta_1 = 16.7 \quad \tan\theta_2 = 0.1 \quad \theta_2 = 5.7$

$\curvearrowleft^{+} \quad 1 \Rightarrow \Sigma M_D = 0$

$(400)(4) - (R_1 \cos\theta_1)4 - R_1 sim\theta_1 \times 1 = 0$

$(400)(4) - (R_1 \cos 16.7)4 - R_1 sim 16.7 \times 1 = 0$

$1600 - 3.83R_1 - 0.287R_1 = 0$

$R_1 = 388.6 \quad N$

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow 2$

$-400 - R_1 \cos\theta_1 + R_2 \cos\theta_2 = 0$

$-400 - R_1 \cos 16.7 + R_2 \cos\theta_2 = 0$

$R_2 = 776 \quad N$

$2 \Rightarrow \Sigma Fy = 0$

$R_3 \cos 26.56 - 500 - R_2 \cos 63.43 = 0$

$600 - R_2 sim 63.43 - R_3 sim 26.6 = 0$

$$\begin{cases} 100 - WB + 0.477R_2 - 0.37R_1 = 0 \\ -0.93R_1 + 0.8993R_2 = 0 \\ R_3(0.8943) - 500 - 0.447R_2 = 0 \\ 600 - 0.894R_2 - R_3(0.4471) = 0 \end{cases}$$

$$(0.8943)\left(\frac{600 - 0.894R2}{+0.4471}\right) - 500 - 0.447R_2 = 0$$

$+1200 - 1.788R_2 - 500 - 0.447R_2 = 0$

$2.235R_2 = 700 \quad R2 = 313.2 \ \ N$

$-0.93R_1 = -0.8943(313.2)$

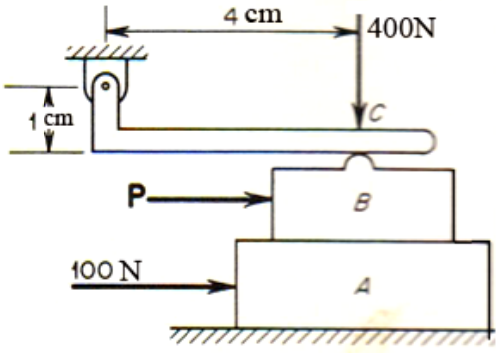
$R_1 = +301.2$

$100 - W_B + 313.2 \times 0.447 - 0.37(301.2) = 0$

$W_B = 100 + 28.6 = 128.6$

$[W_B = 128.6 \ \ N] \quad Ans.$

5-26 بلوک A شکل زیر ۵۰۰ نیوتن است و بلوک B ۴۰۰ نیوتن وزن دارد وزن بلوک C قابل اغماض است، اگر ضرایب اصطکاک بین A و سطح افقی $\mu = 0.2$ و بین A و B ، 0.1 و بین B و C ، $\mu = 0.3$ است نیروی P، طوری حساب کنید که وقوع حرکت به سمت راست باشد.



$\sum F_x = 0 \quad 2 \Rightarrow$

$P - R_2 sim\theta_2 - R_1 sim\theta_1 = 0$

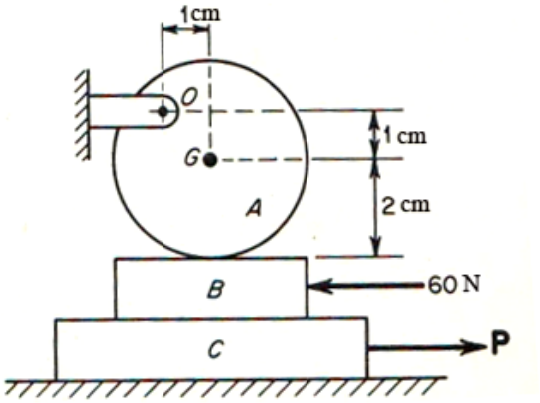
$P - R_2 sim5.7 - R_1 sim16.7 = 0$

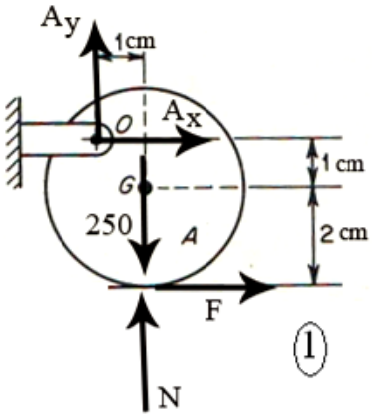
$p = 776\sin 5.7 + 388.6\sin 16.7$

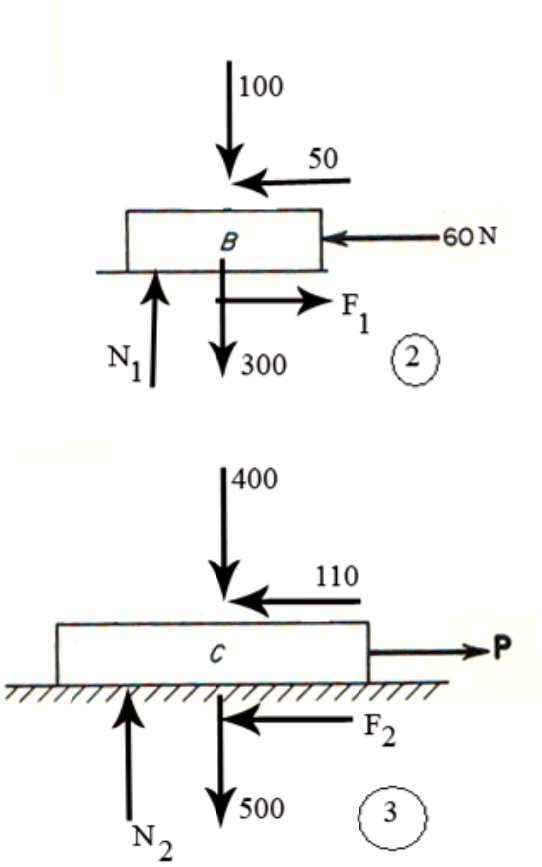
$P = 77.1 + 111.67 = 188.8$

$[P = 188.8\ N]$ *Ans.*

5-28 جسم همگن A شکل زیر 250 نیوتن وزن دارد که به دیوار عمودی بوسیله پین صاف وصل شده است، جسم B به وزن ۳۰۰ نیوتن و جسم C به وزن ۵۰۰ نیوتن است، اگر ضریب اصطکاک بین B و A ، $\mu = 0.5$ و بین C و B ، $\mu = 0.3$ و بین C و صفحه افقی $\mu = 0.1$ باشد، نیروی P را طوری تعیین کنید که جسم C در شرف وقوع حرکت به سمت راست باشد.







$W_A = 250\,N \quad W_{13} = 300\ N \quad W_C = 500\ N \quad \mu_{A,B} = 0.5$

$\mu_{BC} = 0.3 \quad \mu_C = 0.1 \quad P = ? \quad impending$

$1 \Rightarrow \curvearrowleft^{+} \quad \Sigma M_O = 0$

$250x1 - Nx1 - 3F = 0$

$N = 250 - 3F$

$F = \mu N = 0.5N$

$N = 250 - 3x0.5N$

$2.5N = 250$

$N = 100$

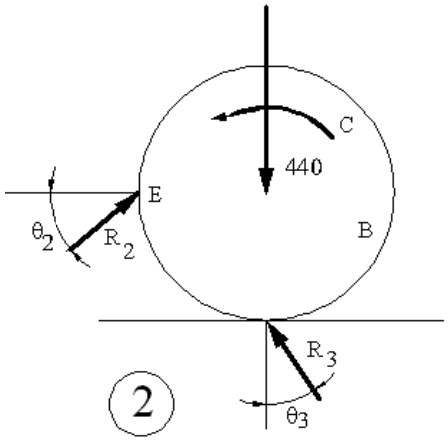
$F = 0.5x100 = 50\ N$

$2 \Rightarrow \quad \Sigma F_y = 0 \quad 100 + 300 - N_1 = 0 \quad N_1 = 400\ N$

$F'_1 = \mu N_1 = 0.3x400 = 120\ N$

$\sum F_x = 0 \quad F_1 - 50 - 60 = 0 \quad F_1 = 110\ N$

$F'_1 > F_1 \quad Then\ C\ moved$



$W_A = 1000 \ \ N \quad W_B = 440 \ \ N$

$\mu_A = 0.2 \quad \mu_{B,A} = 0.2 \quad \mu_B = 0.5$

$tam\ \theta_1 = 0.2 \quad \theta_1 = 11.3$

$tam\ \theta_2 \quad \theta_2 = 11.3$

$tam\ \theta_3 = 0.5 \quad \theta_3 = 26.56$

$1 \Rightarrow \ \Sigma Fy = 0$

$-1000 + R_1 \cos\theta_1 + R_2 sim\theta_2 = 0$

$-1000 + R_1 \cos 11.3 + R_2 sim 11.3 = 0$

$\Sigma Fx = 0 \qquad R_1 sim\theta_1 = R_2 \cos\theta_2$

$$-1000 + R_1 \cos 11.3 + R_1 \frac{sim 11.3}{\cos 11.3} \times Sim 11.3 = 0$$

$$-1000 + R_1 (\frac{1}{\cos 11.3}) = 0$$

$R_1 = 980.6 \ \ N$

$$R_2 = R_1 \frac{sim\theta_1}{\cos\theta_2} = R_1 \tan 11.3$$

$R_2 = 980.6 \times 0.2 = 196.2 \ \ N$

$\Sigma F_y = 0$

$-440 + R_3 \cos\theta_3 - R_2 \sin\theta_2 = 0$

$R_3 \cos 26.56 = 440 + 196.2 \sin 11.3$

$R_3 = 535 \ \ N$

$3 \Rightarrow \ \Sigma F_y = 0$

$N_2 - 500 - 400 = 0$

$N_2 = 900 \ \ N$

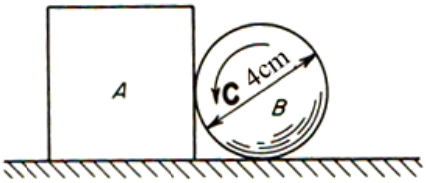
$F_2 = \mu N_2 = 0.1x900 = 90 \ \ N$

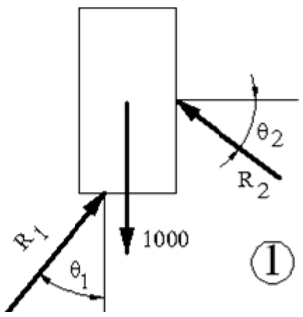
$\sum F_x = 0$

$P - 110 - 90 = 0$

$[P = 200 \ \ N \rightarrow] \ \ Ans.$

5-30 جسم همگن A به وزن ۱۰۰۰ نیوتن و سیلندر B به وزن ۴۴۰ نیوتن است، اگر ضریب اصطکاک بین A و B ، $\mu = 0.2$ ، بین A و سطح افقی $\mu = 0.2$ و بین B و سطوح افقی $\mu = 0.5$ باشد، مطلوبست تعیین کوپل C به طوری که این کوپل باعث شود که جسم B در شرف وقوع حرکت قرار گیرد.





$$R_2 = R_1 \frac{sim\theta_1}{\cos\theta_2} = R_1 \tan 11.3$$

$R_2 = 980.6 \times 0.2 = 196.2 \ \ N$

$$2 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_y = 0 \\ F_x' + 440 = N'' \\ \sum F_x = 0 \\ N' = F''x \end{cases}$$

$$\begin{cases} N + 0.2N' = 1000 \\ N' = 0.2N \end{cases}$$

$$Fx = 0.2N$$

$$F'x = 0.2N'$$

$$F''x = 0.5N''$$

$$N + 0.2(0.2N) = 1000$$

$$N = 962.6$$

$$N' = 0.2(962.6) = 192.5$$

$$\begin{cases} 0.2N' + 440 = N'' \\ N' = 0.5N'' \end{cases}$$

$$N'' = 440 + 0.2(192.5)$$

$$N'' = 478.5 \ \ N$$

$$F_x'' = 0.5N''$$

$$F_x'' = 0.5(478.5) = 293.3$$

$$2 \Rightarrow \curvearrowleft^{-} \ M_E = 0$$

$$-440(2) + C + N''(2) - F_x''(2) = 0$$

$$C = 880 - 2(478.5) + 239.2(2)$$

$$\left[C = 401.5 \ \ N - cm\right] \ Ans.$$

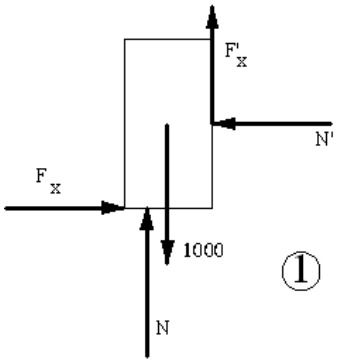
$$2 \Rightarrow \curvearrowleft^{-} \ M_E = 0$$

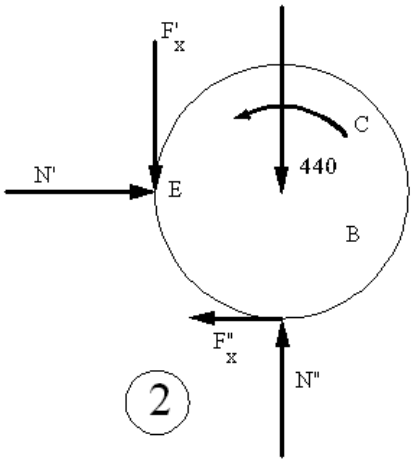
$$-440(2) + C + N''(2) - F_x''(2) = 0$$

$$C = 880 - 2(478.5) + 239.2(2)$$

$$\left[C = 401.5 \ \ N - cm\right] \ Ans.$$

این مسئله از راه دیگر حل می شود



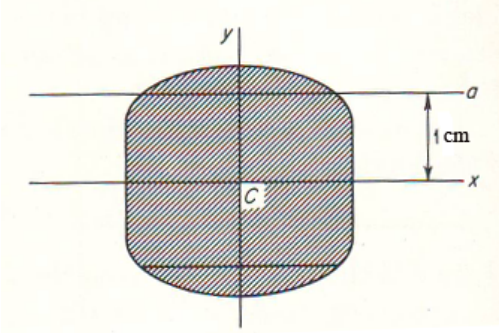


$$1 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_y = 0 \\ N + F'x = 1000 \\ \sum F_x = 0 \\ N' = Fx \end{cases}$$

فصل ۶

گشت آور لختی،حاصل ضرب لختی

6-2 گشتاور لختی قطبی ، شکل هاشورزده زیر نسبت به محوری که از مرکز ثقل آن (C) می گذرد برابر $6.5\ cm^4$ است، گشتاور لختی سطح، این شکل نسبت به محور y برابر با $4.5\ cm^4$ می باشد، گشتاور لختی قطبی ، این سطح را نسبت به محور a بدست آورید، به شرط اینکه مساحت این سطح $6\ cm^2$ باشد.



$$A = 6\ \ cm^2 \quad j_o = 6.5\ \ cm^4 \quad Iy = 4.5\ \ cm^4$$

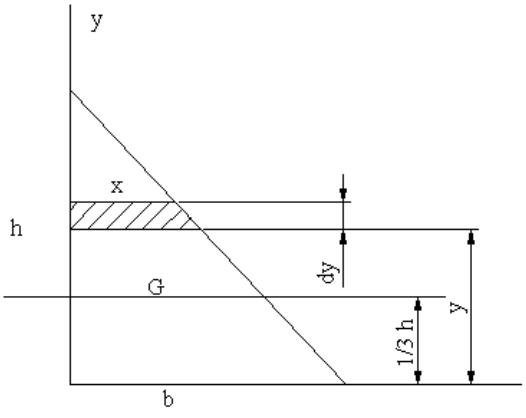
از قانون قطبی استفاده شده و از قانون متوازی

$$J0 = Ix + Iy$$

$$6.5 = Ix + 4.5 \qquad Ix = 2\ \ cm^4$$

$$Ia = Ix + Ad^2 = 2 + (6)(1)^2 = 8\ \ cm^4$$

6-4گشتاور لختی سطح، یک مثلث به ارتفاع h و به قاعده b را نسبت به محوری که از مرکز ثقل این مثلث گذشته و موازی قاعده آن باشد را محاسبه کنید.



$$dA = xdy$$

$$dI_x = y^2 dA$$

$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 dA$$

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y)dy$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(hy^2 - y^3)dy$$

$$I_x = \frac{b}{h}\left[\frac{h}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^h$$

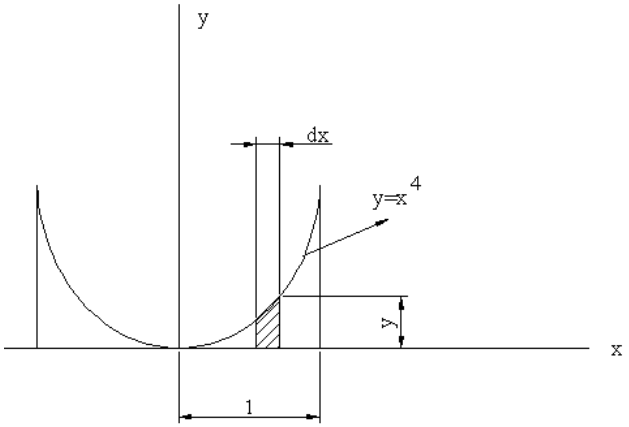
$$I_x = \frac{b}{h}\left[\frac{h^4}{3} - \frac{1}{4}h^4\right] = \frac{bh^4}{hx12} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = I_{GX} + Ad^2$$

$$I_{GX} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2}x\frac{h^2}{9}$$

$$\left[I_{GX} = \frac{bh^3}{36}\right] Ans.$$

6-6 سطح محصور بین سهمی $y = x^4$ و خط y=0 و x=1 مفروض است، گشتاور لختی سطح، این شکل را نسبت به محور x بدست آورید.



$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$dIx = \frac{dx}{3}(y)^3$$

$$Ix = \frac{1}{3}\int y^3 dx$$

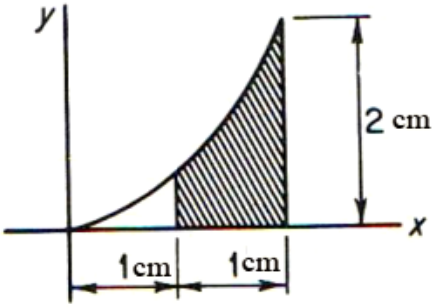
$$Ix = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^4)^3 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^{12} dx$$

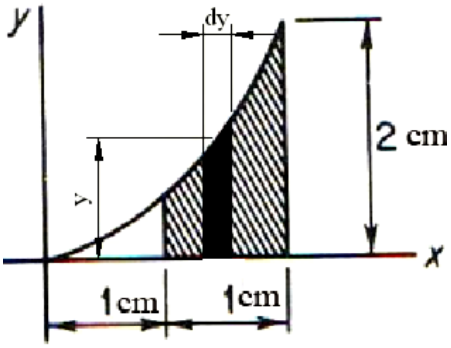
$$Ix = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^4)^3 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^{12} dx$$

$$Ix = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{13}x^{13}\right]_0^1 = \frac{1}{39}\ \ cm^4$$

$$Ix = 0.0256\ \ cm^4$$

6-8 گشتاور لختی قطبی شکل هاشورزده زیر را بدست آورید، به شرط اینکه معادله سهمی برابر با $x^2=2y$ باشد





$$dA = ydx$$

$$dIx = \frac{bh^3}{3} = \frac{dx}{3}y^3 = \frac{dx}{3}(\frac{1}{2}x^2)^3$$

$$dIx = \frac{1}{24}x^6\ dx$$

$$Ix = \int_1^2 \frac{1}{24}x^6 dx = \frac{1}{24}\times\frac{1}{7}x^7\Big]_1^2$$

$$Ix = \frac{1}{24}\times\frac{1}{7}[128-1] = 0.756\ \ cm^4$$

$$dIy = (x^2)(dA) = x^2(ydx)$$

$$dIy = (x^2)(\frac{x^2}{2})(dx) = \frac{1}{2}x^4 dx$$

$$Iy = \int_1^2 \frac{1}{2}x^4 dx$$

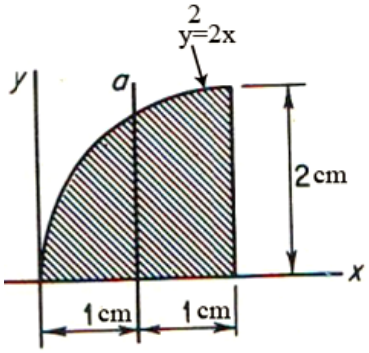
$$Iy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^2$$

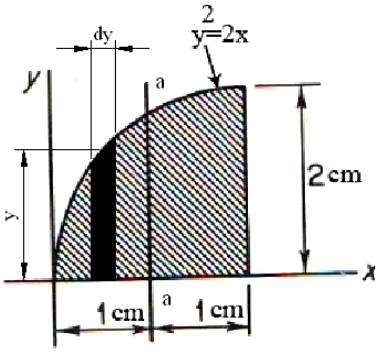
$$Iy = \frac{1}{10}(32-1) = 0.31\ \ cm^4$$

$$J_0 = Ix + Iy = 0.31 + 0.756$$

$$J_0 = 1.066\ \ cm^4$$

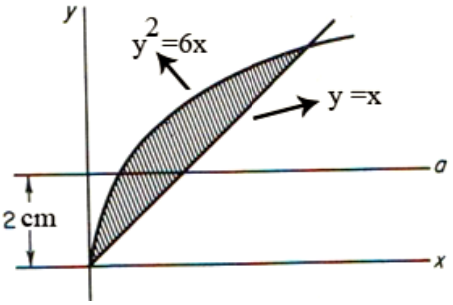
6-9 گشتاور لختی قطبی شکل هاشورزده را نسبت به محـور aa بدست آورید به شرط اینکه معادلـه سـهمی برابـر بـا $y^2 = 2x$ باشد.

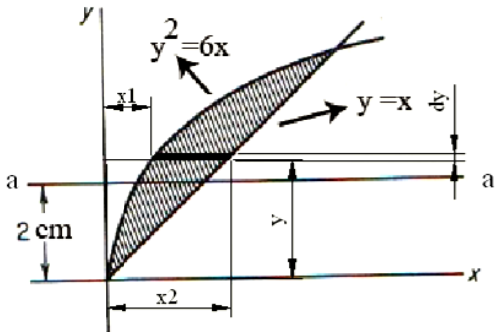




$$dA = ydx$$
$$dIa = (x-1)^2\, dA = (x-1)^2 (y)(dx)$$
$$Ia = \int_0^2 (x-1)^2(\sqrt{2x})dx$$
$$Ia = \int_0^2 (x^2+1-2x)\sqrt{2x}dx$$
$$Ia = \int_0^2 (x^2\sqrt{2x}+\sqrt{2x}-2x\sqrt{x})dx$$
$$Ia = \left[\sqrt{2}\times\frac{1}{3.5}x^{3.5}+\sqrt{2}\frac{x^{1.5}}{1.5}-2\frac{x^{2.5}}{2.5}\right]_0^2$$
$$Ia = \left[4.57+2.66-4.52\right]$$
$$Ia = 2.71 \quad cm^4$$

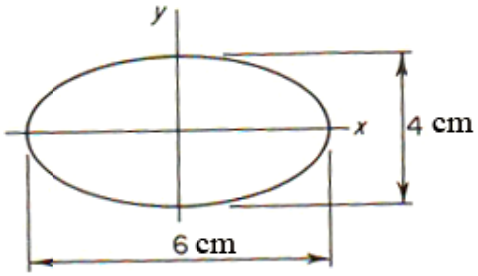
6-10 گشتاور لختی سطح، شکل هاشورزده را نسبت به محور aa بدست آورید به شرط اینکه معادله خط y=x و معادله سهمی برابر با $y^2 = 6x$ باشد.





$$dA = (x_2 - x_1)dy$$
$$dIa = (y-2)^2\, dA = (y-2)^2 (x_2 - x_1)dy$$
$$dIa = (y-2)^2 (y - \frac{1}{6}y^2)dy$$
$$dIa = (y^2+4-4y)(y-\frac{1}{6}y^2)dy$$
$$dIa = (y^3 - \frac{1}{6}y^4 + 4y - \frac{2}{3}y^2 - 4y^2 + \tfrac{2}{3}y^3)dy$$
$$dIa = (\frac{5}{3}y^3 - \frac{1}{6}y^4 - \frac{14}{3}y^2 + y)dy$$
$$Ia = \int_0^6 (\frac{5}{3}y^3 - \frac{1}{6}y^4 - \frac{14}{3}y^2 + 4y)dy$$
$$Ia = \left[\frac{5}{3}\times\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{30}y^5 - \frac{14}{3\times 3}y^3 + \frac{4}{2}y^2\right]_0^6$$
$$Ia = 540 - 259.2 - 336 + 72$$
$$Ia = 16.8 \quad cm^4$$

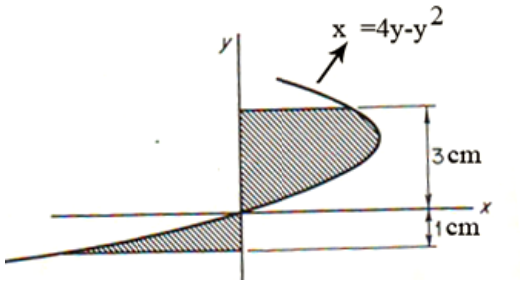
6-14 گشتاور لختی سطح، بیضی زیر را نسبت به محور x و y ها بدست آورید.

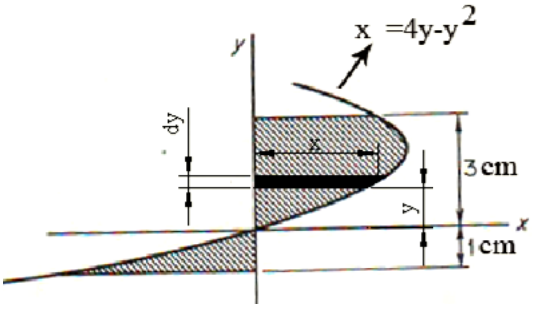


$$Ic = \frac{\pi ab^3}{4}$$
$$b = 2''$$
$$a = 3''$$
$$Ix = \frac{\pi ab^3}{4} = \frac{(\pi)(3)(2)^3}{4} = 18.85 \quad cm^4$$

$$Iy = \frac{\pi ba^3}{4} = \frac{(\pi)(2)(3)^3}{4} = 42.4 \quad cm^4$$

6-16 گشتاور لختی سطح، شکل هاشورزده زیر را نسبت به محور x بدست آورید، به شرط اینکه معادله سهمی برابر با $x = 4y - y^2$ باشد.

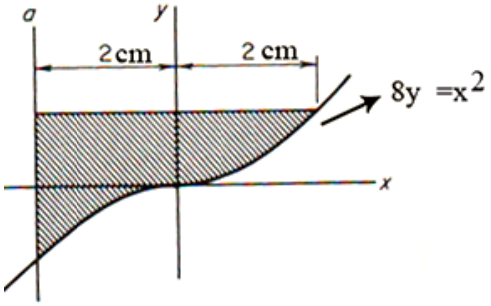


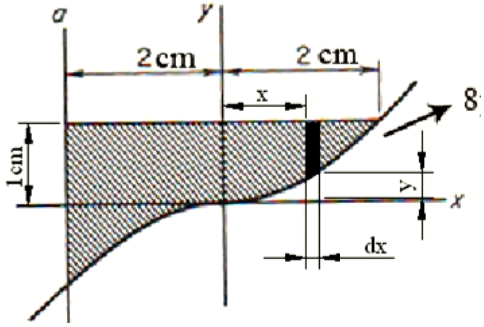


$$x = 4y - y^2$$
$$dA = xdy$$

$$dIx = y^2 dA = y^2 \times dy$$
$$dIx = (y^2)(dy - y^2)dy$$
$$dIx = (4y^3 - y^4)dy$$
$$Ix = \left|\int_{-1}^{0} (4y^3 - y^4)dy\right| + \int_{0}^{3} (4y^3 - y^4)dy$$
$$Ix = \left|\left[y^4 - \frac{1}{5}y^5\right]_{-1}^{0}\right| + \left[y^4 - \frac{1}{5}y^5\right]_{0}^{3}$$
$$Ix = \left|0 - (1) + \frac{1}{5}(-1)\right| + [81 - 48.6]$$
$$Ix = +1.2 + 81 - 48.6$$
$$Ix = 33.6 \ cm^4$$

6-18 گشتاور لختی سطح، شکل هاشورزده زیر را نسبت به محور a بدست آورید، به شرط اینکه معادله سهمی برابر با $8y = x^2$ باشد.





$$8y = (2)^3 = 8$$
$$y = 1$$
$$dA = (1 - y)(dx)$$
$$dIa = (x + 2)^2 dA$$
$$dIa = (x + 2)^2 (1 - y)dx = (x^2 + 4 + 4x)(1 - \frac{x^3}{8})(dx)$$
$$Ia = \int_{-2}^{0} (x^2 - x^5/8 + 4x + 4 - \frac{x^3}{2} - x^4/2)dx$$
$$+ \int_{0}^{2} ((x^2 - x^5/8 + 4x + 4 - \frac{x^3}{2} - x^4/2)dx)$$

$$Ia = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{48}x^6 + 2x^2 + 4x - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{10}x^2 \right]_{-2}^{0} \right|$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{48}x^6 + 2x^2 + 4x - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{10}x^2 \right) \right]_{0}^{2}$$

$$Ia = \left| 0 - \frac{1}{3}(-8) + \frac{1}{48}(64) - 2(4) - 4(-2) + \frac{1}{8}(16) + \frac{1}{10}(-32) \right|$$

$$+ \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{64}{48} + 8 + 8 - \frac{1}{8}(16) - \frac{1}{15}(32) \right) \right]$$

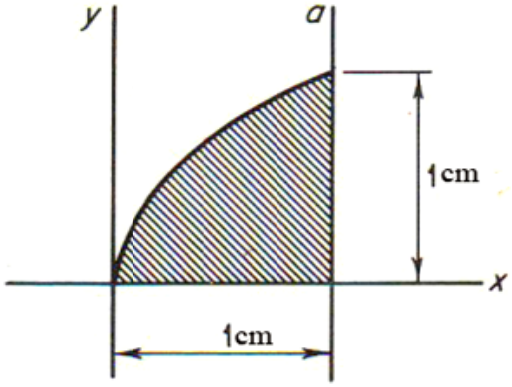
$$Ia = \left| 2.66 + 1.33 - 8 + 8 + 2 - 3.2 \right|$$

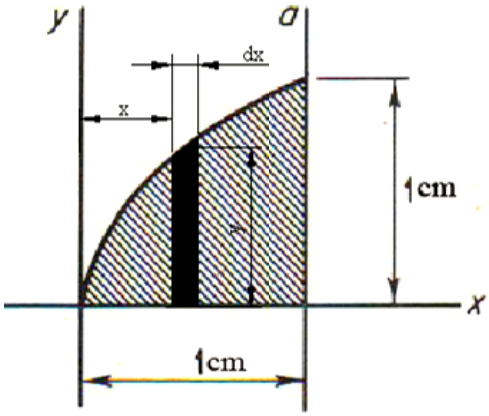
$$+ (2.66 - 1.33 + 8 + 8 - 2 - 3.2)$$

$$Ia = 2.79 + 12.14$$

$$Ia = 14.93 \ \ cm^4$$

6-20شعاع چرخش سطح، شکل هاشورزده زیر را نسبت به محور a بدست آورید، به شرط اینکه معادله سهمی برابر با $y^2 = x$ باشد.





$$dA = ydx$$

$$dIa = (1-x)^2 = (dA) = (1-x)^2 (y)(dx)$$

$$dIA = (x^2 + 1 - 2x)(\sqrt{x})(dx)$$

$$Ia = \int_0^1 (x^2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2x\sqrt{x})dx$$

$$Ia = \left[\frac{x^{3.5}}{3.5} + \frac{x^{1.5}}{1.5} - \frac{2x^{2.5}}{2.5} \right]_0^1$$

$$Ia = \frac{1}{3.5} + \frac{1}{1.5} - \frac{2}{2.5} = 0.286 + 0.66 - 0.8$$

$$Ia = 0.152 \ \ cm^4$$

$$A = \int_0^1 ydx = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{x^{1.5}}{1.5} \Big]_0^1 = \frac{1}{1.5}$$

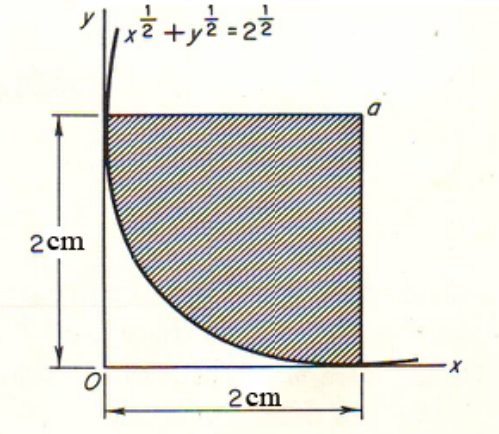
$$A = 0.666 \ \ cm^2$$

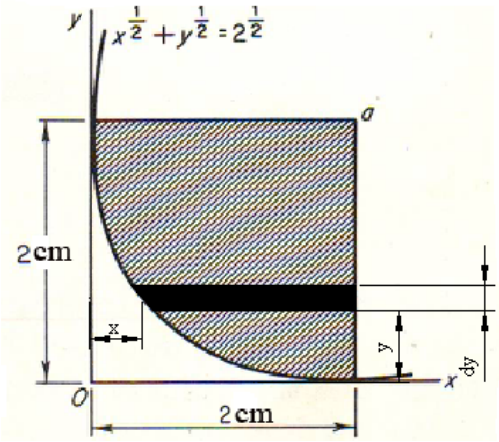
$$K_G^2 A = Ia$$

$$K_G^2 = \frac{0.152}{0.666}$$

$$K_G = 0.477 \ \ cm$$

6-22 شعاع چرخش سطح، شکل هاشورزده زیر را نسبت به محور x بدست آورید.





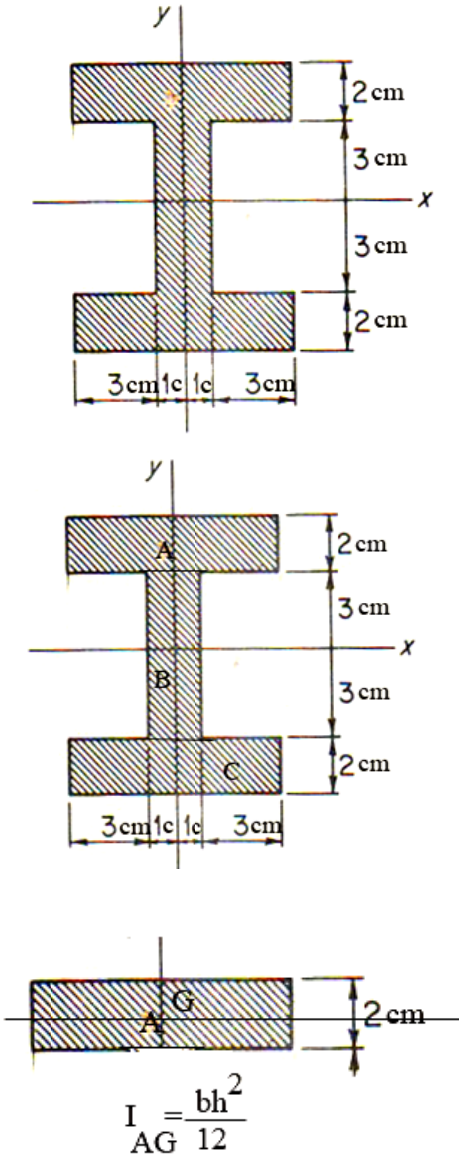
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}$$
$$dA=(2-x)(dy)$$
$$dIx=y^2dA=(2-x)(y^2)(dy)$$
$$\sqrt{x}=\sqrt{2}-\sqrt{y}$$
$$x=2+y-2\sqrt{2y}$$

$$dIx=(2-2-y+2\sqrt{2y})(y^2)(dy)$$
$$Ix=\int_0^2 (2\sqrt{2y}-y)(y^2)dy=\int_0^2 (2\sqrt{2y}\ y^2-y^3)dy$$
$$IX=\left[2\sqrt{2}\,\frac{y^{3.5}}{3-5}-\frac{1}{4}y^4\right]_0^2=9.142-4=5.142\quad cm^4$$

$$A=\int_0^2 (2\sqrt{2y}-y)dy$$
$$A=\int_0^2 (2\sqrt{2y}-y)dy=\left[2\sqrt{2}\times\frac{y^{1.5}}{1.5}-\frac{1}{2}y^2\right]_0^2$$
$$A=5.333-2=3.333\ \ cm^2$$

$$K^2{}_G A=I_X$$
$$K^2{}_G=\frac{4.142}{3.333}$$
$$k_G=1.242\quad cm$$

6-24 گشتاور لختی سطح، شکل مرکب هاشورزده زیر را نسبت به محور x و y بدست آورید.



$$I_{AG}=\frac{bh^2}{12}$$

$$Ix=IB_x+IA_x+ICx$$
$$I_{BX}=\frac{bh^3}{12}$$
$$I_{BX}=\frac{(2)(6)^3}{12}=36\quad cm^4$$

$$I_{AX}=5.33+256=261.33\quad cm^4$$

$$I_{AG} = \frac{(8)(2)^3}{12} = 5.333$$

$$I_{AX} = I_{AG} + Ad^2 = 5.333 + (16)(4)^2$$

$$I_{AX} = 5.33 + 256 = 261.33 \quad cm^4$$

$$similarity \quad \Rightarrow \quad I_{BX} = 261.33 \quad cm^4$$

$$I_X = 261.33 + 261.33 + 36 = 558.66 \quad cm^4$$

$$Iy = I_{BY} + I_{AY} + I_{CY}$$

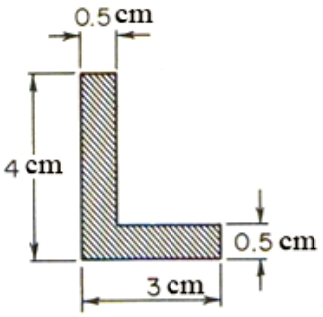
$$I_{BY} = \frac{bh^3}{12} = \frac{6x2^3}{12} = 4 \ cm^4$$

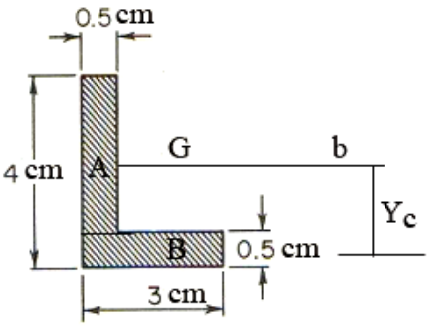
$$I_{AY} = I_{CY} = \frac{bh^3}{12} = \frac{2x8^3}{12} = 85.3 \ cm^4$$

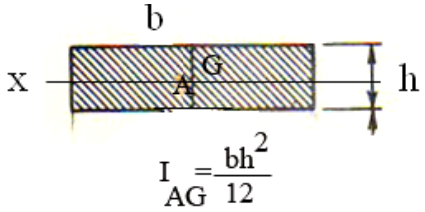
$$I_Y = 85.3 + 85.3 + 4 = 174.6 \ cm^4$$

$$I_X = 261.33 + 261.33 + 36 = 558.66 \quad cm^4$$

6-26 شعاع چرخش سطح، شکل مرکب هاشورزده زیر را نسبت به محوری که از مرکز ثقل جسم مرکب می گذرد و موازی محور x باشد را بدست آورید.







Shape	AREA	XC	Axc	Yc	AYc
A	۱,۷۵	$0.5/2$	۰,۴۳۷۵	۲,۲۵	۳,۹۳۷۵
B	۱,۵	۱,۵	۲,۲۵	$0.5/2$	۰,۳۷۵
total	۳,۲۵		۲,۶۸۷۵		۴,۳۱۲۵

$$xc = \frac{Axc}{A} = \frac{2.6875}{3.25}$$

$$Xc = 0.826 \ cm$$

$$Yc = \frac{Ayc}{A} = \frac{4.3125}{3.25}$$

$$Yc = 1.326 \ cm$$

$$I_{BG} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3(0.5)^3}{12} = 0.0312$$

$$I_{BG} = 0.0312 + 1.5(1.326 - 0.25)^2$$

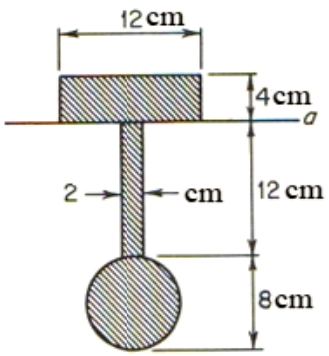
$$I_{BG} = 0.0312 + 1.736 = 1.767 \quad cm^4$$

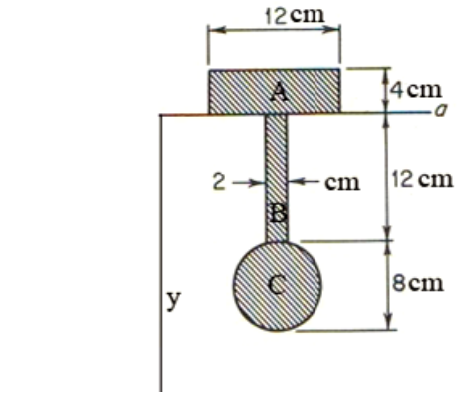
$$K_{GB}{}^2 \ A = I_{BG}$$

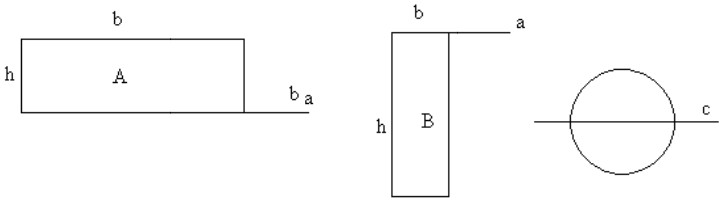
$$K_{GB}{}^2 \ (3.25) = 1.767 + 3.28 = 5.047$$

$$K_{GB} = 1.245 \ cm$$

6-28 شعاع چرخش سطح، شکل مرکب هاشورزده زیر را نسبت به محور a بدست آورید.







$$a)\quad Ia = \frac{bh^3}{3} = \frac{12(4)^3}{3} = 256\ \ cm^4$$

$$b)\quad Ia = \frac{(2)(12)^3}{3} = 1152\ \ cm^4$$

$$c)\quad Ic = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$Ia = Ic + Ad^2 = Ic + \pi R^2(4+12)^2$$

$$Ia = \frac{\pi}{4}(4)^4 + (4)^2(16)^2$$

$$Ia = 201.06 + 12867.6 = 13068.66\ \ cm^4$$

$$Ia = 13068.66 + 256 + 1152 = 14476.66\ \ cm^4$$

$$A = (12)(4) + 2(12) + \pi(4)^2$$

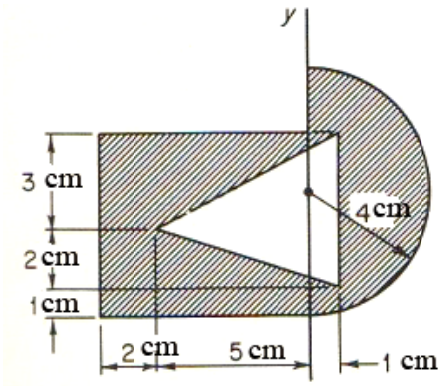
$$A = 48 + 24 + 50.26 = 122.26$$

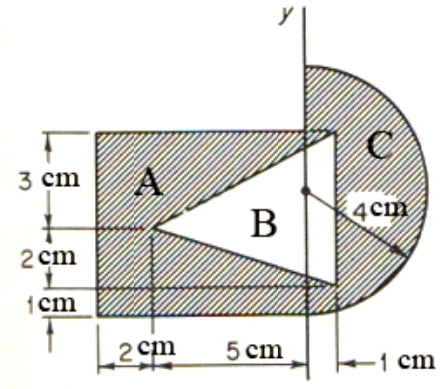
$$Ka^2 A = Ia$$

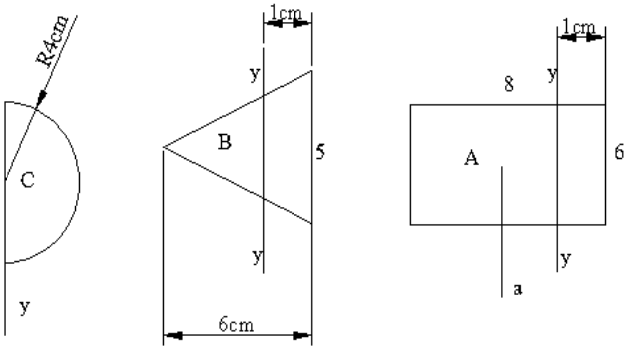
$$K^2{}_a = \frac{14476.66}{122.26}$$

$$Ka = 10.88\ \ cm$$

6-30 گشتاور لختی سطح، شکل مرکب هاشورزده زیر را نسبت به محور y بدست آورید







$$Iy = IAy + IBy + ICy$$

$C \Rightarrow$

$Iy = \pi/8 \, R^4$

$Iy = \pi/8 \, (4)^4 = 100.5 \ \ cm^4$

$B \Rightarrow$

$I_G = \dfrac{bh^3}{36} = \dfrac{(5)(6)^3}{36} = 30$

$Iy = IG + Ad^2$

$Iy = 30 + 15(2-1)^2 = 45 \ \ cm^4$

$A \Rightarrow$

$IG = \dfrac{bh^3}{12} = \dfrac{6(8)^3}{12} = 256$

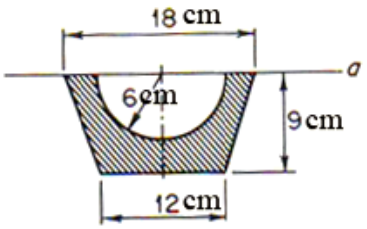
$Iy = 256 + Ad^2 = 256 + 48(4-1)^2$

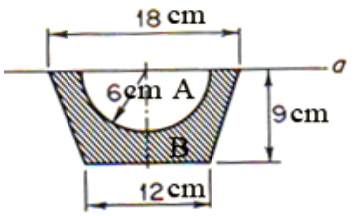
$Iy = 256 + 432 = 688$

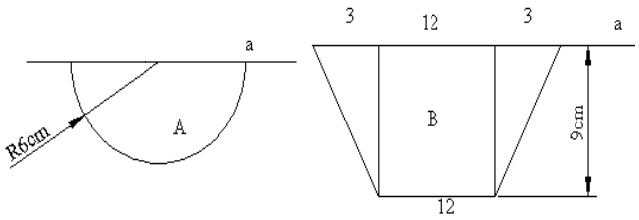
$Iy = 688 - 45 + 100.5$

$Iy = 743.5 \ \ cm^4$

6-32 شعاع چرخش سطح، شکل مرکب هاشورزده زیر را نسبت به محور a بدست آورید.







$A \quad \Rightarrow I_a = \dfrac{\pi}{8} R^4 = \dfrac{\pi}{8} (6)^4$

$I_a = 508.92 \ \ cm^4$

$B \ \Rightarrow$

$I_{aB} = (2)\dfrac{bh^2}{12} + \dfrac{bh^3}{3}$

$I_{aB} = 2(3)\dfrac{(9)^3}{12} + \dfrac{12 \times 9^3}{3}$

$I_{aB} = 364.5 + 2916 = 3280.5 \ \ cm^4$

$I_a = I_{aB} - I_{aA}$

$Ia = 3280.5 - 508.92 = 2771.58 \ \ cm^4$

$KG^2 A = Ia$

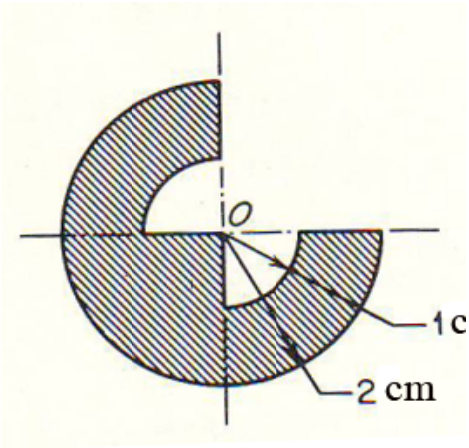
$A = (\dfrac{18+12}{2})(9) - \dfrac{\pi}{2}(36)$

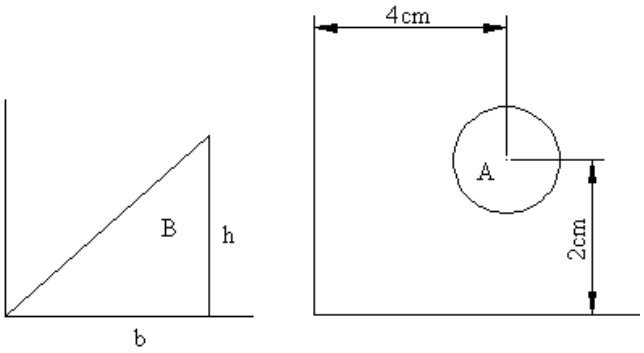
$A = 135 - 56.55 = 78.45 \ \ cm^2$

$K^2_G = \dfrac{2771.58}{78.45}$

$K_G = 5.943 \ \ cm$

6-34. گشتاور لختی قطبی شکل مرکب هاشورزده زیر را بدست آورید.





$k_{GO} = ?$

$Ix + Iy = J_O$

$B \Rightarrow$

$I_{BX} = \frac{bh^3}{12} \quad I_{BG} = \frac{hb^3}{36}$

$I_{BX} = \frac{6\times 9^3}{12} = 364.5$

$I_{BY} = I_{BG} + Ad^2$

$I_{BY} = \frac{hb^3}{36} + (27)\left[(\frac{2}{3})(6)\right]^2$

$I_{BY} = \frac{9(6)^3}{36} + 27(16) = 54 + 432 = 486 \ \ cm^4$

$A \Rightarrow$

$I_{AG} = \frac{\pi R^4}{4} = \pi R^2 (2)^2$

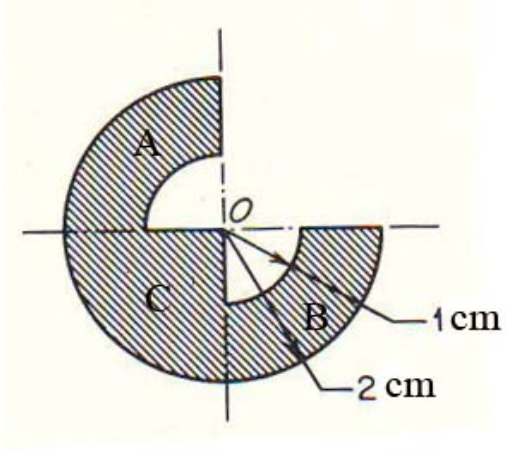
$I_{AX} = \frac{\pi}{4}(1.5)^4 + \pi(4)(1.5)^2$

$I_{AX} = 3.98 + 28.27 = 32.25 \ \ cm^4$

$I_{AY} = \frac{\pi}{4} R^4 + \pi R^2 (4)^2$

$I_{AY} = \frac{\pi}{4}(1.5)^4 + \pi(1.5)^2(16)$

$I_{AY} = 3.98 + 113.1 = 117.1 \ \ cm^4$



$Jx + Iy = Jo$

$I_{Ax} = 0.1963R_2^4 - 0.1963R_1^9$

$I_{Ax} = 0.1963(16-1) = 2.944 \ \ cm^4$

$for \ \ similarity \Rightarrow \quad I_{Bx} = 2.944 \ \ cm^4$

$Icx = 0.1963R^4 = 0.1963(16) = 3.14 \ \ cm^4$

$Ix = 3.14 + 2.944 + 2.944 = 9.028 \ \ cm^4$

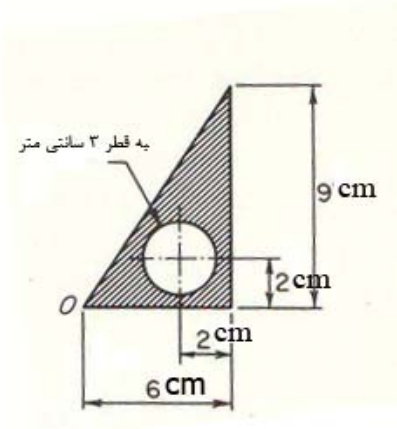
$I_{AY} = I_{AX} = 2.944$

$I_{BY} = I_{AY} = 2.944$

$Icx = Icy = 3.14$

$J_O = 2Ix = 2(9.028) = 18.056 \ \ cm^4$

6-36 شعاع چرخش قطبی، شکل مرکب هاشورزده زیر را بدست آورید.



$$I_X = I_{BX} - I_{AX}$$

$$Ix = 364.5 - 32.25 = 332.25 \ \ cm^4$$

$$Iy = I_{BY} - I_{AY}$$

$$Iy = 486 - 117.1 = 368.9 \ \ cm^4$$

$$A = \frac{6\times 9}{2} - \pi(1.5)^2$$

$$A = 27 - 7.1 = 19.9 \ \ cm^2$$

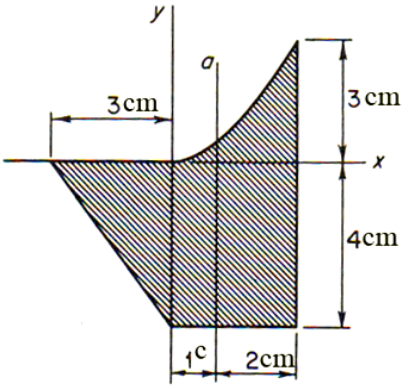
$$J_O = Iy + Ix = 368.9 + 332.25 = 701.15 \ \ cm^4$$

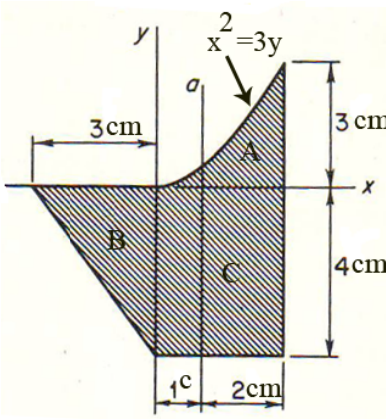
$$K^2_{GO}(A) = Jo$$

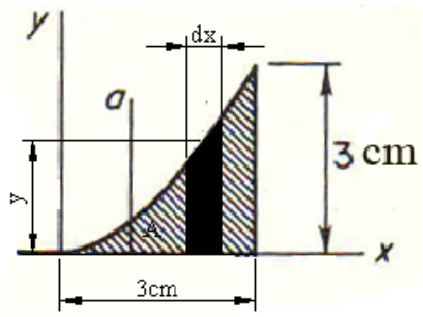
$$K^2_{GO}(A) = \frac{701.15}{19.9}$$

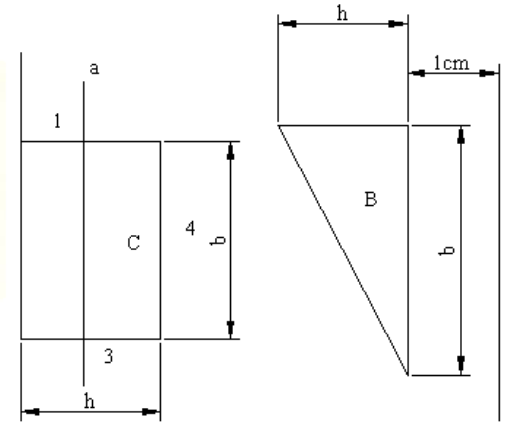
$$K_{GO} = 5.935 \ \ cm$$

6-44 گشتاور لختی سطح، شکل مرکب هاشورزده زیر را نسبت به محور a بدست آورید، به شرط اینکه معادله سهمی $3y = x^2$ باشد.









$$dA = y \ dx$$

$$dI_{aA} = (x-1)^2(y)(dx)$$

$$dI_{aA} = (x^2 + z - 2x)(\frac{x^3}{3})dx$$

$$I_{aA} = \int_0^3 (\frac{x^4}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3)dx$$

$$I_{aA} = 16.2 + 3 - 13.5 = 2.7 \ \ cm^4$$

$$B \Rightarrow \quad I_{aB} = \frac{bh^3}{12} + Ad^2$$

$$I_{aB} = \frac{4\times 3^3}{12} + 12(1.5-1)^2$$

$$I_{aB} = 9 + 3 = 12 \ \ cm^4$$

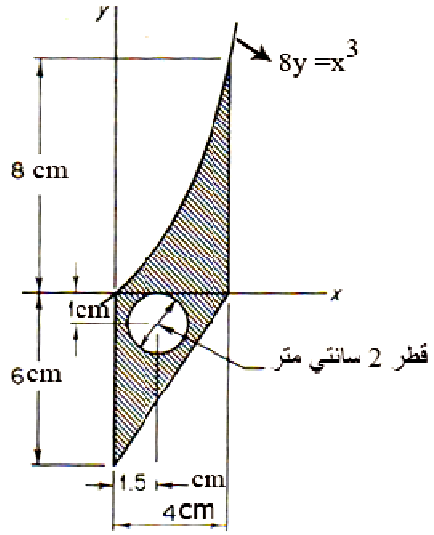
$$C \Rightarrow I_{aC} = \frac{bh^3}{36} + Ad^2$$

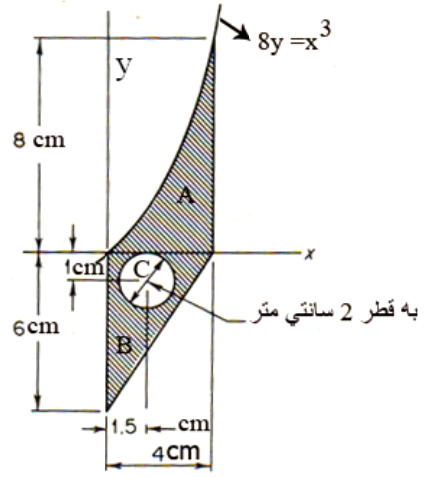
$$I_{aC} = \frac{4\times 3^3}{36} + 6(1+1)^2$$

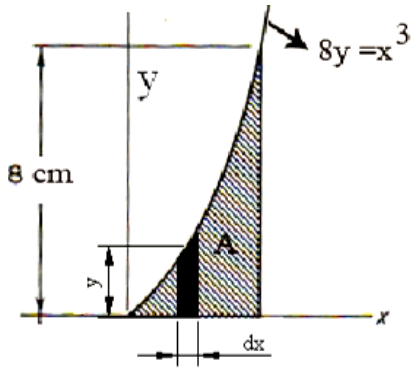
$$I_{aC} = 3 + 24 = 27 \ \ cm^4$$

$$I_a = 27 + 12 + 5.7 = 44.7 \ \ cm^4$$

6- 46 شعاع چرخش سطح، شکل مرکب هاشورزده زیر را نسبت به محور x بدست آورید، به شرط اینکه معادله سهمی $8y = x^3$ باشد.







$A \Rightarrow$

$$dI_x = \frac{bh^3}{3} = \frac{dx}{3}(y^3) = \frac{dx}{3}(\frac{x}{8})^3$$

$$dIx = \frac{1}{1536}x^9\ dx$$

$$Ix = \int_0^4 \frac{1}{1536}x^9\ dx = \frac{1}{1536}\times\frac{1}{10}x^{10}\Big]_6^4$$

$$Ix = 68.26\ \ cm^4$$

$B \Rightarrow$

$$Ix = \frac{bh^3}{12} = \frac{4\times 6^3}{12} = 72\ \ cm^4$$

$C \Rightarrow$

$$Ix = \frac{5\pi R^2}{4} = \frac{5\pi}{4} = 3.92\ \ cm^4$$

$$I_X = I_{XB} + I_{XA} - I_{XC}$$

$$Ix = 68.26 + 72 - 3.92 = 136.34\ \ cm^4$$

$$dA = ydx \qquad A = \int_0^d \frac{x^3}{8}dx$$

$$Area(A) = \frac{1}{8}\times\frac{1}{4}x^4\Big]_0^4 = 8\ \ cm^2$$

$$Area(B) = \frac{6\times 4}{2} = 12\ \ cm^2$$

$$Area(C) = \pi R^2 = \pi = 3.14\ \ cm^2$$

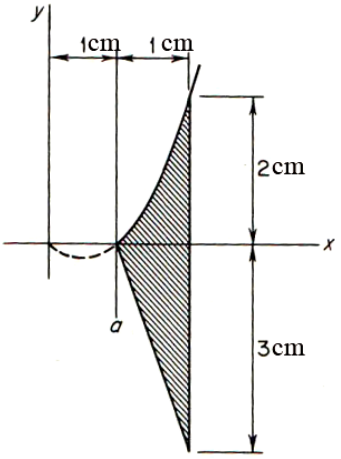
$$Total\ \ Area = 8 + 12 - 3.14 = 16.86\ \ cm^2$$

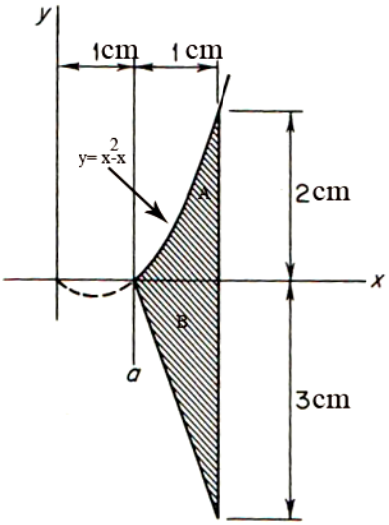
$$K^2{}_{GX} = I_X$$

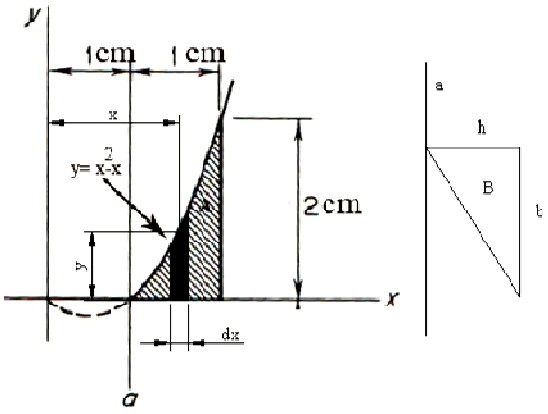
$$K^2{}_{GX} = \frac{136.34}{16.86}$$

$$K_{GX} = 2.84\ \ cm$$

6-48 گشتاور لختی سطح، شکل مرکب هاشورزده زیر را نسبت به محور a بدست آورید، به شرط اینکه معادله سهمی $y = x^2 - x$ باشد.







$dA = ydx$

$dI_{aA} = (x-1)^2 dA$

$dI_{aA} = (x-1)^2 y\ dx$

$dI_{aA} = (x^2 + 1 - 2x)(x^2 - x)dx$

$dI_{aA} = (x^4 - x^3 + x^2 - x - 2x^3 + 2x^2)dx$

$dI_{aA} = (x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x)dx$

$I_{aA} = \int_1^2 (x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x)dx$

$I_{aA} = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2$

$I_{aA} = \frac{1}{5}(2)^5 - \frac{3}{4}(2)^4 + (2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{5}(+1)$

$+\frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{2}$

$I_{aA} = 6.4 - 12 + 8 - 2 - 0.2 + 0.75 - 1 + 0.5$

$I_{aA} = 0.45\ cm^4$

$I_{aB} = \frac{bh^3}{36} + Ad^2$

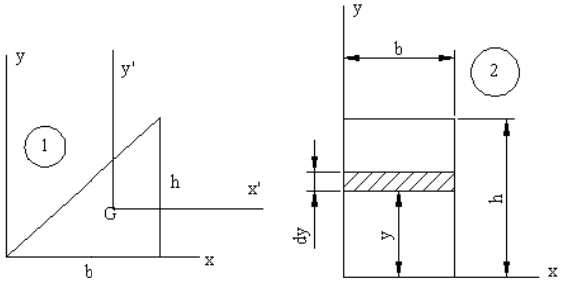
$I_{aB} = \frac{3\times 1^3}{36} + 1.5(\frac{2}{3})^2$

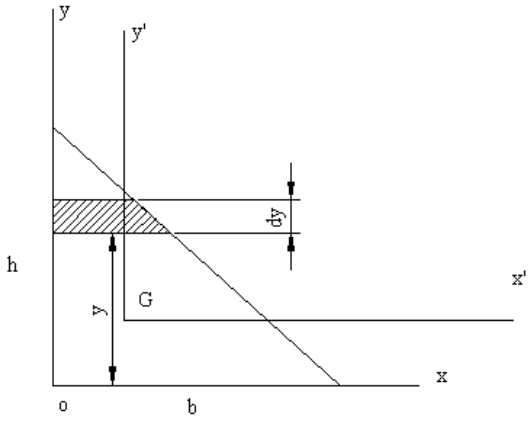
$I_{aB} = 0.0833 + 0.666 = 0.75\ cm^4$

$I_a = I_{aA} + I_{aB}$

$Ia = 0.75 + 0.45 = 1.2\ cm^4$

نکاتی چند در باره، حاصل ضرب لختی سطح و تعیین فرمول آن





$$dA = xdy$$

$$dIxy = \overline{x}\,\overline{y}\ dA$$

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} = 1 - y/h$$

$$Ixy = \int xy\ dA$$

$$Ixy = \int_D^h \frac{x}{2} y \times dy = \int_0^h \frac{x^2}{2} y^{dy}$$

$$Ixy = \frac{1}{2}\int_0^h b^2 (1 - y/h)^2 y\ dy$$

$$Ixy = \frac{b^2}{2}\int_0^h (y + \frac{y^3}{h^2} - 2y^2/h)dy$$

$$Ixy = \frac{b}{2}\left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{y^4}{4h^2} - \frac{2y^3}{3h}\right]_0^h$$

$$Ixy = \frac{b^2}{2}\left[\frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{2h^2}{3}\right]$$

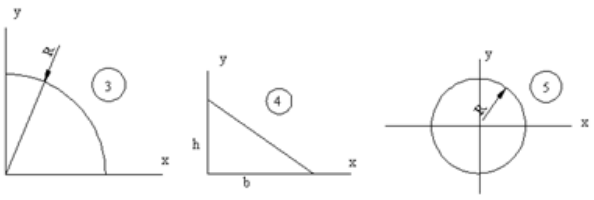
$$Ixy = \frac{b^2h^2}{2}\left[\frac{6+3-8}{12}\right] = \frac{b^2h^2}{24}$$

$$Ixy = Ix'y' + A\overline{X_G}\ \overline{Y_G}$$

$$\overline{X}_G = \frac{1}{3}b \qquad \overline{Y}_G = \frac{1}{3}h$$

$$\frac{b^2h^2}{24} = Ix'y' + \frac{1}{3}b \times \frac{1}{3}h \times \frac{bh}{2}$$

$$Ix'y' = -\frac{b^2h^2}{72}$$



$$1 \Rightarrow \begin{cases} Ixy = \dfrac{b^2h^2}{8} \\ Ix'y' = \dfrac{b^2h^2}{72} \end{cases}$$

$$2 \Rightarrow \begin{cases} dA = xdy \\ IXy = \int_0^h (y)(\frac{y}{2})dA \\ Ixy = \int_0^h y(\frac{y}{2})(x)dy \\ Ixy = \int_0^h \frac{b^2}{2} y dy = \frac{b^2}{2}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^h \end{cases}$$

$$Ixy = \frac{b^2h^2}{4}$$

$$Ixy = Ix'y' + AX_GY_G$$

$$\frac{b^2h^2}{4} = Ix'y' + bh(\frac{b}{2})(h/2)$$

$$Ix'y' = \frac{b^2h^2}{4} - \frac{b^2h^2}{4} = 0$$

$$3 \Rightarrow Ixy = R^4/8$$

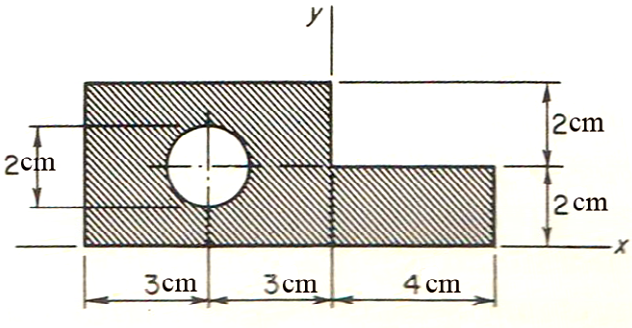
$$5 \Rightarrow Ixy = 0$$

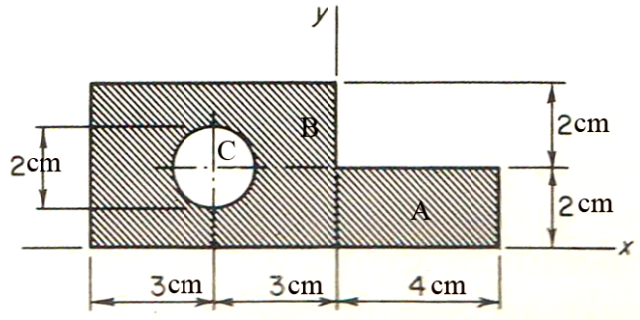
$$4 \Rightarrow Ixy = \frac{b^2h^2}{24}$$

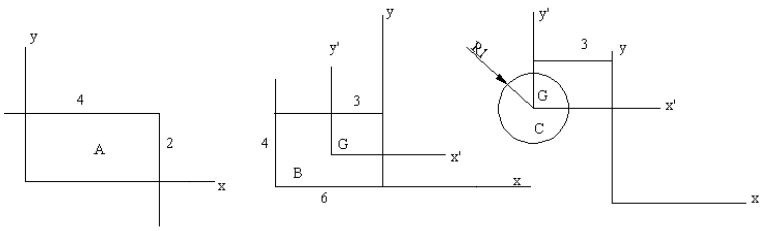
$$4 \Rightarrow Ix'y' = -\frac{b^2h^2}{72}$$

6-50 با انتگرال گیری مستقیم حاصل ضرب لختی سطح، شکل زیر را نسبت به محورهایی که از مرکز ثقل این جسم بگذرد و موازی محور x و y باشد را بدست آورید.

6-52 حاصل ضرب لختی سطح، شکل مرکب هاشور زده زیر را نسبت به محور x و y بدست آورید.







$$Ixy = I_A xy + I_B xy - I_C xy$$

$$A \Rightarrow I_A xy = \frac{b^2 h^2}{4} = \frac{4^2 \times 2^2}{4} = 16 \ \ cm^4$$

$$B \Rightarrow Ix'y' = 0$$

$$I_B xy = Ix'y' + \overline{X_G}\,\overline{Y_G} A$$

$$\overline{X_G} = -3$$

$$\overline{Y_G} = 2$$

$$A = 24$$

$$I_B xy = -3 \times 2 \times 24 = -144 \ \ cm^4$$

$$C \Rightarrow Ix'y' = 0$$

$$Ixy = Ix'y' + \overline{X_G}\,\overline{Y_G} A$$

$$C \Rightarrow A = \pi R^2 = \pi$$

$$\overline{X_G} = -3 \quad \overline{Y_G} = 2$$

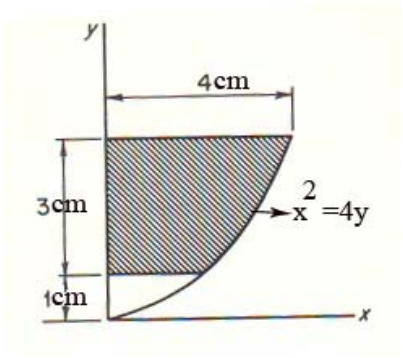
$$Ixy = +2(-3)(\pi) = -6\pi = -18.85 \ \ cm^4$$

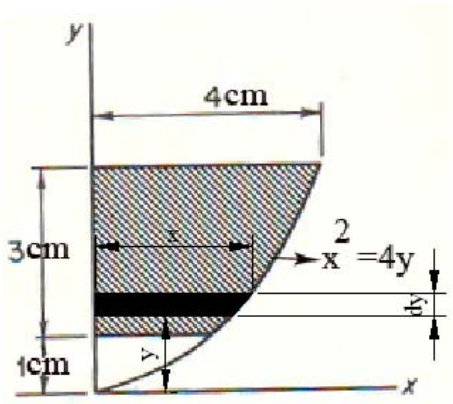
$$Ixy = 16 - 144 - (-18.85)$$

$$Ixy = 16 - 144 + 18.85$$

$$Ixy = -109.2 \ \ cm$$

6-54 حاصل ضرب لختی سطح، شکل هاشورزده زیر را نسبت به محور x و y بدست آورید، به شرط اینکه معادله سهمی $4y = x^2$ باشد.





$$dA = xdy$$

$$dIxy = \overline{X_G}\ \overline{Y_G}\, dA$$

$$Ixy = \int xy \ dA$$

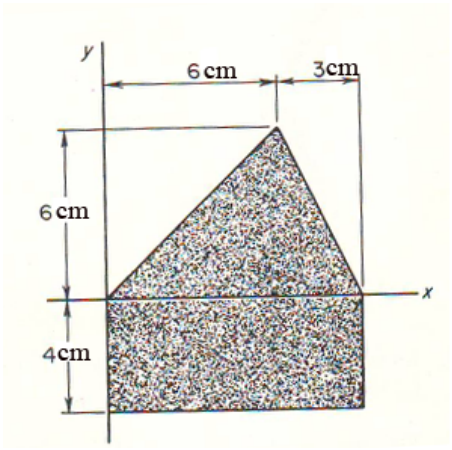
$$Ixy = \int \frac{x}{2}(y)(x)dy = \int_1^4 \frac{x^2}{2}\, y\ dy$$

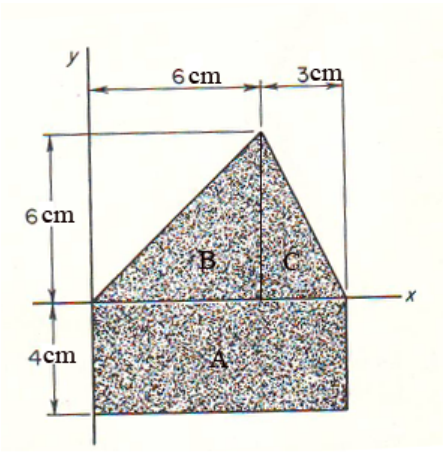
$$Ixy = \frac{1}{2}\int_1^4 (4y)(y)dy$$

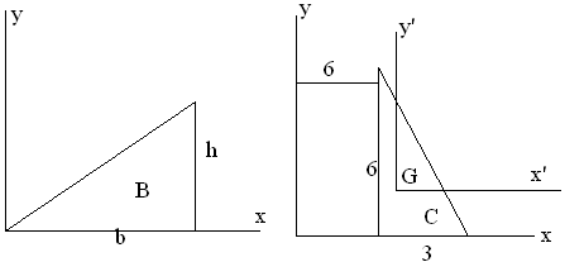
$$Ixy = 2\int_1^4 y^2 dy = 2\left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^4$$

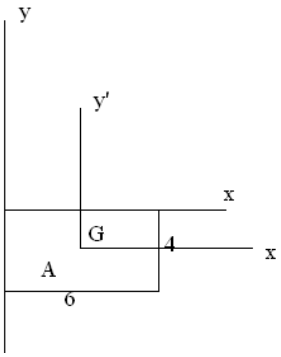
$$Ixy = \tfrac{2}{3}[64-1] = 42 \quad cm^4$$

6-56 حاصل ضرب لختی سطح، شکل مرکب زیر را نسبت به محور x و y بدست آورید.









$$B \Rightarrow \begin{cases} Ixy = \dfrac{b^2h^2}{8} \\ Ixy = \dfrac{6^2\times 6^2}{8} = 162\ cm^4 \end{cases}$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} Ix'y' = -\dfrac{b^2h^2}{72} \\ Ix'y' = -\dfrac{3^2\times 6^2}{72} = -4.5\ cm^4 \\ Ixy = Ix'y' + A\overline{X_G}\ \overline{Y_G} \\ A = {}^{18}\!/_{2} = 9\ cm^2 \\ \overline{X_G} = 6 + \dfrac{1}{3}(3) = 7 \qquad \overline{Y_G} = \dfrac{1}{3}(6) = 2 \end{cases}$$

$$Ixy = -4.5 + 9(7)(2) = 121.5\ cm^4$$

$$A \Rightarrow \begin{cases} I\bar{x}\bar{y} = 0 \\ Ixy = I\bar{x}\bar{y} + A\bar{y}G\bar{y}G \end{cases}$$

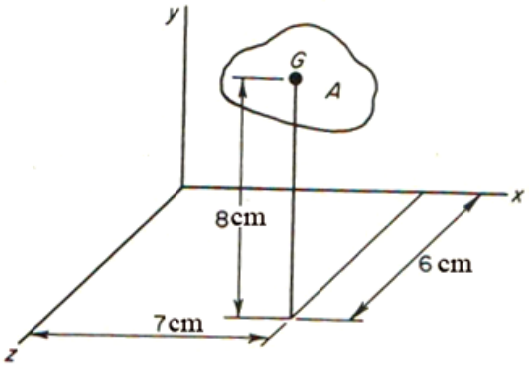
$$A = 36 \quad \overline{X_G} = 4.5 \qquad \overline{Y_G} = -2$$

$$Ixy = 0 + 36(4.5)(-2) = -324\ cm^4$$

$$Ixy = 162 + 121.5 - 324$$

$$\left[Ixy = -40.5\ cm^4\right]\ ans.$$

6-66 جسم A به وزن 196KG و مرکز ثقل آن به مختصات (7,8,6) است، گشتاور لختی جرم ، شکل A نسبت به محور X $2300N-cm^2$ می باشد، گشتاور لختی جرم، شکل A را نسبت به محوری که از نقطه (3,2,1) گذشته و موازی x باشد را حساب کنید. همه اندازه ها بر حسب cmاست.



$m_A = 196\ Kg \qquad G(7,8,6)$

$I_x = 2300\ \ N-cm^2 \qquad B(3,2,1)$

$$m = \frac{196}{9.8} = 20 \quad N$$

$$d^2 = y^2 + z^2$$

$$d^2 = 36 + 64 = 100$$

$$Ix = I_G + md^2$$

$$I_G = 2300 - (20)(100)$$

$$I_G = 300 \quad N-cm^2$$

$$d'^2 = (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$d'^2 = (8-2)^2 + (6-1)^2$$

$$d'^2 = 36 + 25 = 61\ \ cm^2$$

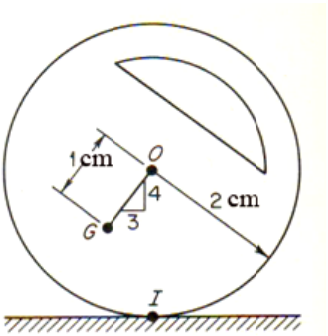
$$I'_X = I_G + md'^2$$

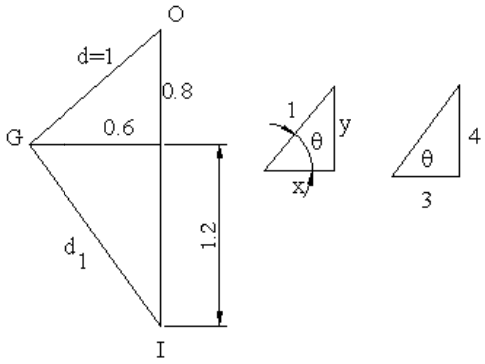
$$Ix = 300 + 20 \times 61$$

$$Ix = 300 + 1220$$

$$\left[Ix = 1520\,N-cm^2\right] ans.$$

6-68 سیلندر شکل زیر به وزن 196Kg که مرکز ثقل آن G است، گشتاور لختی جرم، نسبت به محوری که از مرکز (O) بگذرد، و عمود بر صفحه باشد برابر با $50N-cm^2$ است، گشتاور لختی جرم، این شکل را نسبت به محوری که از نقطه I گذشته و به صفحه کاغذ عمود باشدرا بدست آورید.





$m_A = 196\ \ kg$

$I_0 = 50\ \ N-cm^2$

$I_I = ?$

$T_0 = I_G + md^2$

$m = {}^{196}\!/_{9.8} = 20\ \ N$

$50 = I_G + (20)(1)$

$I_G = 30\ \ N-cm^2$

$I_I = I_G + md_1^{\,2}$

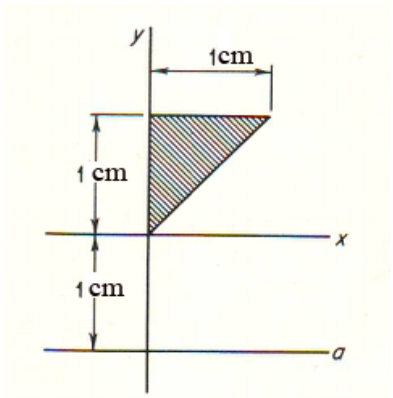
$x = \cos\theta = {}^{3}\!/_{5} = 0.6$

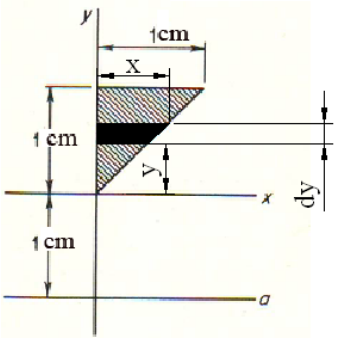
$y = sim\theta = {}^{4}\!/_{5} = 0.8$

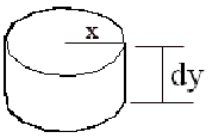
$$d_1^2 = (1.2)^2 + (0.6)^2 \quad d_1^2 = 1.44 + 0.36 = 1.8$$

$$I_I = 30 + (20)(1.8) = 30 + 36 = 66 \quad N - cm^2$$

6-78 شکل هاشورزده زیر حول محور Y دوران می کند، تا حجم همگن حاصل از دورانی به چگالی $\rho = 39.2 Kg/m^3$ بدست آید. گشتاور لختی جرم، حجم توپر حاصل را، نسبت به محور a با روش انتگرال گیری بدست آورید.







$$y = x$$

$$dm = \rho d\forall = \rho(\pi x^2)dy$$

$$m = \int_0^1 \rho\pi y^2 dy = \rho\pi\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1$$

$$m = \rho\pi/3$$

$$I_G = \frac{m}{12}(3R^2 + h^2)$$

$$dI_G = \frac{dm}{12}(3x^2) = \frac{dmx^2}{4}$$

$$dIa = dI_G + (dm)d^2$$

$$dIa = dI_G + dm(y+1)^2$$

$$dIa = \frac{dmx^2}{4} + (y+1)^2 dm$$

$$dIa = \frac{\rho\pi x^4}{4}dy + (y^2 + 1 + 2y)(\pi\rho y^2)dy$$

$$Ia = \frac{\rho\pi}{4}\int_0^1 y^4 dy + \rho\pi\int_0^1 (y^4 + y^2 + 2y^3)dy$$

$$Ia = \frac{\rho\pi}{4}\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 + \rho\pi\left[\frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{2}{4}y^4\right]_0^1$$

$$Ia = \frac{\rho\pi}{20} + \rho\pi\frac{31}{30}$$

$$\rho = \frac{39.2}{9.8} = 4 \ N/m^3$$

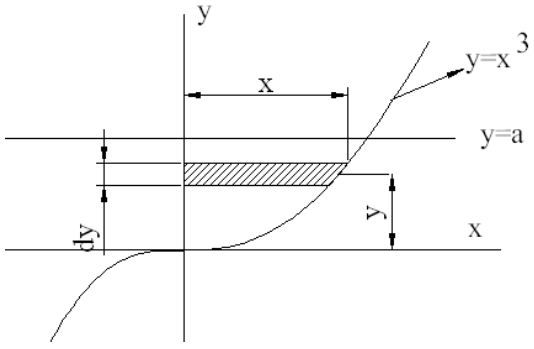
$$\rho = \frac{4}{10^6} = 4x10^{-6} \ N/cm^3$$

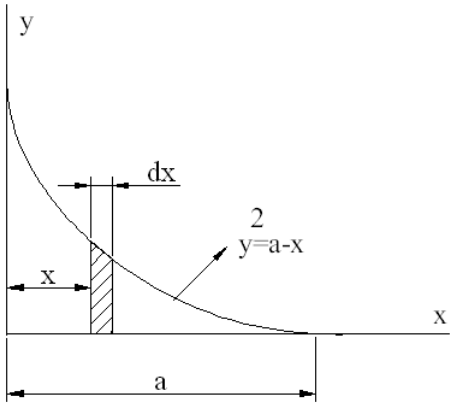
$$Ia = (\frac{4\pi}{20} + 4\pi\frac{31}{30})x10^{-6}$$

$$Ia = (0.628 + 12.98)x10^{-6}$$

$$Ia = 13.61x10^{-6} \quad N - cm^2$$

6-80 سطح محصور بین سهمی $y = x^3$ و خط $y = a$ و محور y ، حول محور x دوران می کند، گشتاور لختی جرم، حجم توپر حاصل را نسبت به محور x بر حسب m و a بدست آورید. اگر چگالی جسم برابر با $\rho = 450 Kg/m^3$ و $a = 8 \ cm$ و همه ابعاد بر حسب cm باشد، گشتاور لختی جرم را حساب کنید.





$$Ix = \frac{1}{2}mR^2$$

$$m = \pi\rho\int_0^a (a-x)dx = \pi\rho\left[ax - \frac{1}{2}x^2\right]_0^a$$

$$m = \pi\rho\left[a^2 - \frac{1}{2}a\right] = \frac{\pi\rho}{2}a^2$$

$$dIx = \frac{dm}{2}R^2 = \frac{dm}{2}y^2$$

$$dIx = \frac{1}{2}(\rho\pi y^2)y^2dx$$

$$Ix = \frac{\rho\pi}{2}\int_0^a (a-x)^2dx = \frac{\rho\pi}{2}\left[a^2x + \frac{1}{3}x^3 - ax^2\right]_0^a$$

$$Ix = \frac{\rho\pi a^2}{2}\times a/3 = ma/3$$

$$\left[Ix = ma/3\right]\ Ans.$$

$$dIy = dI_G + dmd^2 = \frac{dm}{4}y^2 + dmy^2$$

$$dIy = \frac{1}{4}(a-x)(a-x)\rho\pi dx + \rho\pi(a-x)x^2dx$$

$$Iy = \frac{\rho\pi}{4}\int_0^a (a-x)^2dx + \rho\rho\int_0^a (ax^2 - x^3)dx$$

$$Iy = \frac{\rho\pi}{4}(\frac{a^3}{3}) + \rho\pi\left[\frac{a}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^a$$

$$Iy = \frac{\rho\pi a^3}{12} + \rho\pi\left[\frac{a^4}{3} - a^4/4\right)$$

$$dm = \rho d\forall = \rho(2\pi y)(x)dy$$

$$m = \int_0^a \rho\, 2\pi y y^{1/3}dy$$

$$m = 2\rho\pi\int_0^a y^{4/3}dy$$

$$m = 2\rho\pi\left[\frac{3}{7}y^{7/3}\right]_0^a$$

$$m = 2\rho\pi\times\frac{3}{7}a^{7/3} = \frac{6\rho\pi}{7}a^{7/3}$$

$$dIx = y^2dm = 2\rho\pi y\times y^2dy$$

$$dIx = 2\rho\pi y^3(y^{1/3})dy$$

$$Ix = \int_0^a 2\rho\pi\ \ y^{10/3}dy = 2\rho\pi\left[\frac{3}{13}y^{13/3}\right]_0^a$$

$$Ix = 2\rho\pi\frac{3}{13}a^{13/3}$$

$$Ix = \frac{6\pi\rho}{13}a^{13/3} = \frac{6\rho\pi}{13}a^{13/3} = \frac{6\rho\pi}{13}a^{6/3}.a^{7/3}$$

$$Ix = \frac{6\rho\pi}{13}a^2\times\frac{7m}{6\rho\pi}$$

$$Ix = \frac{7}{13}ma^2$$

$$\rho = 450\ Kg/m^3 = 450x10^{-6}\ Kg/cm^3$$

$$m = \frac{6\pi}{7}(\frac{450}{9.8})x10^{-6}(8)^{7/3} = 0.0158\ N$$

$$Ix = \frac{7}{13}(0.158)(8)^2$$

$$\left[Ix = 0.545\ N-cm^2\right]\ Ans.$$

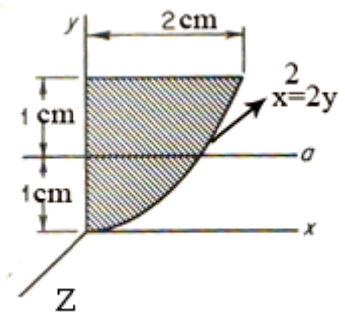
6-82 سطح محصور بین سهمی $y^2 = a - x$ و محور y ، حول محور x دوران می کند، گشتاور لختی جرم، حجم توپر حاصل را نسبت به محور x و y برحسب m و a بدست آورید.

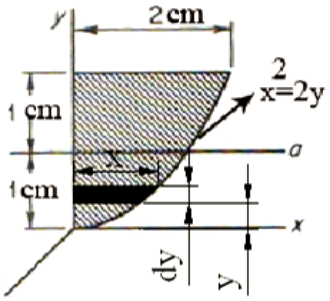
$$Iy = \frac{\rho\pi a^3}{12} + \frac{\rho\pi a^4}{12}$$

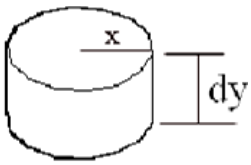
$$Iy = \frac{ma}{6} + \frac{ma^2}{6} = \frac{m}{6}(a + a^2)$$

$$\left[Iy = \frac{m}{6}(a + a^2) \right] Ans.$$

6-84 شکل هاشورزده منحنی $(2y = x^2)$ حول محور y دوران می کند، تا حجم ناهمگن حاصل از دورانی به چگالی ρ که مستقیماً متناسب است با فاصله ای از صفحه xz ($\rho = ky$) بدست آید، مطلوبست گشتاور لختی جرم.







$$y = ax^2 \qquad a = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 \qquad 2 = 4a$$

$$dm = \rho d\forall = \rho\pi x^2 dy$$

$$dm = ky\pi x^2 dy = ky\pi(2y)dy$$

$$m = \int_0^2 2k\pi y^2 dy = 2k\pi\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^2$$

$$m = zk\rho \times \frac{1}{3}(8) = \frac{16k\pi}{3}$$

$$I_G = \frac{m}{12}(3R^2 + h^2)$$

$$dI_G = \frac{dm}{12}(3x^2 + dy^2) = \frac{dm}{4}x^2$$

$$dIa = dI_G + (dm)d^2$$

$$dIa = \frac{1}{4}(2k\pi y^2)(x^2)dy + 2ky^2x^2dy \times (1-y)^2$$

$$dIa = \frac{\pi}{2}(ky^2)(2y)dy + (2k\pi y^2)(1-y)^2 dy$$

$$Ia = \int_0^2 \frac{k\pi}{4}(4y^3)dy + 2k\pi\int_0^2 (y^2 + y^4 - 2y^3)dy$$

$$Ia = k\pi\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^2 + 2\pi k\left[\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - \frac{2}{4}y^4\right]_0^2$$

$$Ia = \frac{k\pi}{4}(16) + 2\pi k\left[\frac{8}{3} + \frac{32}{5} - \frac{16}{2}\right]$$

$$Ia = 4k\pi + 2\pi k(\frac{80 + 192 - 240}{30})$$

$$Ia = 4k\pi + \frac{2\pi k(32)}{30}$$

$$Ia = 12.56k + 6.7k$$

$$\left[Ia = 19.27\ k\right] ans.$$

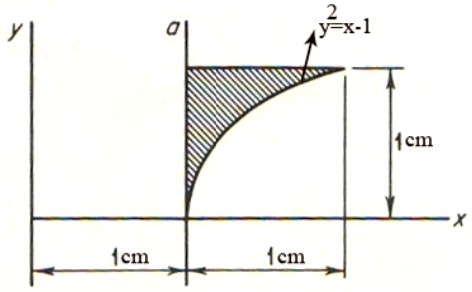
$$Ia = \frac{16k\pi}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{16k\pi}{3} \times \frac{32}{10 \times 8}$$

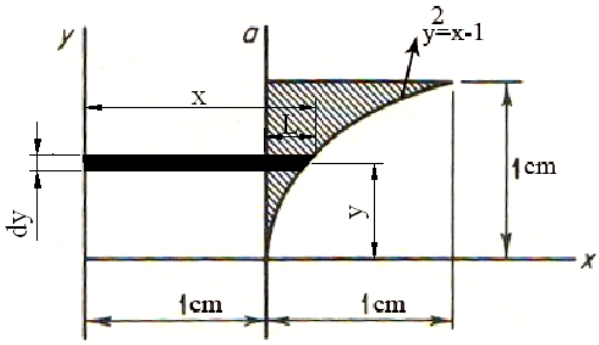
$$Ia = \frac{3}{4}m + \frac{32}{80}m$$

$$Ia = 0.75m + 0.4m$$

$$\left[Ia = 1.15m\right]\ Ans.$$

6-86 شکل هاشورزده زیر حول محور a دوران می کند، چگالی حجم همگن حاصل $\rho = 19.6Kg/m^3$ است، گشتاور لختی جرم، حجم توپر را نسبت به محور y بدست آورید، به شرط اینکه معادله سهمی برابر $y^2 = x - 1$ باشد.





$y^2 = x-1$

$\rho = 19.6\dfrac{Kg}{m^3}$

$dm = \rho d\forall = \rho(L)^2 \pi dy$

$dm = \rho d\forall = \rho(x-1)^2 \pi dy$

$Ia = \dfrac{m}{2}R^2 \quad dI_G = \dfrac{dm}{2}(x-1)^2$

$dIy = I_G + md^2$

$dIy = dI_G + dm(1)^2$

$dIy = \dfrac{1}{2}(x-1)^2(\rho)(x-1)^2 \pi dy + \rho(x-1)^2 \pi dy$

$Iy = \int_0^1 \rho\dfrac{\pi}{2}(x-1)^4 dy + \int_0^1 \rho\pi(x-1)^2 dy$

$Iy = \dfrac{\rho\pi}{2}\int_0^1 y^8 dy + \rho\pi\int_0^1 y^4 dy$

$Iy = \dfrac{\rho\pi}{2}\left[\dfrac{1}{q}y^9\right]_0^1 + \rho\pi\left[\dfrac{1}{5}y^5\right]_0^1$

$Iy = \dfrac{\rho\pi}{18} + \dfrac{\rho\pi}{5}$

$m = \int_0^1 \rho\pi\left(y^d\right)dy = \pi\rho/5$

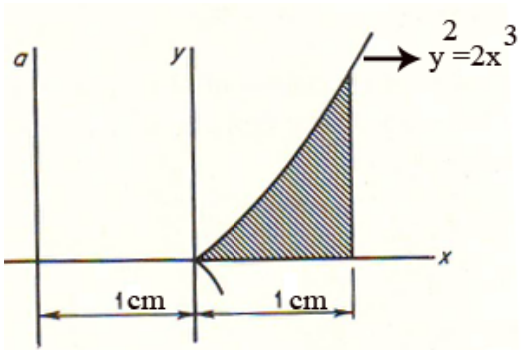
$\rho = \dfrac{19.6}{9.8} = 2\ N/m^3 = 2x10^{-6}\ N/cm^3$

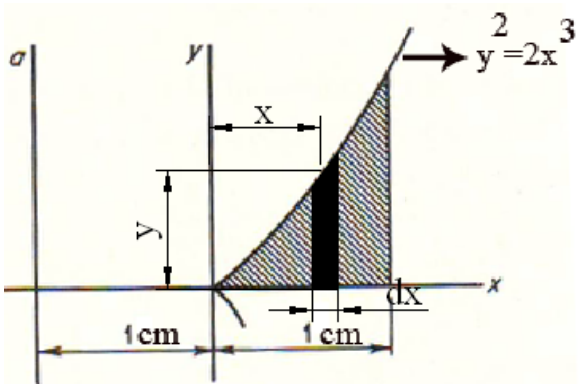
$Iy = (\dfrac{2\pi}{18} + \dfrac{2\pi}{5})x10^{-6}$

$Iy = (0.349 + 1.2566)x10^{-6}$

$\left[Iy = 1.606x10^{-6}\ N-cm^2\right]$ Ans.

6-88 شکل هاشورزده زیر حول محور x دوران می کند، چگالی حجم همگن حاصل $\rho = 149Kg/m^3$ است، گشتاور لختی جرم ، حجم توپر را نسبت به محور x و a بدست آورید به شرط اینکه معادله سهمی برابر با $y^2 = 2x^3$ باشد.





$I_Y = ?\quad Ia = ?$

$\rho = 190\dfrac{Kg}{m^3}$

$y^2 = 2y^3$

$dm = \rho d\forall = \rho(\rho y^2)dx$

$dIx = \dfrac{dm}{2}R^2 = \dfrac{dm}{2}y^2$

$dIx = \dfrac{1}{2}(\rho\pi y^2)y^2 dx$

$dIy = \dfrac{\pi\rho}{2}y^4 dx = \dfrac{\rho\pi}{2}(2x^3)^2 dx$

$dIx = 2\rho\beta\pi\, x^6 dx \qquad Ix = 2\pi\rho\int_0^1 x^6 dx$

$$Ix = 2\rho\pi\left[\frac{1}{7}\right] = \frac{2\pi}{7}(\frac{149}{9.8}) = 13.65\ \ N-cm^2$$

$\left[Ix = 13.65\ \ N-cm^2\right]$ *Ans.*

$$I_G = \frac{m}{12}(3R^2 + h^2)$$

$$dI_G = \frac{dm}{12}(3y^2 + dx^2) = \frac{dm}{4}y^2$$

$$dIa = dI_G + (dm)d^2$$

$$dIa = \frac{dm}{4}y^2 + dm(1+x)^2$$

$$Ia = \frac{1}{4}\int_0^1 \rho\pi y^2 y^2 dx + \int_0^1 \rho\pi y^2 (1+x)^2 dx$$

$$Ia = \frac{\rho\pi}{4}\int_0^1 (y^4)dx + \rho\pi\int_0^1 2x^3(1+x^2+2x)dx$$

$$Ia = \frac{\rho\pi}{4}\int_0^1 (2x^3)^2 dx + \rho\pi\int_0^1 (2x^3 + 2x^5 + 4x^4)dx$$

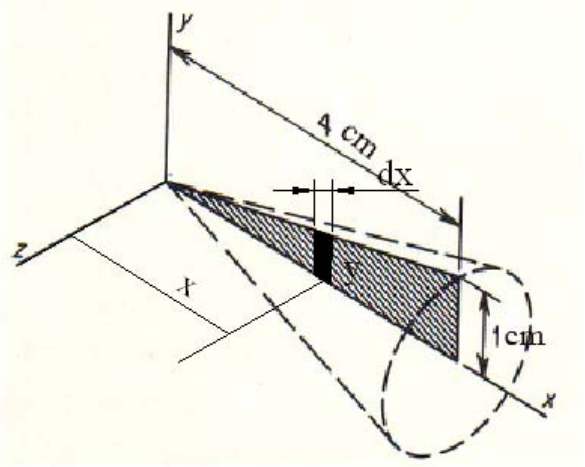
$$Ia = \rho\pi\left[\frac{1}{7}\right] + \rho\pi\left[\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{\Delta x^5}{5}\right]_0^1$$

$$Ia = \frac{\rho\pi}{7} + \rho\pi\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4/5\right] = \frac{149\pi}{7(9.8)} + (\frac{149\pi}{2(9.8)}) + \frac{4x149\pi}{5(9.8)}$$

$Ia = 6.829 + 78.1$

$\left[Ia = 84.9\ \ N-cm\right]$ *Ans.*

6-90 مثلث هاشورزده شکل زیر حول محور x دوران می کند، گشتاور لختی جرم، حم ناهمگن حاصل را نسبت به محور y بر حسب m بدست آورید. به شرط اینکه چگالی حجم توپر حاصل متناسب با مجذور فاصله آن از صفحه zy باشد. ($\rho = kx^2$)



$Iy = ?\qquad \rho = kx^2$

$$dIy = (\frac{1}{4})k\pi\frac{Y^4}{16}(\frac{x^2}{16})dx + k\pi\, x^4/16\,(x^2)dx$$

$$Iy = 1/4\int_0^4 k\pi\frac{x^6}{259}dx + \int_0^4 \frac{K\pi}{16}x^6 dx$$

$$Iy = 1/4\,\frac{k\pi}{256}\times\frac{1}{7}(4)^7 + \frac{k\pi}{16}\times\frac{1}{7}(4)^7$$

$$Iy = \frac{16}{7}k\pi + \frac{1024}{7}k\pi = \frac{1024}{7}k\pi$$

$$m = \int_0^4 k\pi\frac{x^4}{16}dx = \frac{k\pi}{16}\times\frac{1}{5}(4)^5 = \frac{64}{5}k\pi$$

$$dIy = (\frac{1}{4})k\pi\frac{Y^4}{16}(\frac{x^2}{16})dx + k\pi\, x^4/16\,(x^2)dx$$

$$Iy = 1/4\int_0^4 k\pi\frac{x^6}{259}dx + \int_0^4 \frac{K\pi}{16}x^6 dx$$

$$Iy = 1/4\,\frac{k\pi}{256}\times\frac{1}{7}(4)^7 + \frac{k\pi}{16}\times\frac{1}{7}(4)^7$$

$$Iy = \frac{16}{7}k\pi + \frac{1024}{7}k\pi = \frac{1024}{7}k\pi$$

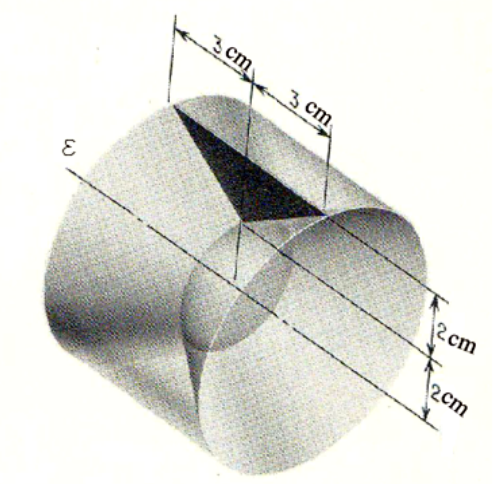
$$m = \int_0^4 k\pi\frac{x^4}{16}dx = \frac{k\pi}{16}\times\frac{1}{5}(4)^5 = \frac{64}{5}k\pi$$

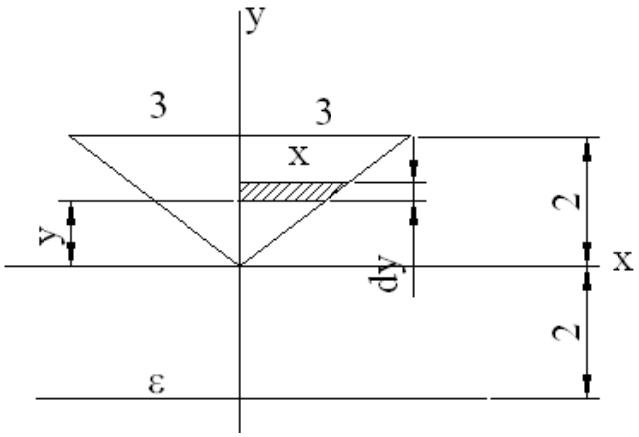
$$k\pi = 5m/64$$

$$Iy = \frac{1040}{7}\times\frac{5m}{64} = 11.61m$$

$\left[Iy = 11.61m\ \ \right]$ *Ans.*

6-92 مثلث شکل زیر نسبت به محور (ξ) دوران می کند، گشتاور لختی جرم، حجم همگن حاصل را نسبت به محور (ξ) بدست آورید. اگر چگالی جسم برابر با $\rho = 0.039 Kg/m^3$ باشد.





$$\frac{2-y}{2} = \frac{3-x}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x$$

$$\rho = 0.039 Kg/cm^3$$

$$dm = \rho d\forall$$

$$dm = \rho(2\pi)(y+2)(x)dy$$

$$dI'_{\varepsilon} = dm(y+2)^2$$

$$dI'_{\varepsilon} = \rho(2\pi)(y+2)^3(x)dy$$

$$dI_{\varepsilon} = 2dI'_{\varepsilon}$$

$$dI_{\varepsilon} = 4\pi\rho(y+2)^3(\tfrac{3}{2}y)dy$$

$$dI_{\varepsilon} = \int_0^2 4\rho\pi(y+2)^3(\frac{3}{2}y)dy$$

$$dI_{\varepsilon} = 6\rho\pi\int_0^2 (y^3+8+6y^2+12y)ydy$$

$$dI_{\varepsilon} = 6\rho\pi\int_0^2 (y^4+8y+6y^3+12y^2)dy$$

$$dI_{\varepsilon} = 6\rho\pi\left[\frac{1}{5}y^5+\frac{8}{2}y^2+\frac{6}{4}y^4+\frac{12}{3}y^3\right]_0^2$$

$$dI_{\varepsilon} = 6\rho\pi\left[\frac{1}{5}(2)^5+\frac{8}{2}(2)^2+\tfrac{6}{4}(2)^4 4(2)^3\right]$$

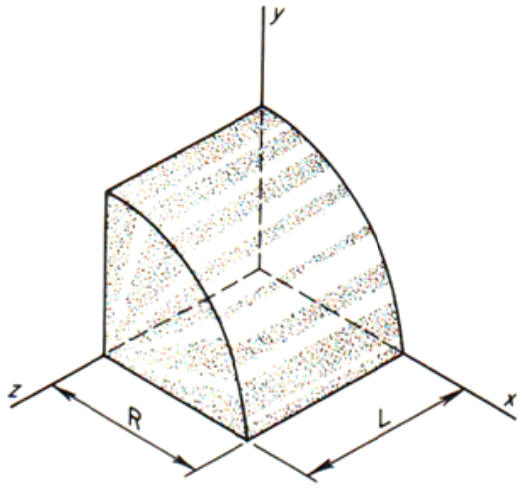
$$dI_{\varepsilon} = 6\rho\pi[6.4+16+24+32]$$

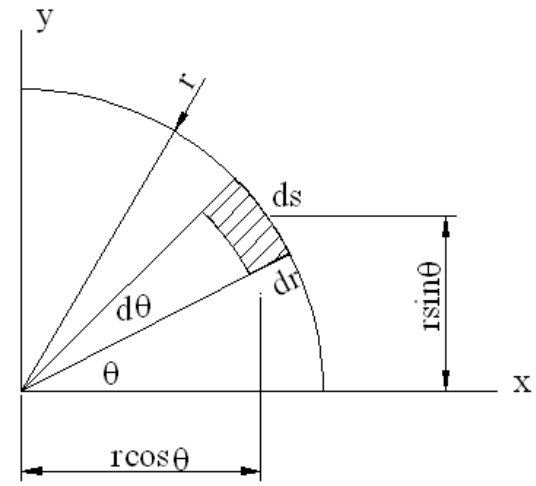
$$dI_{\varepsilon} = 6\rho\pi(78.4)$$

$$dI_{\varepsilon} = 6\pi\times\frac{0.039}{9.8}\times 78.4$$

$$\left[dI_{\varepsilon} = 5.874 \quad N-cm^2\right] \; Ans.$$

6-96 جسم همگن شکل زیر $\frac{1}{4}$ استوانه است، حاصل ضرب لختی جرم، نسبت به محور xy و yz را بدست آورید. (I_{xy} , I_{yz})





$dm = \rho d\forall = \rho dzd\forall = \rho dzds.dr$

$ds = rd\theta$

$dm = \rho rd\theta drdz$

$dI \times y = xy\ dm$

$dI \times y = (r\sin\theta)(r\cos\theta)dm$

$$I_{\times y} = \int_0^{\Pi/2} \int_P^R \int_D^L r^2 sim\theta\cos\theta \times \rho\, rd\theta\ drdz$$

$$I_{\times y} = \rho\int_0^{\Pi/2} \int_0^R \int_0^L r^3 sim\theta\cos\theta\ drd\theta d_2$$

$$I_{\times y} = \rho L\int_0^{h/2} \int_0^r r^3 sim\theta\cos\theta drd\theta$$

$$Iyy = \rho L\int_0^{\Pi/2} sim\theta\cos\theta\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R$$

$$I_{\times y} = \frac{\rho L}{4}R^4\int_0^{\Pi/2} sim\theta\cos\theta\ d\theta = \frac{\rho LR^4}{4}\int_D^{\Pi/2}\frac{1}{2}sim2\theta d\theta$$

$$I_{\times y} = \frac{\rho LR^4}{8}\left[\cos 2\theta\right]_D^{\Pi/2} = \frac{\rho LR^4}{8}\cos\pi = \frac{\rho LR^4}{8}$$

$$m = \rho V = \rho\frac{\pi R^2}{4}\times L = \frac{\rho\pi R^2 L}{4}$$

$$\rho L = \frac{4m}{\pi R^2}$$

$$Ixy = \frac{R^4}{8}x\frac{4m}{\pi R^2}$$

$$\left[Ixy = \frac{R^2}{2\pi}m\right]\ Ans.$$

$$dIyz = yzdm = (r\cos\theta)(z)dm$$

$$Iyz = \int_0^{\Pi/2}\int_0^R\int_0^L zr\cos D\times\rho\, rd\theta drdz$$

$$Iyz = \rho\int_0^{\Pi/2}\ \int^K\ \int_0^L r^2\cos\theta zd\theta drd\tau$$

$$Iyz = \ell\int_0^{\Pi/2}\ \int_0^R r^2\cos\theta\ d\theta dr\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^L$$

$$Iyz = \frac{\rho}{2}L^2\int^{\Pi/2} r^2\cos\theta dr\ d\theta$$

$$Iyz = \frac{\rho L^2}{2}\int_0^{\Pi/2}\cos\theta d\theta\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R$$

$$Iyz = \frac{\rho L^2R^3}{6}\int_D^{\Pi/2}\cos\theta d\theta$$

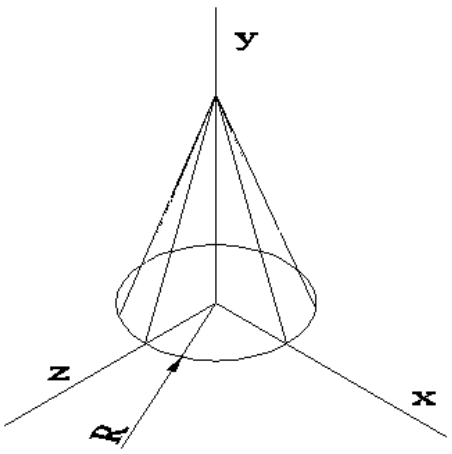
$$Iyz = \frac{\rho L^2R^3}{l}\left[sim\theta\right]_0^{\Pi/2}$$

$$Iyz = \frac{\rho L^2R^3}{6} = \rho L\times\frac{LR^3}{6}$$

$$Iyz = \frac{4m}{\pi R^2}\times L\,R^3/6$$

$$\left[Iyz = \frac{2m}{3\pi}RL\right]\ Ans.$$

6-98 شعاع چرخش جرم، مخروط توپر به ارتفاع h و به شعاع r را حساب کنید.



$$I_y = 3m\,R^2/10$$

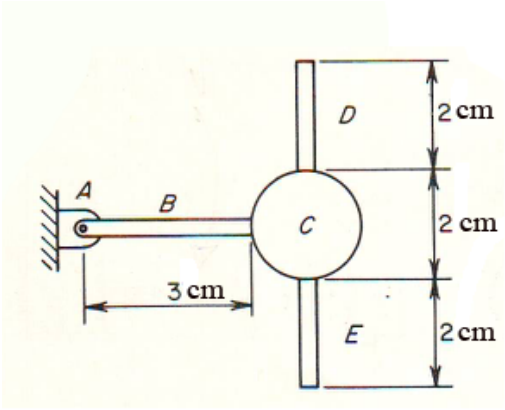
$$K^2{}_G(m) = Iy$$

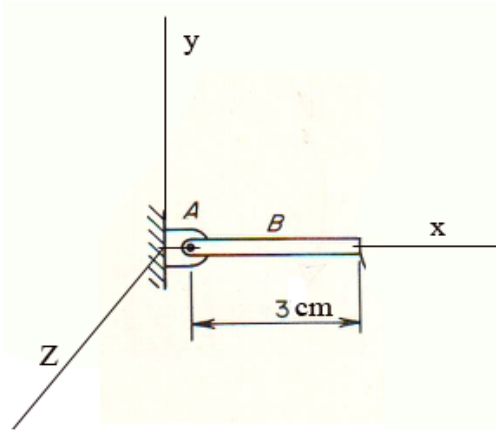
$$K^2{}_G = \frac{m3R^2/10}{m}$$

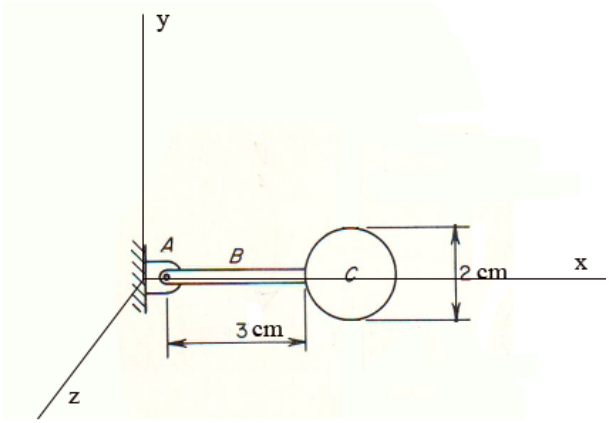
$$K^2{}_G = \frac{3R^2}{10} \qquad K_G = R\sqrt{3/10}$$

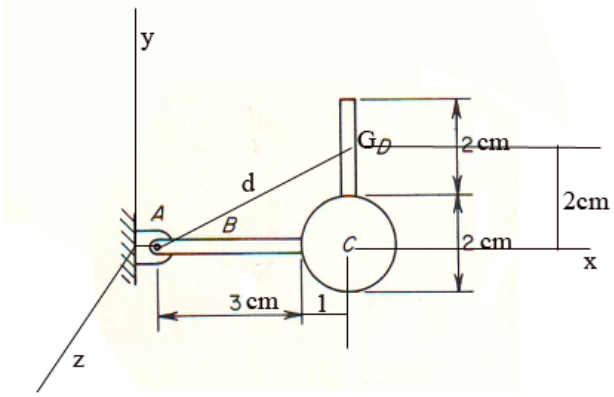
$$K_G = 0.548R$$

6-100 در شکل مرکب زیر میله های B و D و E به ترتیب بـه وزن 39.2 و 19.6 و 19.6 کیلو گرم است، کره C به وزن 980 کیلو گرم می باشد و تمام این جسم حـول محـوری کـه از نقطـه (O) می گذرد و بر صفحه عمود باشد می چرخد، گشتاور لختـی جرم، این شکل را نسبت به این محور حساب کنید.









$$m_B = \frac{39.2}{9.8} = 4\ \ N \qquad m_c = \frac{19.6}{9.8} = 2\ \ N$$

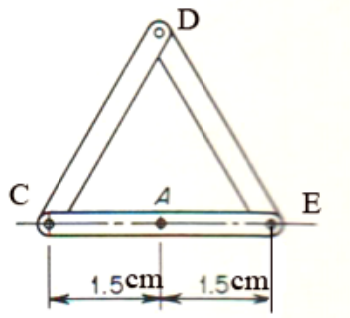
$$m_{D,E} = \frac{980}{9.8} = 10\ \ N$$

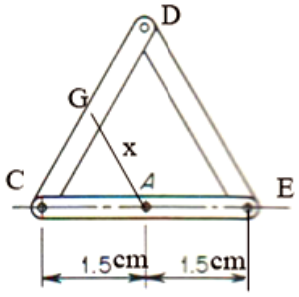
$$B \Rightarrow \begin{cases} I_G = \dfrac{m_B}{12}(3R^2 + h^2) \\ I_G = \dfrac{4}{12}(9) = 3 \\ I_z = I_G + md^2 = 3 + 4(\dfrac{3}{2})^2 \\ Iz = 3 + 9 = 12 \quad N - cm^2 \end{cases}$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} I_G = \dfrac{2mR^2}{5} = \dfrac{2\times 10}{5}(1)^2 = 4 \\ I_Z = I_G + md^2 = 4 + 10\times(3+1)^2 \\ I_Z = 4 + 160 = 164 \quad N-cm^2 \end{cases}$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} I_G = \dfrac{2}{12}(4) = 8/12 \\ I_Z = I_G + md^2 \\ d^2 = 4 + 16 \\ I_Z = 8/12 + 2\times(16+4) = 0.66 + 40 = 10.66 \\ I_Z = 40.66 \quad N-cm^2 \\ I_Z = 12 + 164 + 40.66 + 40.66 = 257.33 \\ \left[I_Z = 257.33 \ \ N-cm^2\right] \ Ans. \end{cases}$$

6-102 سه میله همگن به وزن ۳نیوتن به صورت مثلث به طول 3cmمطابق شکل زیر قرار گرفته اند، گشتاور لختی جرم، این شکل را نسبت به محوری که از نقطه A گذشته و بر صفحه کاغذ عمود باشد را بدست آورید.





$l = 3 \ \ cm$

$m = 3 \ \ N$

$$I_G CD = \frac{m}{12}(3R^2 + h^2) \Rightarrow R = 0, L = h$$

$$I_G CD = \frac{m}{12}L^2 = \frac{m}{12}L^2$$

$$I_G CD = \frac{3}{12}(3)^2 = \frac{27}{12} = 2.25$$

$$I_G CD + md^2 = I_A$$

$$\frac{x}{3} = \frac{1.5}{3} \Rightarrow x = 1.5 \ cm$$

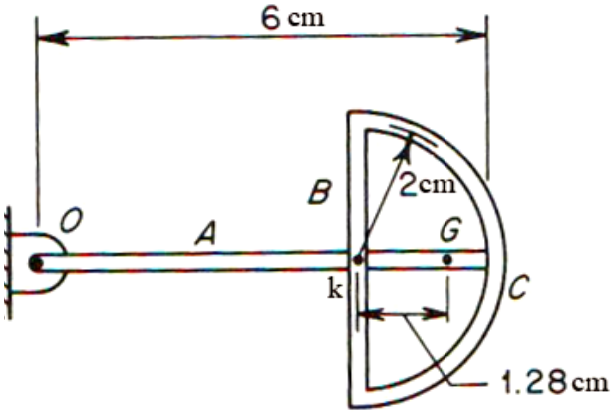
$$I_A = 2.25 + (3)(1.5)^2 = 9 \ \ N-cm^2$$

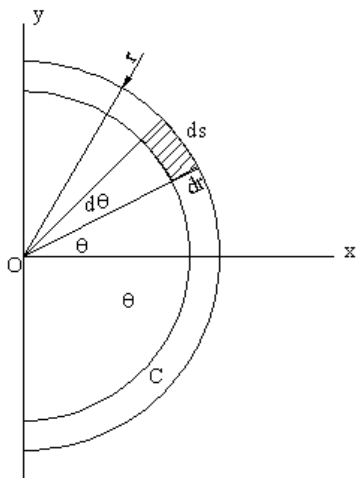
$$I_G CD = 2.25 \quad N-cm^2$$

$$I_G DE = 9 \ \ N-cm^2$$

$$\left[I_A = 9 + 9 + 2.25 = 20.25 \ \ N-cm^2\right] \ Ans.$$

6-104 میله همگن A به طول 6cmو به وزن 19.6Kgو میله همگن B به وزن 9.8Kgو نیم دایره باریک همگن C به وزن 19.6Kgمفروض است، گشتاور لختی جرم، این سیستم نسبت به محوری که عمود بر صفحه باشد و از نقطه (O) بگذرد را حساب کنید.





$$m_A = \frac{19.6}{9.8} = 2\ \ N \qquad m_B = \frac{9.8}{9.8} = 1\ \ N$$

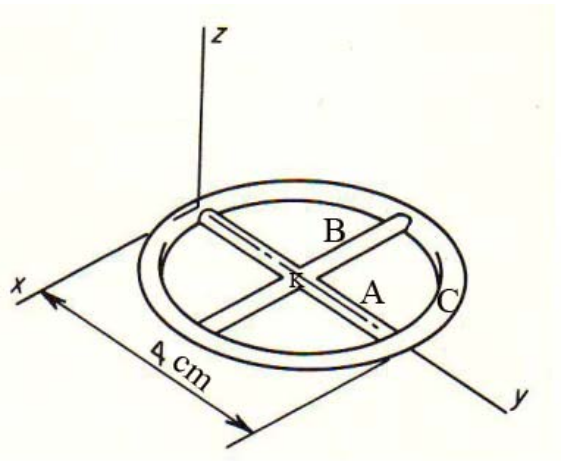
$$m_c = \frac{19.6}{9.8} = 2\ \ N \qquad I_O = ?$$

$$A \Rightarrow: \begin{cases} I_G = \dfrac{m}{12}L^2 = \dfrac{2}{12}(6)^2 = 6 \\ I_O = 6m(3)^2 = 6 + 2(9) = 24 \quad N - cm^2 \end{cases}$$

$$B \Rightarrow \begin{cases} I_G = \dfrac{m}{12}L^2 = \dfrac{1}{12}(4)^2 = \dfrac{16}{12} = 1.333 \\ I_O = 1.333 + (1)(4)^2 = 16 + 1.333 = 17.333\ \ N - cm^2 \end{cases}$$

$$C \Rightarrow: \begin{cases} dm = \rho d\forall \\ dm = \rho ds)hR^2 \\ dm = \rho r d\theta \Pi R^2 \\ m = \int_D^{\Pi} \rho r d\theta \pi R^2 = \rho\ r\pi^2 R^2 \\ I_O = r^2 dm \\ I_O = \int_0^{\Pi} r^2 \ell r d\theta H R^2 \\ I_0 = r^3 \upsilon R^2 \pi \int_0^{\Pi} d\theta = r^3 \rho \pi^2 R^2 = (m)r^2 \\ I_k = mr^2 = (2)(4) = 8 \\ I_k = I_G + md^2 = I_G + (2)(1.28)^2 = 8 \\ I_G = 4.723 \\ I_O = 4.723 + (2)(5.28)^2 = 60.48 \\ I_O = 60.48 + 17.33 + 24 = 101.8 \\ \left[Io = 101.8\ \ N - cm^2\right]\ Ans. \end{cases}$$

6-106 میله ها و چرخ شکل زیر از استوانه همگن باریک درست شده است، که وزن چرخ 0.9نیوتن است و وزن هر بازو 0.15 نیوتن می باشد، شعاع چرخش جرم ، این شکل را نسبت به محور Z حساب کنید.



$$K_\tau = ? \quad m_{Rod} = 0.15 \ \ N \qquad m_{spoke} = 0.9 \ \ N$$

$$Spoke \Rightarrow \begin{cases} I_k = mr^2 \\ I_k = (0.9)(4) = 3.6 \\ I_Z = I_k + md^2 = 3.6 + 0.9(2)^2 \\ I_Z = 7.2 \ \ N - cm^2 \end{cases}$$

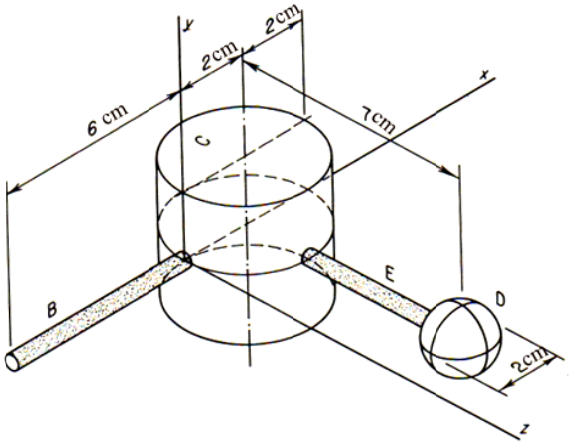
$$Rod \ \ A,B \Rightarrow \begin{cases} A \Rightarrow I_k = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}(0.15)(4)^2 = 0.8 \\ B \Rightarrow I_K = \frac{1}{12}ML^2 = \frac{1}{12}(0.15)(4)^2 = 0.2 \\ I_Z = 0.2 + (0.15)(2)^2 = 0.2 + 0.6 = 0.8 \\ I_Z = 0.8 + 0.8 + 7.2 = 8.8 \ \ N - cm^2 \end{cases}$$

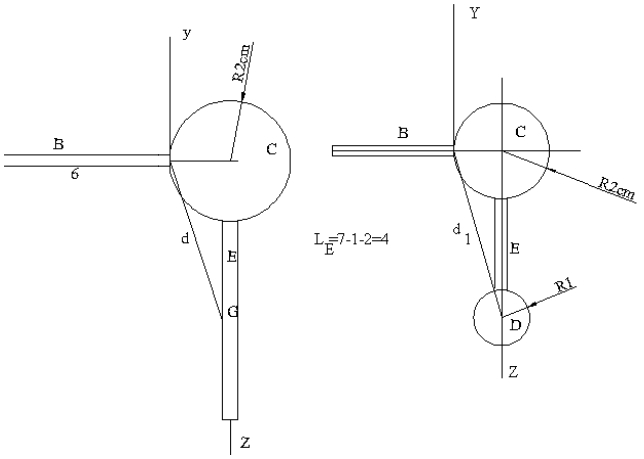
$$K_G{}^2 m = Iz$$

$$K_G{}^2 = \frac{8.8}{0.9 + 0.15 + 0.15} = \frac{8.8}{1.2}(7.333)$$

$$K_G = 2.7 \ \ cm$$

6-108 سیستم شکل زیر مفروض است، استوانه باریک B و E هر کدام به ترتیب ۱۹,۶ و ۹,۸ کیلو گرم وزن دارند، و استوانه C و کره D هر کدام به ترتیب ۲۹,۴ و ۴۹ کیلو گرم وزن دارند، طول بازوی E چهار سانتی متر و موازی محور Z است، گشتاور لختی جرم، این سیستم را نسبت به محور y بدست آورید.





$$B : Iy = \frac{m}{3}L_B{}^2 = \frac{2}{3}(36) = 24 \ \ N - cm^2$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} I_G = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(3)(4) = 6 \\ Iy = I6 + md^2 = 6 + (3)(2)^2 \\ Iy = 6 + 12 = 18 \ \ N - cm^2 \end{cases}$$

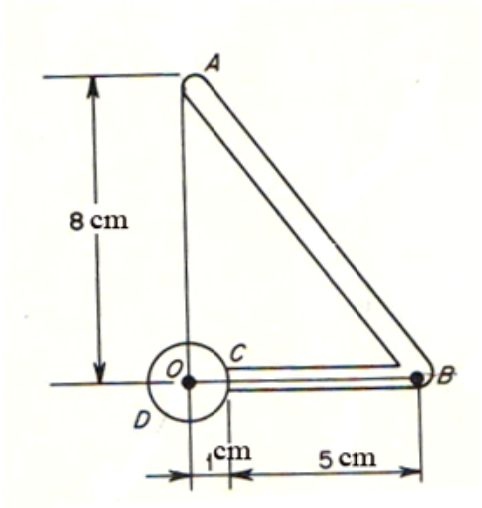
$$E \Rightarrow \begin{cases} L_E = 7 - 1 - 2 = 4 \ cm \\ I_G = \frac{1}{12}ml_E{}^2 = \frac{1}{12}(1)(4)^2 = \frac{16}{12} = 1.33 \\ d^2 = 2^2 + (2 + \frac{L_E}{2})^2 = 4 + (2+2)^2 = 20 \\ I_Y = I_G + md^2 = 1.33 + 1 \times 20 \\ I_Y = 21.33 \ N - cm^2 \end{cases}$$

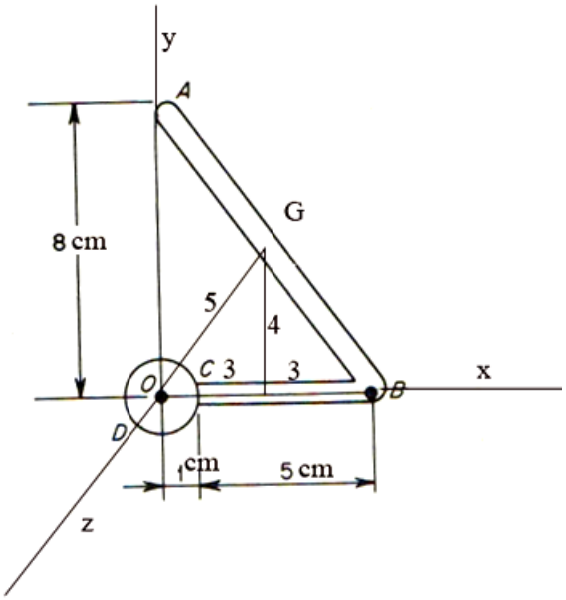
$$D \Rightarrow \begin{cases} I_G = \frac{2mR^2}{5} = \frac{2 \times 5}{5}(1)^2 = 2 \\ d_1{}^2 = 2^2 + (2+4+1)^2 = 4 + 49 = 53 \\ Iy = I6 + md_1{}^2 = 2 + (5)(53) \\ Iy = 267 \ \ N - cm^2 \end{cases}$$

$$Iy = 267 + 21.33 + 18 + 24 = 330.33$$

$$\left[Iy = 330.33 \ \ N - cm^2\right] \ \ Ans.$$

6-110 در سیستم شکل زیر میله همگن AB و CB و کره همگن D به ترتیب 39.2 و 19.6 و 58.8 کیلوگرم وزن دارند، گشتاور لختی جرم، این سیستم نسبت به محوری که از نقطه (O) گذشته و بر صفحه عمود باشد را حساب کنید.





$$M_{AB}=\frac{39.2}{9.8}=4\ \ N \qquad M_{BC}=\frac{19.6}{9.8}=2\ \ N$$

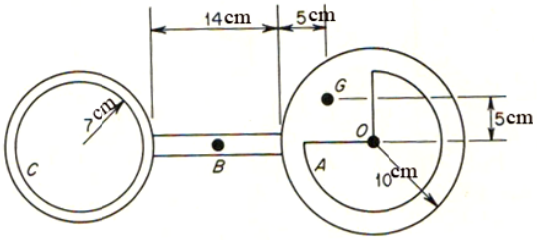
$$M_D=\frac{58.8}{9.8}=6\ \ N \qquad AB=\sqrt{64+36}=10$$

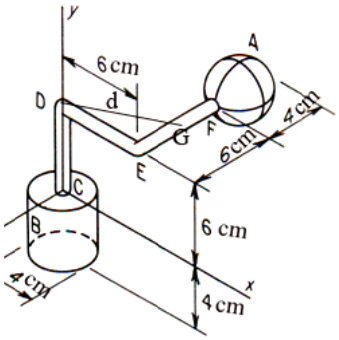
$$AB \Rightarrow \begin{cases} I_G=\frac{M}{12}L^2=\frac{4}{12}(10)^2=33.33 \\ I_0=I_G+md^2=33.3+(4)(25)=133.33\ \ N-cm^2 \end{cases}$$

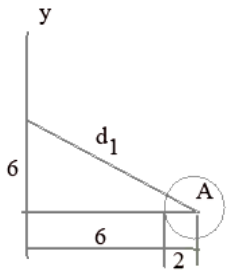
$$BC \Rightarrow \begin{cases} :I_G=\frac{1}{12}mL^2=\frac{1}{12}(2)(25)=\frac{50}{12}=4.166 \\ I_0=4.166+(2)(3.5)^2 \\ I_0=28.666\ \ N-cm^2 \end{cases}$$

$$C \Rightarrow: \begin{cases} I_0=IG=\frac{ZmR^2}{5} \\ I_0=\frac{2\times 6}{5}(1)^2=\frac{12}{5}=2.4 \\ I=2.4+28.666+133.33 \\ I=164.4\ \ N-cm^2 \end{cases}$$

6-112 پوسته سیلندر باریک و همگن C ، ۹,۸ کیلوگرم وزن دارد که بوسیله بازوی باریک به وزن ۹,۸کیلو گرم به یک جسم ناهمگن A وصل شده است، جسم A به وزن ۲۹,۴ کیلو گرم است (که مرکز ثقل آن G می باشد) و شعاع چرخش جرم، این جسم A نسبت به محوری که از نقطه (O) گذشته و بر صفحه عمود باشد برابر 9cmاست . مطلوبست شعاع چرخش جرم، این سیستم نسبت به محوری که از نقطه B گذشته و بر صفحه عمود باشد.







$$MA=\frac{196}{9.8}=20\ \ N \qquad MB=\frac{588}{9.8}=60\ \ N$$

$$M_{DC}=M_{DE}=M_{EF}=\frac{19.6}{9.8}=2\ \ N$$

$$Iy=?$$

$$B):Iy=R^2\!\!\not/_2=60\times\frac{2^2}{2}=120\ \ N-cm^2$$

$$DC):Iy=\frac{1}{2}MR^2=\frac{1}{2}(m)(0)=0$$

$$Ef):d^2=9+36=45$$

$$EF\Rightarrow\begin{cases}I_G=\dfrac{1}{12}mL^2=\dfrac{1}{12}(2)(36)=6\\ Iy=6+(45)(2)=96\ \ N-cm^2\end{cases}$$

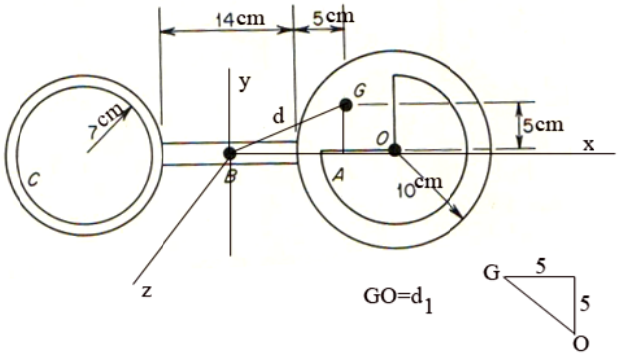
$$d_1{}^2=36+64=100$$

$$A\Rightarrow\begin{cases}I_G=\dfrac{2mR^2}{5}=\dfrac{2\times20}{5}\times4=32\\ Iy=I_G+md_1{}^2\\ Iy=32+20(100)=32+2000\\ Iy=2032\ \ N-cm^2\end{cases}$$

$$Iy=IyA+IyB+IyDC+IyDE+IyEF$$

$$Iy=2032+120+0+24+96=2272$$

$$\left[Iy=2272\ \ N-cm^2\right]\ \ Ans.$$



$$C\Rightarrow\begin{cases}:I_G=mr^2=(1)(49)=49\ \ N-cm^2\\ I_B=I_G+md^2=49+(1)(7+7)^2=245\ \ N-cm^2\end{cases}$$

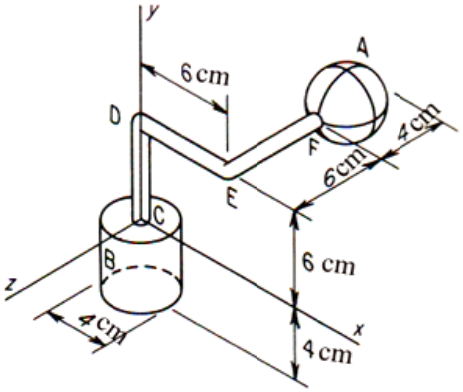
$$K_G=9\ \ cm \qquad K_G{}^2m=I_0$$

$$mc=\frac{9.8}{9.8}=1\ \ N\ \ m_B=\frac{9.8}{9.8}=1\ \ N$$

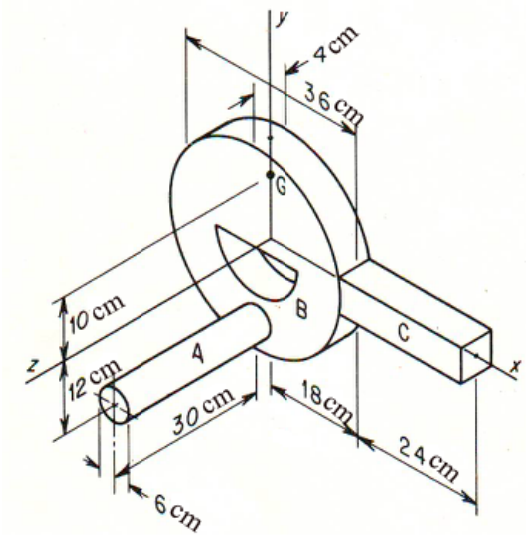
$$M_A=\frac{29.4}{9.8}=\ 3\ N$$

$$B\Rightarrow I_B=\frac{1}{12}mL^2=\frac{1}{12}(1)(14)^2=16.33\ N-cm^2$$

6-114 کره A و سیلندر B بوسیله میله های CDEF به هم وصل شده اند، A به وزن ۱۹۶کیلو گرم و B به وزن ۵۸۸ کیلو گرم و وزن هر میله اتصال برابر با ۱۹,۶ کیلو گرم می باشد، همه اجسام همگن هستند و میله EF موازی محور z است، گشتاور لختی جرم، این سیستم را نسبت به محور y محاسبه کنید.



6-116 اجسام همگن و مرکب زیر، A و B و C به ترتیب ۱۹,۶ و ۹۸ و ۹,۸ کیلوگرم وزن دارند، شعاع چرخش جرم، سیلندر B نسبت به محوری که از مرکز ثقل (G) آن می گذرد ۹سانتی متر است، گشتاور لختی جرم، این سیستم مرکب را نسبت به محور z حساب کنید



$$m_B = \frac{98}{9.8} = 10\ N \qquad m_A = \frac{19.6}{9.8} = 2\ N$$

$$m_C = \frac{9.8}{9.8} = 1\ N \qquad K_G B = 9\ cm$$

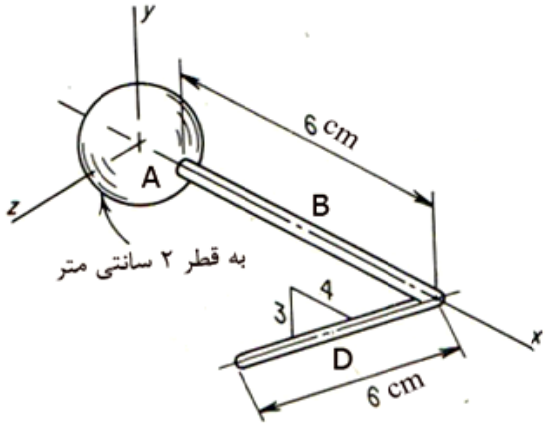
$$I_z = ?$$

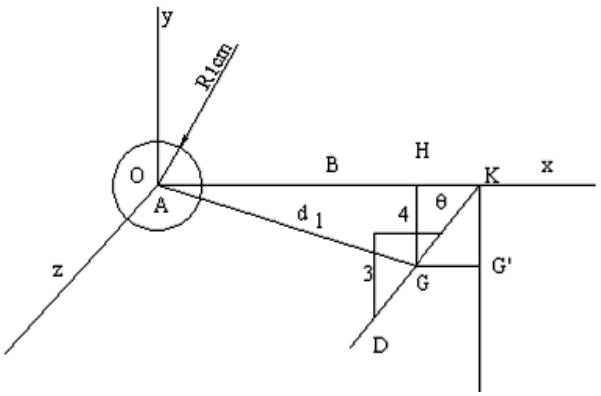
$$A \Rightarrow \begin{cases} I_G = \frac{1}{2} mR^2 \\ I_G = \frac{1}{2}(2)(3)^2 = 9\ N-cm^2 \\ Iz = I_G + md^2 = 9 + 2(12)^2 = 288 + 9 \\ Iz = 297\ N-cm^2 \end{cases}$$

$$B \Rightarrow \begin{cases} I_G = mk_G^2 = (10)(81) = 815\ N-cm^2 \\ Iz = I_G + md^2 = 815 + (10)(100) = 1815\ N-cm^2 \end{cases}$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} I_G = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) = \frac{1}{12}(4^2 + 24^2) = 49.33 \\ Iz = I_G + md^2 \\ Iz = 49.33 + (1)(12+18)^2 = 949.33 \\ Iz = 297 + 1810 + 949.33 = 3056.33 \\ Iz = 3056.33\ N-cm^2 \end{cases}$$

6-118 کره همگن شکل مرکب زیر 98 کیلو گرم وزن دارد، به کره دو میله ۱۴۷کیلو گرم وصل است، و صفحه xy ، صفحه قرینه این جسم مرکب است، گشتاور لختی جرم، این شکل مرکب را نسبت به محور z محاسبه کنید.





$$M_A = \frac{98}{9.8} = 10\ N \qquad M_B = M_D = \frac{147}{9.8} = 15\ N$$

$$Iz = ?$$

$$A \Rightarrow \begin{cases} Iz = \dfrac{2mR^2}{5} \\ Iz = \dfrac{2\times 10\times 1^2}{5} = 4\ N-cm^2 \end{cases}$$

$$B \Rightarrow \begin{cases} I_{G_g} = \dfrac{1}{12}(m_B)(L^2) \\ I_{G_g} = \dfrac{1}{12}(15)(36) = 45\ \ N-cm^2 \\ Iz = I_G + m_B d^2 \\ Iz = 45+15(1+3)^2 \\ Iz = 45+240 = 285\ N-cm^2 \end{cases}$$

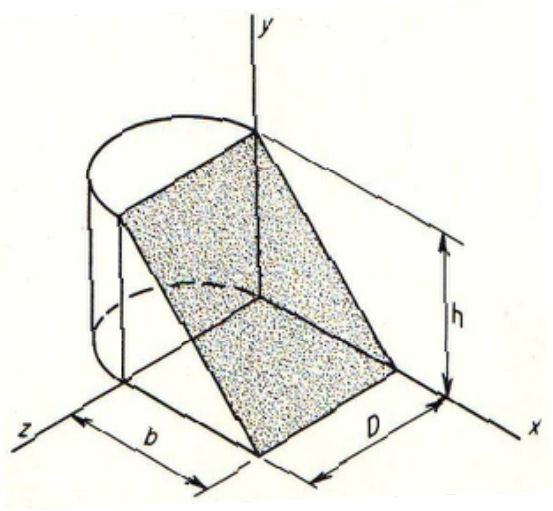
$$D \Rightarrow \begin{cases} I_G = \dfrac{1}{12}(m_D)(L^2) \\ I_G = \dfrac{1}{12}(15)(6^2) = 45\ N-cm^2 \\ Iz = I_G + m_D d_1^{\ 2} \\ HK = (\dfrac{6}{2})\cos\theta = 3x0.8 = 2.4 \\ OH = OK - HK = 7-2.4 = 4.6\ \ cm \\ HG = 3\sin\theta = 3x0.6 = 1.8\ cm \\ d_1^{\ 2} = (OH)^2 + (HG)^2 = 4.6^2 + 1.8^2 = 24.4 \\ Iz = 45+15(24.4) = 411\ \ N-cm^2 \end{cases}$$

$$Iz = IzB + IzA + IzD$$

$$Iz = 4+411+285$$

$$\left[Iz = 700\ N-cm^2\right]\ Ans.$$

6-120در شکل زیر مطلوبست I_{xy} و I_z.



$$M_{cylider} = m_c$$

$$for\ half\ \ cylinder\ \ M_{cylider} = \frac{m_c}{2}$$

$$M_{Wedge} = m_w$$

for

$$half\ \ \ cylinder \begin{cases} I_G = \dfrac{m_c}{12\times 2}(3R^2+h^2) \\ I_G = \dfrac{m_c}{24}(3(\dfrac{D}{2})^2+h^2) \\ Iz = I_G + md^2 = \dfrac{m_c}{24}(\dfrac{3}{4}D^2+h^2) + \dfrac{m_c}{2}(\dfrac{h}{2})^2 \\ Iz = m_c(\dfrac{3D^2+16h^2}{96}) \end{cases}$$

$$Wedge \Rightarrow \begin{cases} I_G = \dfrac{m_w(h^2+b^2)}{18} \\ Iz = I_G + m_w d^2 \\ Iz = \dfrac{m_w(h^2+b^2)}{18} + m_w\left[(\dfrac{b}{3})^2 + (\dfrac{h}{3})^2\right] \\ Iz = \dfrac{m_w(h^2+b^2)}{6} \end{cases}$$

$$For\ The\ Figure \begin{cases} Iz = Iz(cylider) + Iz(Wedge) \\ Iz = \dfrac{m_w(h^2+b^2)}{6} + m_c(\dfrac{3D^2+16h^2}{96}) \end{cases}$$

$$for\ half\ cylinder \begin{cases} I_G xy = 0 \\ I_{xy} = I_G xy + m_c \overline{x_G}\,\overline{Y_G} \\ I_{xy} = 0 + \dfrac{m_c}{2}(\dfrac{h}{2})(\dfrac{-4r}{3\pi}) = \dfrac{-m_c h}{4}(\dfrac{4D}{6\pi}) \\ I_{xy} = \dfrac{-m_c h}{4}(\dfrac{4D}{6\pi}) = -\dfrac{m_c hD}{6\pi} \end{cases}$$

$$For\ Wedge \begin{cases} I_G xy = -m_w \dfrac{bh}{36} \\ Ixy = I_G xy + m_w \overline{x_G}\,\overline{Y_G} \\ Ixy = -m_w \dfrac{bh}{36} + m_w(\dfrac{1}{3}b)(\dfrac{1}{3}h) \\ Ixy = \dfrac{m_w}{12} bh \end{cases}$$

$$For\ The\ Figure \begin{cases} Ixy = Ixy(Wedge) + Ixy(cylinde) \\ Ixy = \dfrac{m_w}{12} bh - \dfrac{m_c}{6\pi} hD \end{cases}$$

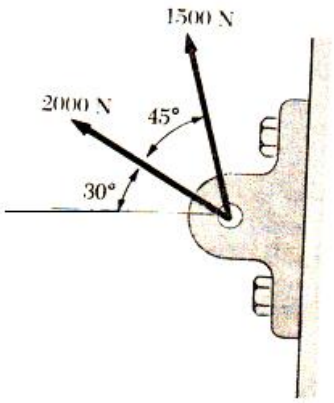
فصل ۲

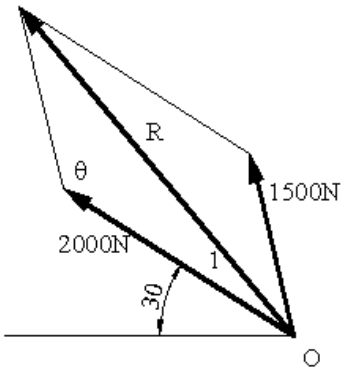
Mechanics
For Engineers

Statics,Second Edition
Ferdinand
P.Beer&E.Russell
Johnston,jr

ترجمه دکتر ابراهیم
واحدیان
تحت عنوان "دوره مکانیک
برداری"۱۳۶۴

2-2 به طریقه ترسیمی مقدار و جهت برآیند دو نیروی مطابق شکل را به دست آورده، برای هر مسئله یکبار از قانون متوازی‌الاضلاع و بار دیگر از قانون مثلث استفاده شود.





$$R^2 = 1500^2 + 2000^2 + 2000 \times 1500 \times 2Cos(\pi - 45)$$

$$R = \sqrt{10492000} \quad N \qquad R = 3239.2N$$

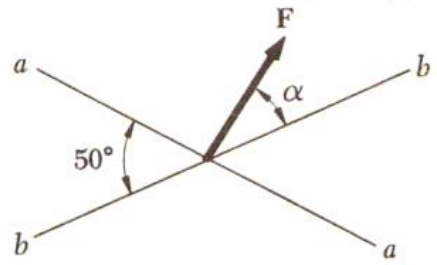
$$\frac{1500}{sinO_1} = \frac{3239.2}{sin\ 135}$$

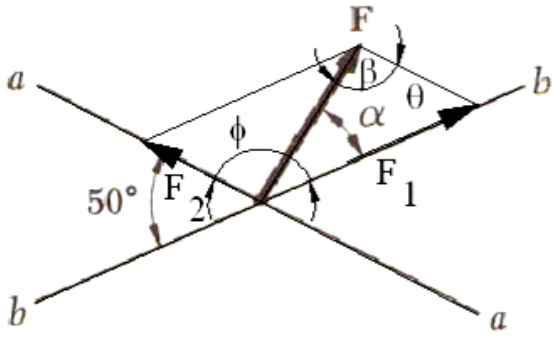
$$sin\ O_1 = \frac{1500\ sin135}{3239.3}$$

$$O_1 = 19.1$$

$$\alpha = 19.1 + 30 = 49.1$$

2-4 . دو میله B و C را بر درب A مطابق شکل پرچ کرده‌اند. می‌دانیم که کشش بر میله B برابر $۶KN$ و بر میله C برابر $۱۰KN$ می‌باشد. بطریقه ترسیمی مقدار و امتداد برآیند وارد بر درب را حساب کنید.





$F = 100\ N$

$Faa = 70\ N \quad \alpha = ?$

$F_1 = Faa = 70\ \ N$

$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2COS\phi$

$$\frac{F}{Sin\,\theta} = \frac{F_1}{Sin\,\alpha} = \frac{F_2}{Sin\,B_1}$$

$$\frac{Sin\theta}{Sin\alpha} = \frac{F}{F_1} = \frac{100}{70}$$

$\phi = 180 - 50 = 130$

$(100)^2 = (70)^2 + F_2^2 + 2(70)(F_2)Cos130$

$10000 = 4900 + F_2^2 + 140Cos130F_2$

$F_2^2 + 140Cos130F_2 - 5100 = 0$

$F_2^2 - 90F_2 - 5100 = 0$

$$F_2 = \frac{-90 + \sqrt{8100 + 20400}}{2}$$

$$F_2 = \frac{+90 \mp 168.8}{2} = 129.4, -39.4$$

$F_2 = 129.4\ \ N$

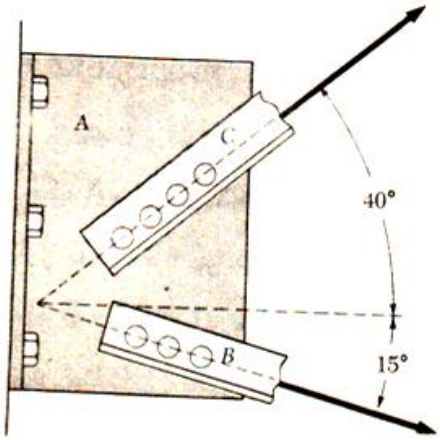
$2\phi + 2\theta = 360$

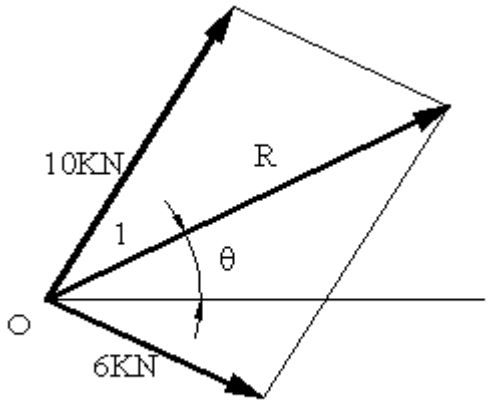
$\theta = 180 - 130 \qquad \theta = 50°$

$$\frac{Sin\,\theta}{Sin\alpha} = \frac{100}{70} = \frac{10}{7}$$

$$Sin\,\alpha = \frac{7}{10} Sin\,50 = 0.52623$$

$\alpha = 32.4°$





$R^2 = 6^2 + 10^2 + 2 \times 10 \times 6COS\,(55)$

$R = 14.3KN$

$$\frac{6}{sin\ O_1} = \frac{14.3}{sin\ 125}$$

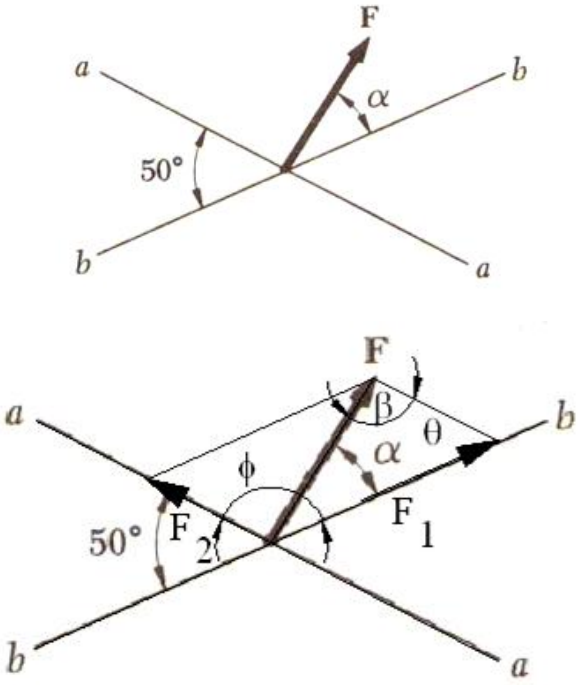
$$sin\ O_1 = \frac{6 \times sin\ 125}{14.3}$$

$O_1 = 20.1°$

$\theta = 40 - 20.1 = 19.9°$

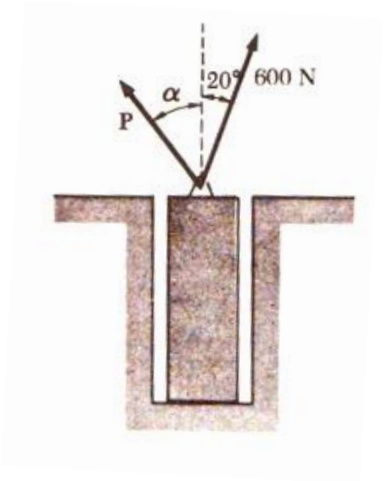
2-5نیروی F به مقدار ۱۰۰ نیوتن را به دو مؤلفه در امتداد محورهای a-a و b-b تجزیه کرده. بروش مثلثاتی زاویه α را معین کنید. می‌دانیم که مؤلفه F در امتداد محور a-a برابر با ۷۰نیوتن می‌باشد.

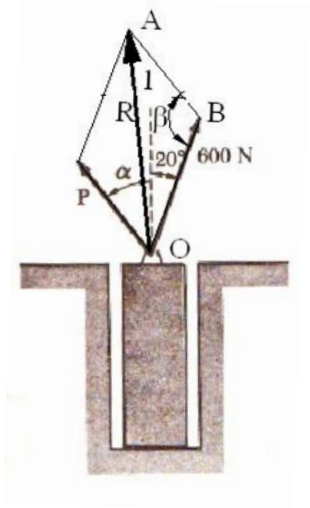
2-6 نیروی F به مقدار ۸۰۰ نیوتن را به دو مؤلفه در امتداد محورهای a-a و b-b تجزیه کرده به روش مثلثاتی زاویه α را معین کرده در صورتیکه بدانیم مؤلفه F در امتداد محور b-b برابر با ۱۲۰ نیوتن می‌باشد.



$F = 800Nt$
$F_1 = 120Nt$
$\phi = 180 - 50$
$\phi = 130$
$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2Cos130$
$800^2 = F_2^2 + (120)^2 + 2F_2(120)Cos130$
$F_2^2 - 625600 - 154.3F_2 = 0$
$F_2 = \dfrac{154.3 \mp \sqrt{(154.3)^2 + 4(625600)}}{2}$
$F_2 = \dfrac{154.3 \mp 1589.4}{2}$
$F_2 = 871.8\ Nt$
$\phi + \theta = 180$
$\theta = 50$
$\dfrac{800}{Sin\ 50} = \dfrac{871.8}{Sin\ \alpha}$
$Sin\ \alpha = 871.8(\dfrac{Sin\ 50}{800})$
$Sin\alpha = 0.8347$
$\alpha = 56.6°$

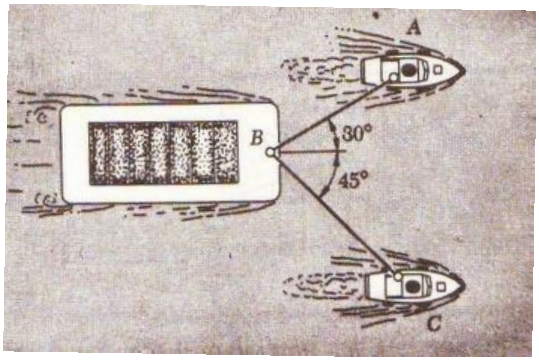
2-7. می‌دانیم $\alpha = ۳۰$ می‌باشد، معین کنید مقدار نیروی P را به طوریکه برآیند نیروی مؤثر بر استوانه در امتداد قائم قرار گیرد. مقدار برآیند در این حال چقدر است؟

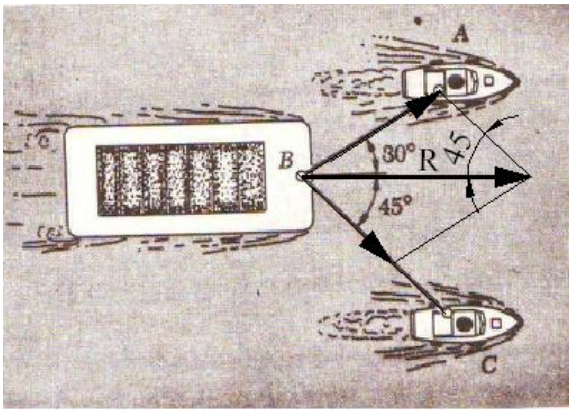




$\alpha = 30 \quad P = ? \quad R =$ قائم $= ?$
$\dfrac{R}{Sin\ B} = \dfrac{600}{Sin\ A_1} = \dfrac{P}{Sin\ 20}$
$2\beta + 100 = 360$
$2\beta = 260 \quad \beta = 130$
$A_1 = 30$
$P = 600\dfrac{Sin\ 20}{Sin\ A_1} = 600(\dfrac{Sin\ 20}{Sin\ 30})$
$P = 410.4 \quad N$
$R = SinB\dfrac{P}{SIN\ 20}$
$R = Sin\ 130\dfrac{410.4}{Sin20}$
$R = 919.2 \quad N$

2-8 قـایق بـزرگ B بوسـیله دو قـایق کوچـک A و C کشـیده می‌شـود. کشـش در کابـل AB برابـر بـا ۴۰۰۰ نیـوتن و برآینـد نیروهای وارد در نقطه B در امتداد محور قـایق بـزرگ قـرار دارد. بروش مثلثاتی معین کنید *(a)* کشش وارد بـر کابـل BC را، *(b)* مقدار برآیند وارد از طریق این دو نیرو بر نقطه B را.





$T_{AB} = 4000 \quad N$

$T_{BC} = ?$ $\qquad R = ?$

$2(75) + 2A = 360$

$75 + A = 180$

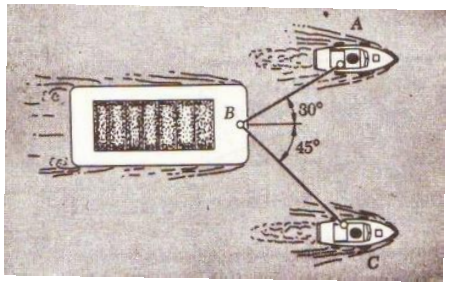
$A = 105°$

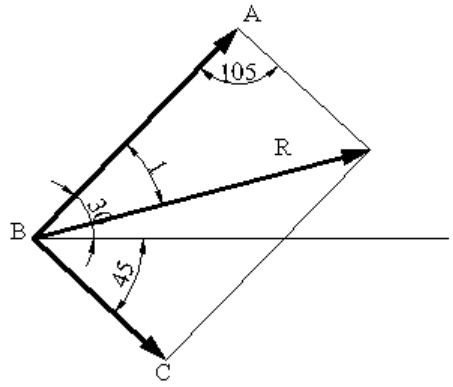
$$\frac{R}{Sin105} = \frac{4000}{Sin45}$$

$R = 5464\ N$

$$\frac{R}{Sin\ 105} = \frac{T_{BC}}{Sin\ 30} \qquad T_{BC} = 2828 \quad N$$

*2-10*قـایق بـزرگ B بوسـیله دو قـایق کوچـک A و C کشـیده می‌شود. در لحظه‌ای معین کشش وارد بر کابل AB ۴۵۰۰ نیوتن و کشش وارد بر کابل BC ۲۰۰۰ نیوتن می‌باشد. بروش مثلثـاتی معین کنید مقدار و امتداد برآیند نیـروی وارد بـر نقطـه B در آن لحظه را.





$2A + 2(75) = 360 \qquad A = 180 - 75$

$A = 105$

$T_{AB} = 4500$

$T_{BC} = 2000 \quad 1b$

$$R^2 = 4500^2 + 2000^2 - 2x2000x4500Cos\ 105$$

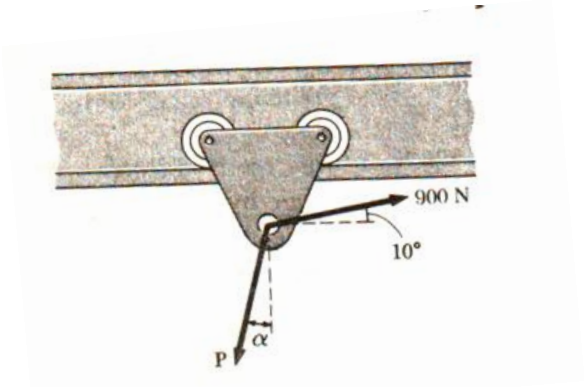
$R = 5376.6 \quad N$

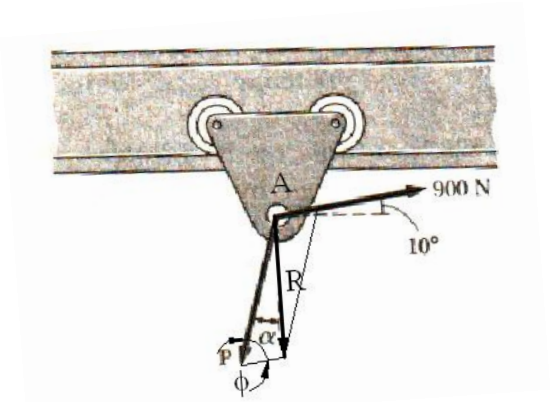
$$\frac{2000}{SinB_1} = \frac{5376.6}{Sin\ 105}$$

$$SinB_1 = 2000 \times \frac{Sin\ 105}{5376.6}$$

$B_1 = 21$

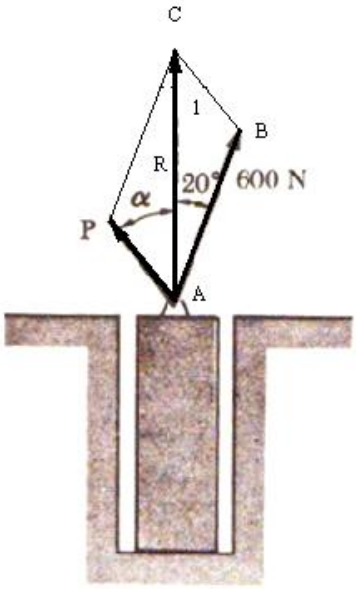
2-12 بروش مثلثاتی مقدار و امتداد نیروی P را معین کنید. بطوریکه برآیند P و نیروی دیگر ۹۰۰ نیوتن نیرویی برابر با ۲۷۰۰ نیوتن قائم بر نقطه اثر و جهت آن بطرف پائین باشد.





$$A = \alpha + 10 + 90 = 100 + \alpha$$
$$\varphi = 180 - A = 180 - \alpha - 100 = 80 - \sigma$$
$$\frac{900}{Sin\alpha} = \frac{2700}{Sin(80-\alpha)}$$
$$\frac{Sin\,(80-\alpha)}{Sin\,\alpha} = \frac{2700}{900} = 3$$
$$Sin\,80\,Cot\alpha - Cos\,80 = 3$$
$$Cot\alpha = \frac{3 + Cos\,80}{Sin\,80} = 3.222$$
$$tan\,\alpha = 0.310 \qquad \alpha = 17.2°$$
$$\frac{900}{Sin\,\alpha} = \frac{P}{Sin\,A_1} = \frac{P}{Sin\,100}$$
$$P = Sin100 \times \frac{900}{SIN\,17.2}$$
$$P = 2990.6\,N$$

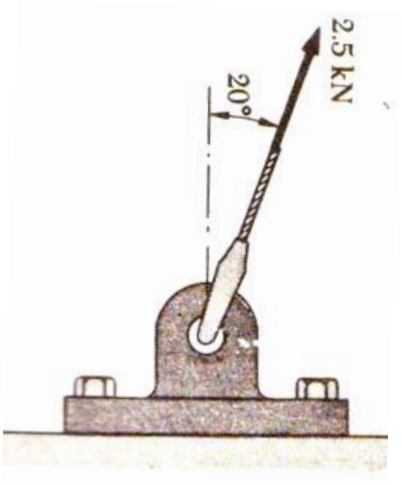
2-13 هرگاه برآیند دو نیروی وارد بر استوانه مسئله *2-7* (قائم) باشد. مطلوبست *(a)* مقدار α برای اینکه مقدار نیروی F حداقل باشد. این مقدار حداقل را بدست آورید.

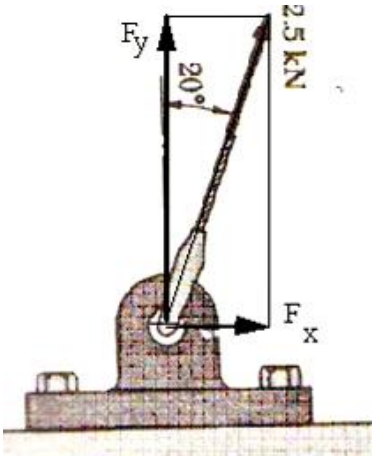


P حداقل باشد

$$Sin\alpha = Sin\,C_1$$
$$C_1 = \alpha$$
$$\frac{P}{Sin20} = \frac{600}{Sin\alpha} = \frac{R}{Sin\,\beta}$$
$$P = \frac{600\,Sin\,20}{Sin\,\alpha}$$
$$P' = 600\,Sin\,20\,\frac{-Cos\,\alpha}{Sin^2\alpha}$$
$$P' = 0 \qquad Cos\alpha = 0 \qquad \alpha = 90°$$
$$2\beta + 220 = 360 \qquad \beta = 70$$
$$P = \frac{600}{Sin\,90}Sin20 = 205.2\,N$$
$$R = Sin70\,\frac{205.2}{Sin\,20}$$
$$R = 563.8\,N$$

*2-14*نیرویی برابر KN ۲/۵ بر کابلی متصل به حلقه‌ای مطابق شکل وارد می‌شود. مطلوبست مقدار مؤلفه‌های افقی و قائم وارد از طرف این نیرو.



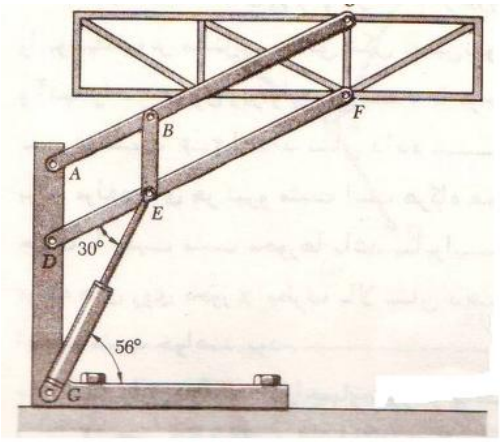


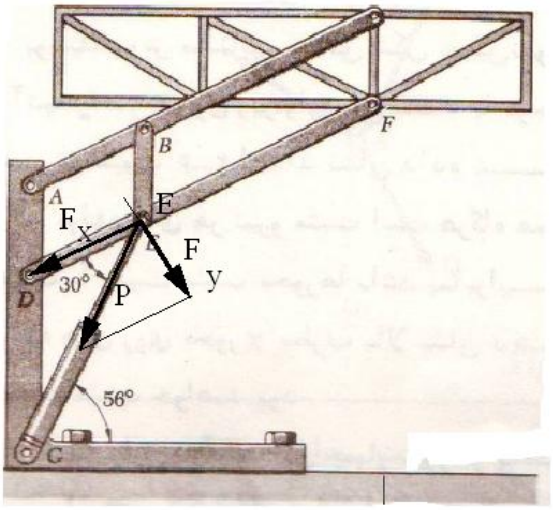
$F = F_x i + F_y j$

$F = 2.5Sin20\ i + 2.5\ Cos\ 20\ j$

$F = 0.855i + 2.35j$

2-15 استوانه هیدرولیکی GE بر عضو DF نیرویی برابر با P وارد می‌کند که در امتداد GE می‌باشد. می‌دانیم که نیروی P مؤلفه‌ای قائم بر DF برابر با $۶۰۰N$ باید داشته باشد، معین کنید مقدار P و مؤلفه آن را که موازی DF ایجاد می‌کند.





$Fy = 600\ N \qquad Fx = PCos30$

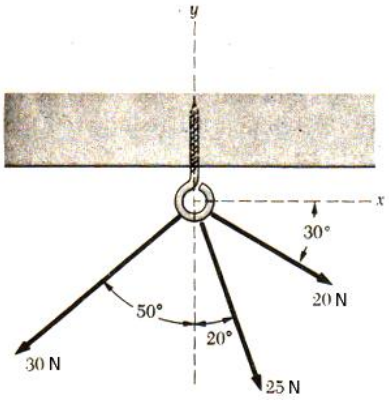
$Fy = Psin30 \qquad 600 = P\ Sin\ 30$

$P = 1200N$

$Fx = 1200(cos30)$

$Fx = 1039N$

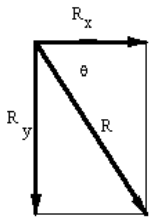
2-16 معین کنید مؤلفه‌های x و y هر یک از نیروهای وارد بر شکل را



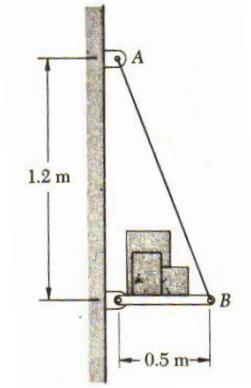
$$R = Rxi + Ryj$$

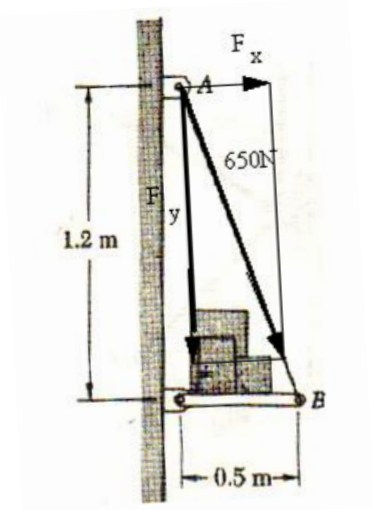
$$Rx = 20\ Cos\ 30 + 25\ Sin20 - 30\ Sin\ 50$$

$$Rx = 17.32 + 8.55 - 23 = 2.89\ N$$
$$Fy = -20Sin\ 30 - 25\ Cos\ 20 - 30\ Cos\ 50$$
$$Fy = -10 - 23.5 - 19.3 = -52.8\ N$$
$$R = 2.89i - 52.8j$$
$$R = \sqrt{Fx^2 + Fy^2} = \sqrt{(52.8)^2 + (2.89)^2}$$
$$R = 52.9\ N$$
$$tan\ \theta = \frac{Ry}{Rx} = \frac{52.78}{2.89}$$
$$\theta = 86.8°$$



2-18 کشش وارد بر سیم AB برابر با ۶۵۰ N می‌باشد. معین کنید مؤلفه‌های قائم و افقی نیروی وارد بر نقطه A را





$$Fx = 650 \times Cos\theta$$

$$Fy = 650\ Sin\ \theta$$

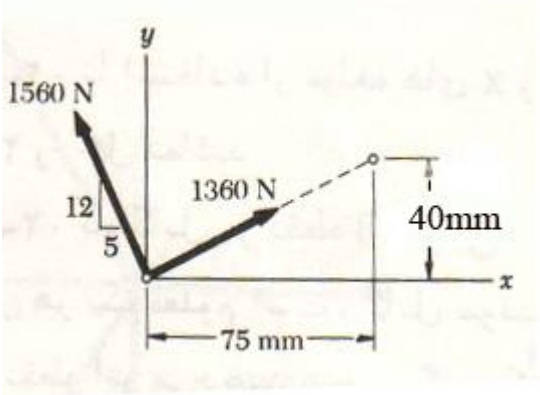
$$AB = \sqrt{0.5^2 + 1.2^2} = 1.3$$

$$Fx = 650 \times 0.5/1.3 = 250$$

$$Fy = 650\ \times \frac{1.2}{1.3} = 600$$

$$F = 250i - 600j$$

2-19 معین کنید مؤلفه‌های x و y هر یک از نیروهای نشان داده شده را.



$$d = \sqrt{40^2 + 75^2} = 85$$
$$Fx = 1360 \times \left(\frac{75}{85}\right) - 1560(\frac{5}{13})$$
$$Fx = 1200 - 600 = 600\ N$$
$$Fy = 1360 \times \left(\frac{40}{85}\right) - 1500(\frac{12}{13})$$
$$Fy = 640 + 1440$$
$$Fy = 2080\ N$$
$$R = 600i + 2080j$$
$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2} = 52.9\ N$$
$$tan\ \theta = \frac{Ry}{Rx} = \frac{52.78}{2.89}$$
$$\theta = 86.8$$

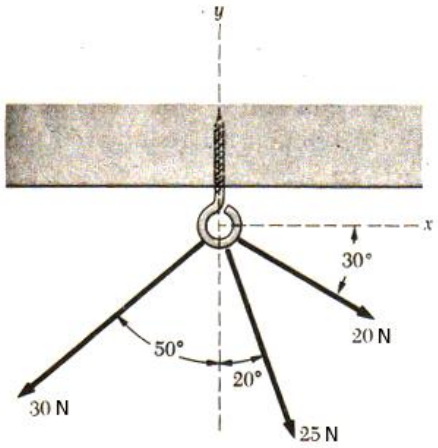
2-20 مؤلفه‌های x و y نیروی F مطابق شکل می‌باشد. معین کنید مقدار و امتداد آن را.

$$R = \sqrt{200^2 + 250^2} = 200.6 \ \ lb$$

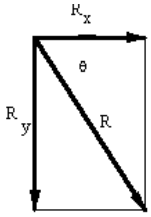
$$R = 200.6 \ \ lb$$

$$tan\,\theta = \frac{15}{200} \qquad \theta = 4.3$$

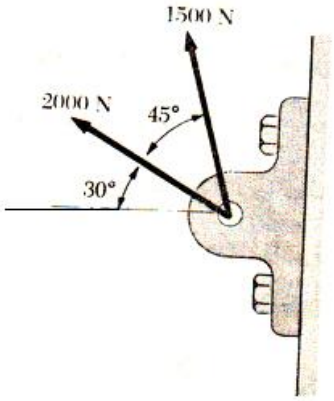
*2.22*معین کنید برآیند سه نیروی وارد در مسئله *2-16* را.



$$R = Rxi + Ryj$$
$$Rx = 20\ Cos\ 30 + 25\ Sin20 - 30\ Sin\ 50$$
$$Rx = 17.32 + 8.55 - 23 = 2.89\ N$$
$$Fy = -20Sin\ 30 - 25\ Cos\ 20 - 30\ Cos\ 50$$
$$Fy = -10 - 23.5 - 19.3 = -52.8\ \ N$$
$$R = 2.89i - 52.8j$$
$$R = \sqrt{Fx^2 + Fy^2} = \sqrt{(52.8)^2 + (2.89)^2}$$
$$R = 52.9\ \ N$$
$$tan\,\theta = \frac{Ry}{Rx} = \frac{52.78}{2.89}$$
$$\theta = 86.8°$$



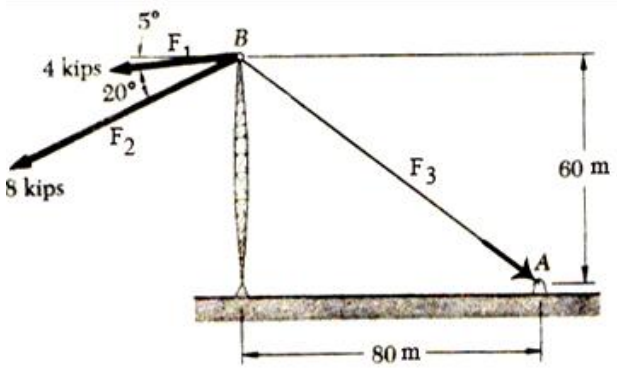
2-24 با استفاده از مؤلفه‌های x و y مسئله *2.2* را حل نمائید.



نیرو	مقدار	*Rx*	*Ry*
F_1	*2000N*	*-2000 Cos 30*	*2000 Sin 30*
F_2	*1500N*	*-1500 Sin15*	*1500 Cos15*
جمع		*-2120.3*	*2448.9*

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2} = 3939.3\ \ N$$
$$tan\,\theta = \frac{Fy}{Fx} = \frac{2448.9}{2120.3} \qquad \theta = 49.1°$$

2-26 دو کابل بر نقطه B اثر می‌نماید، مقدار کشش هر یک معلوم است. کابل سومی را نیز بر آن نقطه اثر می‌دهند، معین کنید کشش لازم کابل AB را بطوریکه برآیند نیروهای وارد بوسیله سه کابل در امتداد قائم باشد.

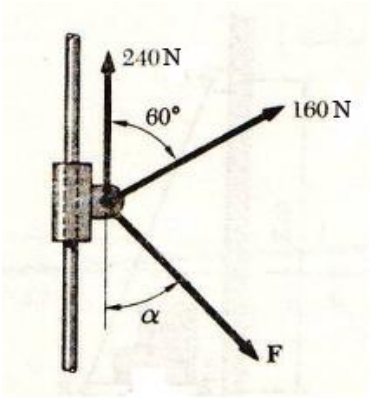


$Kips = 1000 Killo\ pound$
$F_3 = T_{AB} = ?$
$R = ?$
$AB = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$

نیرو	مقدار	Rx	Ry
F_1	4	$-4\ Cos\ 5$	$-4\ Sin5$
F_2	8	$-8Cos\ 25$	$-8\ Sin25$
جمع	F_3	$+F_3 \times \frac{80}{100}$	$-F_3 \times \frac{60}{100}$

$Rx = 0$
$F_3 \frac{80}{100} = 4\ Cos\ 5 + 8\ Cos25$
$F_3 = 14.04\ Kips$

2-27 بر طوقه‌ای که روی میله قائم می‌لغزد سه نیرو مطابق شکل را اثر می‌دهند. امتداد نیروی F را در صورت لزوم می‌توان تغیر داد. مطلوبست امتداد نیروی F بطوریکه برآیند سه نیرو افقی قرار بگیرد. می‌دانیم که مقدار نیروی F اولاً برابر با ۴۸۰نیوتن ثانیاً برابر با ۲۸۰ نیوتن می‌باشد.



$Ry = 0$برای اینکه برآیندنیروهاافق یباشد

$R \longrightarrow X$روی

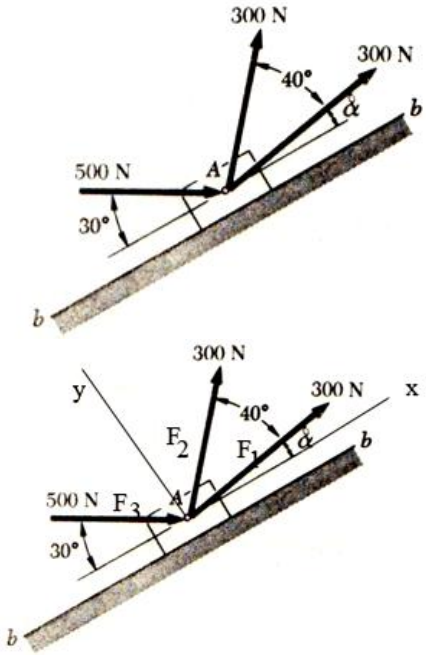
$a)\ F = 480\ N \quad b)\ F = 280\ N$

نیرو	مقدار	Fx	Fy
240	*240*	*0*	*240*
160	*160*	*160Sin 60 = 138.6*	*160Cos 60= 80*
F	*F*	*F Sin α*	*-F Cos α*

$\theta = 0$
$tan\ \theta = \frac{Ry}{Rx} \quad Ry = 0$
$a) \quad 240 + 80 - F\ Cos\ \alpha$

$Cos\ \alpha = \frac{320}{280}$
$\alpha = 48.2$
$If\ b) \quad F = 280\ N$
$Cos\ \alpha = \frac{320}{280} = 1.14$
$Cos\ \alpha > 1$ غیر قابل قبول

2-28 امتداد نیروهای ۳۰۰ نیوتن را می‌توان تغییر داد، ولی زاویه بین آنها پیوسته ثابت باقی می‌ماند. معین کنید مقدار زاویه α را برای وقتی که برآیند نیروها در نقطه A موازی صفحه b-b قرار گیرد.



$R =$ موازی bb باشد

$\vec{R} = Rxi + Ryj$ $\qquad Ry = 0$

نیروها	مقدار	$\overset{+}{\rightarrow}Fx$	$+\uparrow Fy$
F_1	300 N	300 Cos α	300 Sin α
F_2	300 N	300 Cos(α+40)	300Sin (α+40)
F_3	500	500 Cos 30	-500 Sin 30

$\theta = 0$

$tan\ \theta = \dfrac{Ry}{Rx} = 0 \qquad Ry = 0$

$300\ sin\alpha + 300\ sin\ (\alpha + 40) = 500\ SIN30$

$sin\ \alpha + \ sin(\alpha + 40) = \dfrac{5}{3} sin\ 30$

$sin\alpha + \ sin\alpha\ Cos40 + cos\alpha\ sin\ 40 = \dfrac{5}{3} sin\ 30$

$1.766\ sin\ \alpha + \ 0.643 Cos\ \alpha = \dfrac{5}{3} sin\ 30$

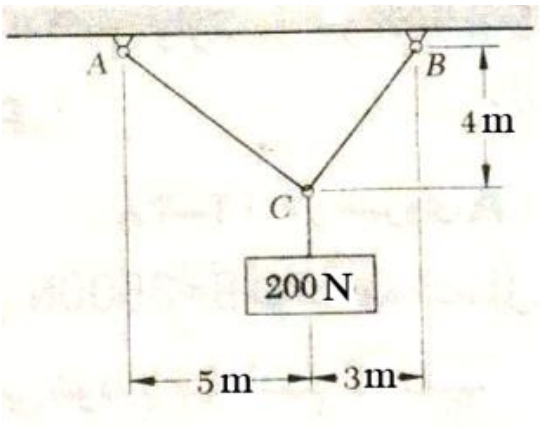
$sin\ \alpha + \ 0.3639\ Cos\ \alpha = 0.4718$

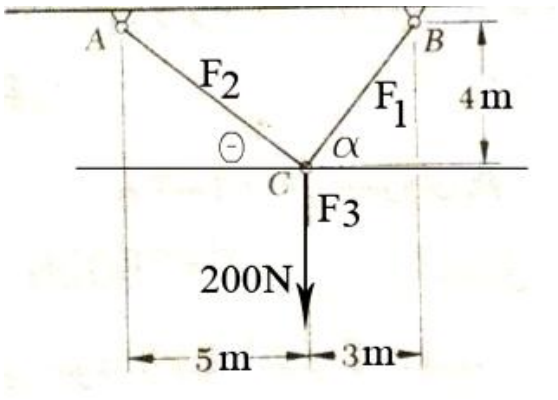
$tan\theta = 0.3639 \qquad \theta = 20$

$sin\ (\alpha + \theta) = 0.4718\ \ Cos20 = 0.44335$

$\alpha + 20 = 26.37 \qquad \alpha = 6.3$

2-30 دو کابل در نقطه C به یکدیگر گره شده و بـه آن وزنـه‌ای مطابق شکل آویزان نمـوده‌انـد، معـین کنیـد کشـش هـر یـک از طنابهای AC و BC را.





نیرو	مقدار	Fx	Fy
F_1	F_1	F_1 Cos α	F_1 sin α
F_2	F_2	-F_2 Cos θ	F_2 Sin θ
F_3	200	-	200

$\sum Fx = 0 \qquad F_1\left(\frac{3}{5}\right) - F_2\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\right) = 0$

$F_1 = 1.3F_2$

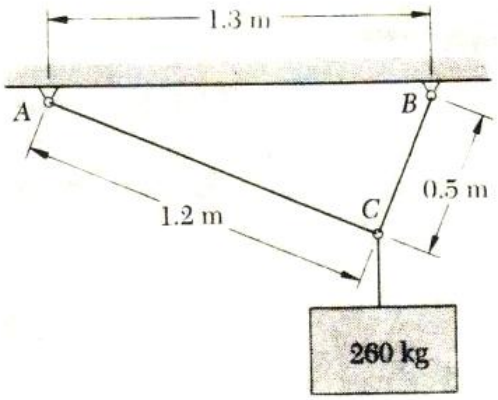
$F_1\left(\frac{4}{5}\right) - F_2\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right) = 200$

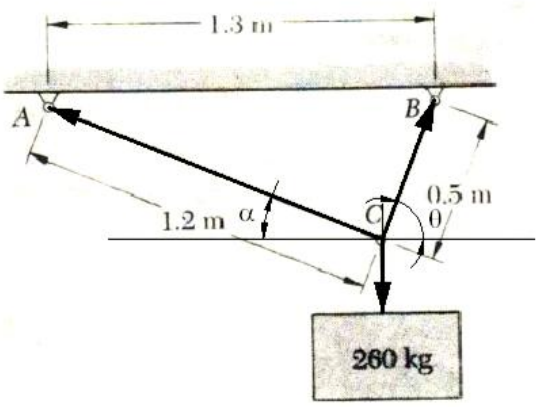
$1.3F_2\left(\frac{4}{5}\right) - F_2\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right) = 200$

$F_2 = 120.1\ N$

$F_1 = 156.2\ N$

2-32 دو کابل در نقطه C به یکدیگر گره شده و بـه آن وزنـه‌ای مطابق شکل آویزان نمـوده‌انـد، معـین کنیـد کشـش هـر یـک از طنابهای AC و BC را.



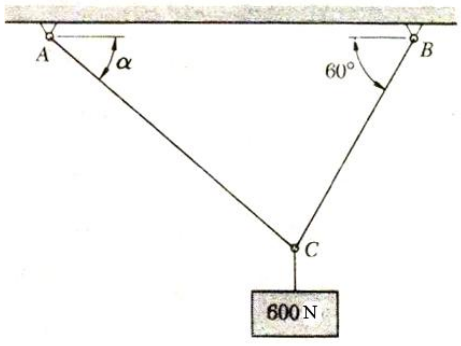


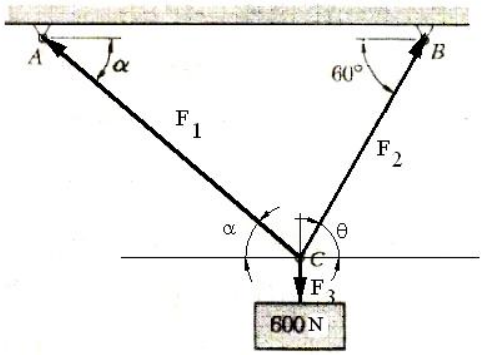
$1.2^2 + 0.5^2 = 1.3^2$ پس قائم الزاویه است

نیرو	مقدار	Fx	Fy
F_1	F_1	$F_1 Cos\ \alpha$	$F_1 sin\ \alpha$
F_2	F_2	$-F_2 Cos\ \theta$	$F_2 sin\ \theta$
F_3	260	0	-260

$$tan\ \theta = \frac{1.2}{0.5} = 2.4 \quad \theta = 67.4$$
$$tan\ \theta = \frac{0.5}{1.2} = 0.4166 \quad \alpha = 22.6$$
$$F_2 Cos\theta = F_1 Cos\alpha$$
$$F_2 = 2.4F_1$$
$$2.4F_1 sin\theta + F_1 sin\alpha = 260$$
$$2.4F_1 sin67.4 + F_1 sin22.6 = 260$$
$$F_1 = 100\ Kg \qquad F_2 = 100(2.4) = 240Kg$$
$$F_1 = 981\ N \qquad F_2 = 2354.4\ N$$

2-34 وزنه ۶۰۰ نیوتن را به وسیله‌دو کابل AC و BC آویزان کرده‌اند. برای چه مقدار زاویه α کشش کابل AC حداقل خواهد بود. کشش کابل‌های AC و BC در اینحالت چه اندازه است؟



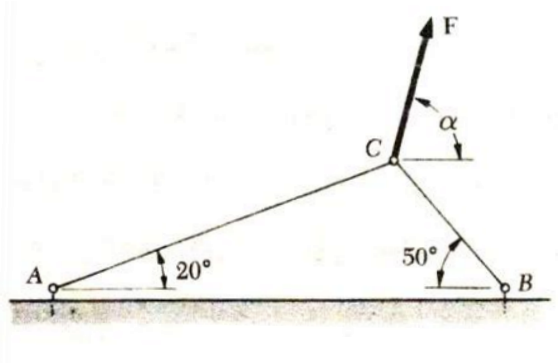


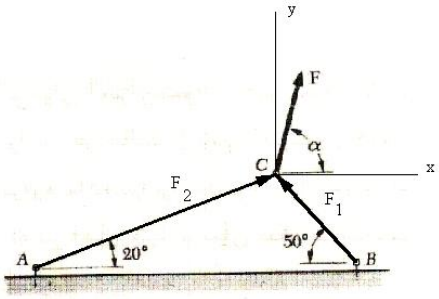
نیرو	مقدار	Fx	Fy
F_1	F_1	$F_1 Cos\ 60$	$F_1 sin\ 60$
F_2	F_2	$-F_2 Cos\ \alpha$	$F_2 sin\ \alpha$
F_3	F_3	0	-600

$$F_2 = T_{AC} = Min$$
$$F_2 = 600Cos60$$
$$F_2 = 300 \quad N$$
$$F_1 = 300 \times \frac{Cos\ 30}{Cos\ 60}$$
$$F_1 = 520 \quad N$$
$$F_2 = F_1 \frac{Cos\ 60}{Cos\ \alpha} \qquad F_1 = F_2 \frac{Cos\ \alpha}{Cos\ 60}$$
$$F_1 sin\ 60 + F_2 sin\ \alpha = 600$$
$$F_2 Cos\alpha\ tan60 + F_2 sin\ \alpha = 600$$
$$F_2 = \frac{600}{sin\ \alpha + Cos\ tan60} = \frac{600Cos\ 60}{sin\ (\alpha + 60)}$$
$$sin\ (\alpha + 60) = 1 = sin\ 90 \qquad \alpha = 30$$

$$F_2 = F_1 \frac{Cos\ 60}{Cos\ \alpha}$$
$$F_2 = 520\ \frac{cos60}{cos30} = 300 \quad N$$

*2-36*دو طناب را در نقطه C بـه یکـدیگر گـره زده‌انـد. هـر گـاه حداکثر کشش مجاز در هر شاخه طناب $2.5\ KN$باشد مطلوبست حداکثر نیروی F که ممکن است در نقطه C اثـر دهنـد. در چـه امتدادی باید این نیروی حداکثر را اثر داد؟



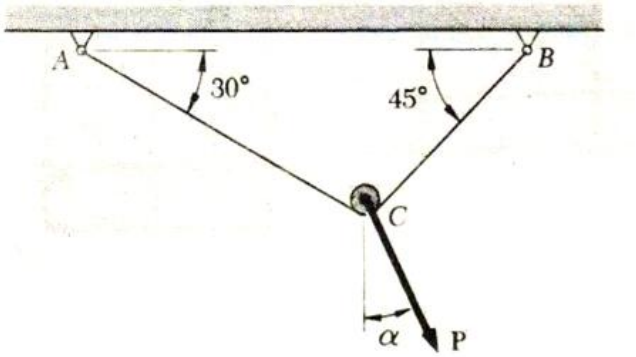


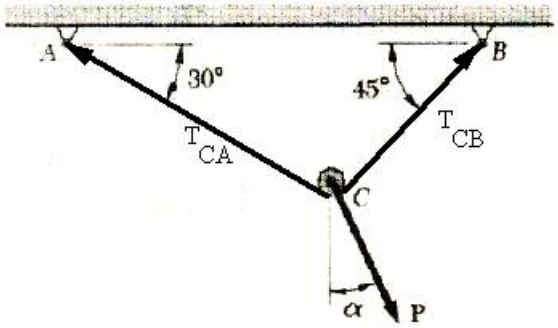
$$F_1 = F_2 = 2.5\ KN$$

نیرو	مقدار	Fx	Fy
F_1	$2.5\ KN$	$-2.5\ cos\ 50$	$+2.5\ sin\ 50$
F_2	$2.5\ KN$	$+2.5\ cos\ 20$	$+2.5\ sin\ 20$
F	F	$F\ Cos\ \alpha$	$F\ sin\ \alpha$
		Rx	Ry

$$Rx = 0 =$$
$$,F\ Cos\alpha = 2.5\ Cos\ 50 - 2.5\ Cos\ 20$$
$$= 0.74226$$
$$F\ sin\alpha = +2.5\ sin\ 50 + 2.5\ sin\ 20 = +2.77$$
$$tan\ \alpha = \frac{+2.77}{+0.74226} = 3.7318$$
$$\alpha = 75°$$
$$F = \frac{+2.77}{sin\ \alpha} = +2.87\ KN$$

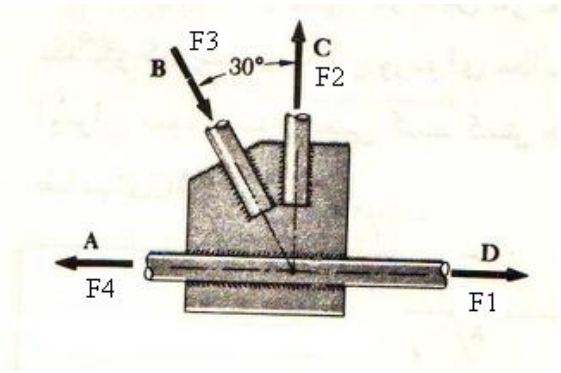
2-37 نیروی P بر چرخ کوچکی که روی کابل ABC می‌چرخـد وارد می‌شود، می‌دانیم که کشش وارد بر هر قسمت کابل برابر با N ۷۵۰ می‌باشد، معین کنید مقدار و امتداد نیروی Pرا.





$$T_{AC} = T_{BC} = 750\ N$$
$$P = ?$$
$$\alpha = ?$$
$$750\ Cos\ 45 - 750\ Cos\ 30 + P\ sin\ \alpha = 0$$
$$P\ Sin\ \alpha = 119.19$$
$$750\ \ sin\ 45 - 750\ \ sin 30 + P\ Cos\ \alpha = 0$$
$$P\ Cos\ \alpha = 905.33$$
$$tan\alpha = \frac{119.19}{905.33} = 0.13165$$
$$\alpha = 7.5°$$
$$P = \frac{119.19}{sin\ 7.5} = 913.2$$
$$P = 913\ N$$

2-38 دو نیـروی A و B بـه مقـدار $A=5000N, B=2500N$ بـر نقطه اتصال مطابق شکل وارد می‌شود، می‌دانیم که نقطـه اتصـال در وضع تعادل است، معین کنید نیروی D و C را.



$$F_3 = T_B = 2500\ N$$
$$T_A = F_4 = 5000\ N$$
$$T_C = T_D = ?$$

نیرو	مقدار	*Fx*	*Fy*
F_1	F_1	F_1	-
F_2	F_2	*0*	F_2
F_3	*2500*	*2500 sin 30*	*-2500Cos 30*
F_4	*5000*	*-5000*	*0*

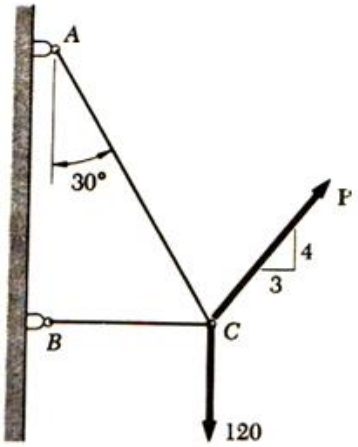
$Rx = 0 = \sum Fx$ $\quad F_1 = 2500\ sin\ 30 - 5000 = 0$

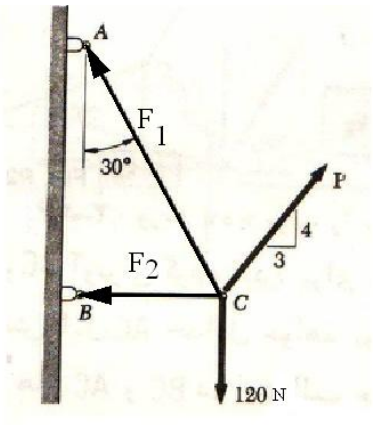
$T_{CD} = F_1 = 3750\ N$

$\sum Fy = 0$ $\quad F_2 = 2500\ Cos\ 30 = 2165\ N$

$$F_2 = T_D = 2165\ N$$

2-40 هرگاه نیروی $P=100N$ باشد، معین کنید کشش وارد بر کابلهای AC و BC را.





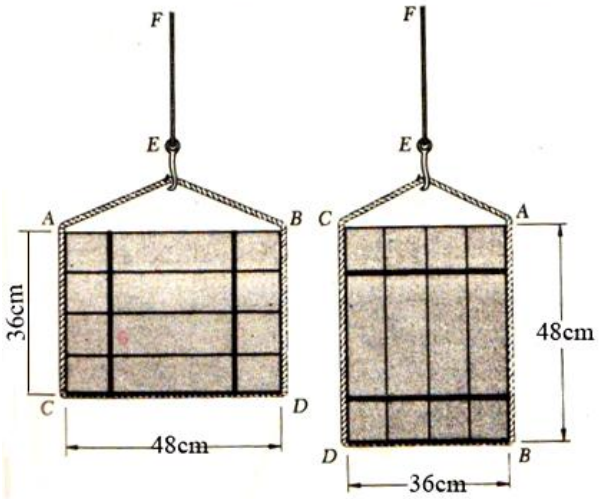
$P = 100\ \ 1b$

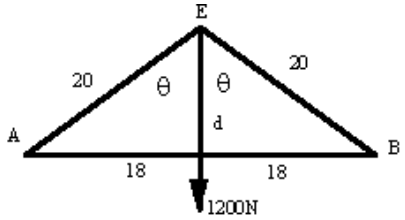
T_{AC}, T_{BC}

نیرو	مقدار	*Fx*	*Fy*
P	*100*	*100×3/5*	*100×4/5*
T_{AC}	F_1	$-F_1\ sin\ 30$	$+F_1 Cos\ 30$
T_{BC}	F_2	$-F_2$	*0*
Force	*120*	*0*	*-120*

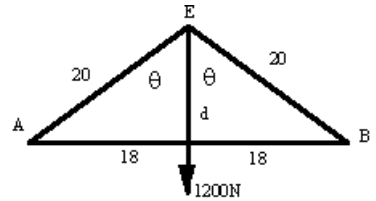
$$Fy = 0 \quad F_1\ Cos\ 30 = -100 \times {}^{4}/_{5} + 120$$
$$F_1 = 46.2\ N$$
$$Fx = 0 \quad F_2 = 100 \times {}^{3}/_{5} - F_1 sin\ 30$$
$$F_2 = 60 - 46.2\ sin\ 30 = 36.9\ \ N$$

2-42 برای بالا بردن صندوقی به وزن ۱۲۰۰ N آن را بوسیله کابل بالا برنده بطول $172cm$ببالا می‌کشند کابل را دور صندوق پیچیده و سپس به کابل EF آویزان می‌نمایند. معین کنید کشش وارد بر آن را در دو حالت مطابق شکل.





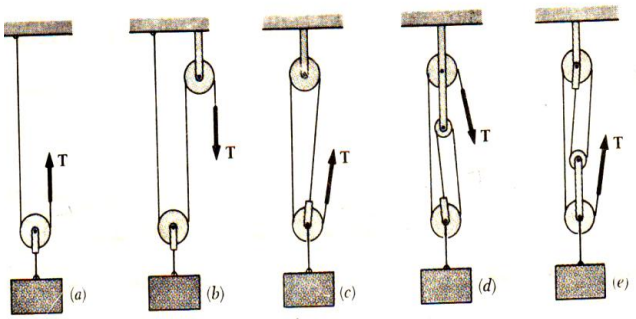
$$L = 172 \ \ cm$$
$$l = 48 + 36 + 36 = 120 \ \ cm$$
$$L' = 172 - 120 = 52 \ \ cm$$
$$d = \sqrt{676 - 576} \ \ = 10$$
$$d = 10 \ \ cm$$
$$\sum Fy = 0 \quad \Longrightarrow 1200 = 2 \times T_{AE} \times Cos\theta$$
$$= 2T_{AE} \times \frac{10}{26}$$
$$T_A = 1560 \ \ N$$



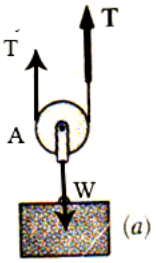
$$L' = 172 - (36 + 48 + 48) = 40$$
$$d = \sqrt{400 - 324} = \sqrt{76}$$
$$\sum Fy = 0 \quad \Longrightarrow 1200 = 2 \times T_{AE} \times Cos\theta$$
$$= 2T_{AE} \times \frac{\sqrt{76}}{20}$$
$$T_A = 1376.5 \ \ N$$

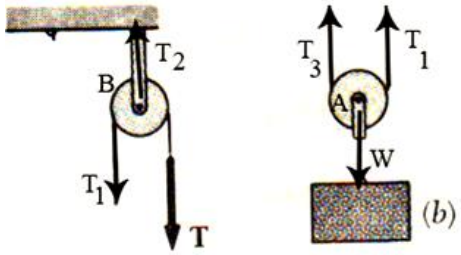
می توان نتیجه گرفت که هر چه عرض کمتر باشد،نیرو ی کشش طناب کمتر است در حالت دوم،نیرو۱۳,۳در صد کمتر است

2-43 صندوقی ۲۰۰ kg را به حالتهای مختلف مطابق شکل بوسیله طناب و قرقره می‌توان آویزان نمود. معین کنید، کشش طناب را در هر حالت (کشش طناب در هر طرف قرقره ساده برابر است و آن را می‌توان به روشی که در فصل چهارم بیان می‌گردد ثابت نمود).

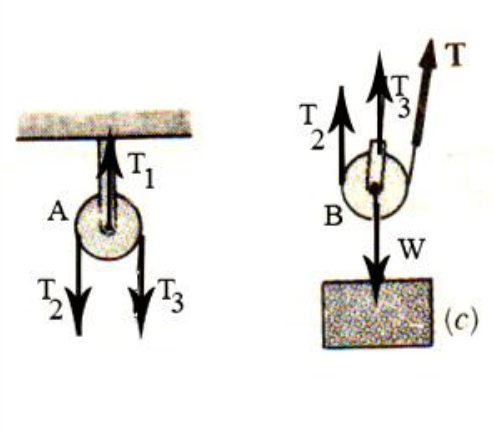


$$a) \Longrightarrow \begin{cases} T = T' \\ T' + T = W` \\ 2T = W \\ T = W/2 \end{cases}$$

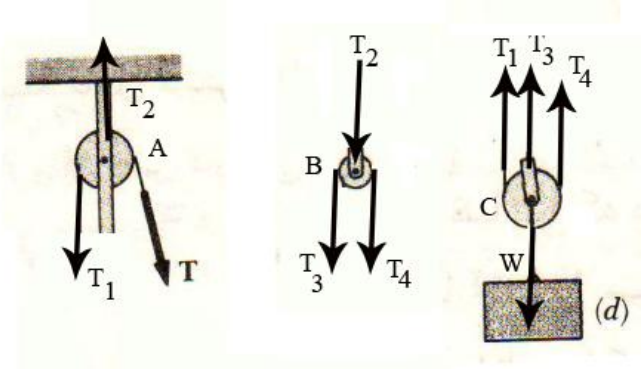




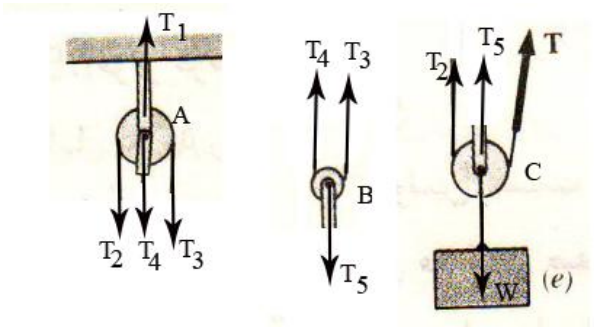
$$b) \Longrightarrow \begin{cases} T_1 = T \\ 2T = T_2 \\ T_1 = T_3 \\ T_1 + T_3 = W \\ T + T = W \\ T = \frac{W}{2} \end{cases}$$



$$c) \Longrightarrow \begin{cases} T_2 = T_3 \\ 2T_2 = T_1 \\ T = T_2 \\ T_3 = T \\ T + T_2 + T_3 = W \\ T + T + T = W \\ T = \frac{W}{3} \end{cases}$$



$$d) \Longrightarrow \begin{cases} T = T_1 \\ T_2 = T_1 + T = 2T \\ T_3 = T_4 \\ -T_2 = 2T_3 = 2T_4 \\ T_1 = T_A = T \\ T_1 + T_4 + T_5 = W \\ 3T = W \\ T = \frac{W}{3} \end{cases}$$

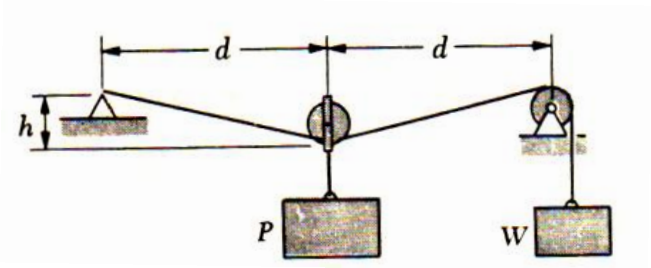


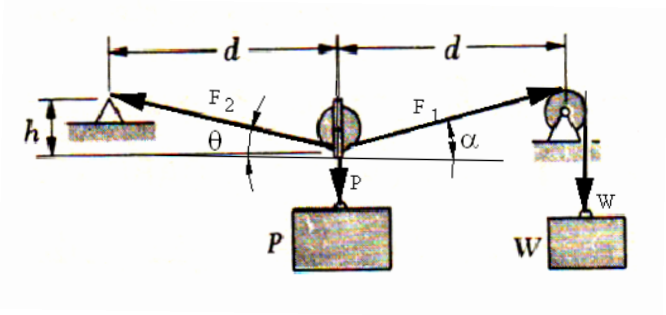
$$e) \Longrightarrow \begin{cases} T_2 = T_3 = T \\ 2T_2 + T_4 = T_1 \\ T_3 = T_4 = T \\ T_4 + T_3 = T_5 \quad \Longrightarrow 2T = T_5 \\ T_2 = T \\ T_5 + T + T_3 = W \\ 2T + T + T = W \\ \boxed{T = W/4} \end{cases}$$

2-44 قسمتهای b و d مسئله *2-43* را به فرض اینکه قسمت آزاد طناب به صندوق متصل باشد حل کنید.

$$For \qquad 2T = W = 200\ Kg$$
$$T = 100 \times 9.81$$
$$T = 981\ N$$
$$For\ \ d) \quad \Longrightarrow \quad 3T = W = 200$$
$$T = \frac{200}{3} \times 9.81 \qquad T = 654\ N$$

2-46 هرگـاه در دیـاگرام شـکل N $W=80$، $P=10$ و $d=20cm$ باشد معـین کنیـد مقـدار hوd را تـا دسـتگاه در وضع تعادل قرار گیرد.





$P = 10 \ \ N$ $\qquad$ $d = 20cm$

$W = 80 \ \ N$ $\qquad$ $h =?$

نیرو	مقدار	Fx	Fy
W	80	0	-80
P	10	0	-10
F_1	F_1	$F_1 Cos\alpha$	$+F_1 \sin\alpha$
F_2	F_2	$-F_2 Cos\theta$	$F_2 \sin\theta$

$F_1 = W = 80$

$Fx = 0 \quad \Longrightarrow F_2 Cos\theta = F_1 Cos\alpha \quad \alpha = \theta$

$F_2 = F_1 = 80 \ \ N$

$Fy = 0 \quad \Longrightarrow -80 - 10 + F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\theta = 0$

$-90 + 80 \sin\theta + 80 \sin\theta = 0$

$Sin\,\theta = \frac{90}{2\times80} = 0.5625 \qquad \theta = 34.22$

$\tan\theta = \frac{h}{d} \qquad h = d\tan\theta =$

$20\times tan34.22$

$h = 13.6 \ \ cm$

$\sum Fy = 0 \quad \Longrightarrow F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\theta = 10$

$\sum Fx = 0 \quad \Longrightarrow 80 \sin\alpha + F_2 \sin\theta = 10$

$$\sin\alpha + \sin\alpha = \frac{10}{80}$$

$2\sin\alpha = \frac{10}{80}$

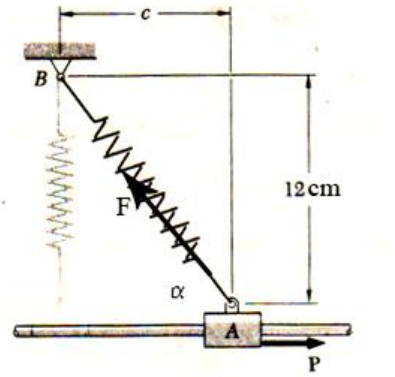
$\sin\alpha = \frac{10}{160}$

$\alpha = 3.58°$

$d = 20\tan\alpha = 20\tan 3.58$

$d = 1.25 \ \ cm$

2-47 طوقه A می‌تواند آزادانه در امتداد افقی روی میلـه صـاف بلغزد. فنری از یک طرف به نقطه A متصل می‌باشد ضریب ثابـت فنر $10 N/cm$ تا وقتیکه طوقـه A در زیـر نقطـه B قـرار گرفتـه تغییر شکل نمی‌دهد. معین کنید مقدار نیروی لازم را برای اینکـه دستگاه در وضع تعادل قرار گیرد در حالیکه فاصله c اولاً $9\ cm$ ، ثانیاً $16\ cm$ باشد.



$C = 9cm$

$C = 16cm$

$K = 10 \ N/cm$

$FCos\,\alpha = P$

$AB = \sqrt{C^2 + 144}$

$(F)\left(\frac{C}{\sqrt{144 + C^2}}\right) = P$

$C = 9cm \qquad AB =$

$\sqrt{144 + 81} = 15$

$d' = 15 - 12 = 3cm$ گسترش فنر

$F = (3)(10) = 30 \quad N$

$P = (30)\left(\frac{9}{15}\right) = 18.2 \ \ N$

$C = 16 \ \ cm$

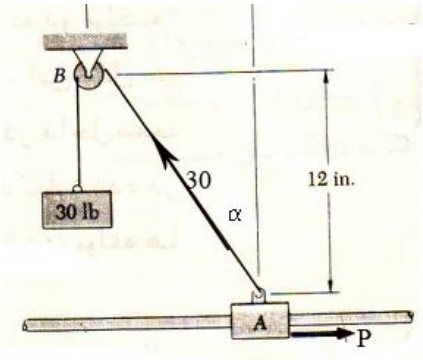
$AB = \sqrt{144 + 256} = 20$

گسترش فنر $d' = 20 - 12 = 8cm$

$F = (8)(10) = 80 \quad N$

$P = (80)(20) = 1600N$

2-48 مهره A به آزادی می‌تواند روی میله صاف بلغزد. معین کنید مقدار نیروی لازم را برای اینکه دستگاه در وضع تعادل قرار گیرد اولاً فاصله C برابر با ۹ in ، ثانیاً $C=16\ in$باشد.



$K = 10 \quad {}^{1b}/_{1n} \qquad P = 30sin\ \alpha$

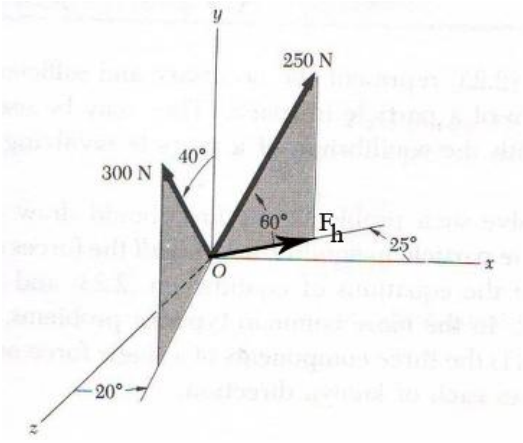
$P = 30 \times \dfrac{C}{\sqrt{12^2 + C^2}}$

a) $P = 30 \times \dfrac{9}{\sqrt{12^2+9^2}} = 30 \times \dfrac{9}{15} = 18lb$

b) $P = 30 \times \dfrac{16}{\sqrt{12^2 + 16^2}}$

$P = 30 \times \dfrac{16}{20} = 24\ lb$

*2-50*تعیین کنید *(a)* مؤلفه‌های x و y و z نیروی ۲۵۰ نیوتن را *(b)* زوایای θ_x و θ_y و θ_z که این نیرو با سه محور تشکیل می‌دهد.



$Fh = F\ Cos\ 60 = 250\ Cos\ 60$

$Fh = 125N$

$Fy = 250\ sin\ 60$

$Fy = 216.5\ N$

$Fx = Fh\ Cos\ 25$

$Fx = 125\ Cos\ 25 = 113.3$

$Fz = -125\ sin\ 25$

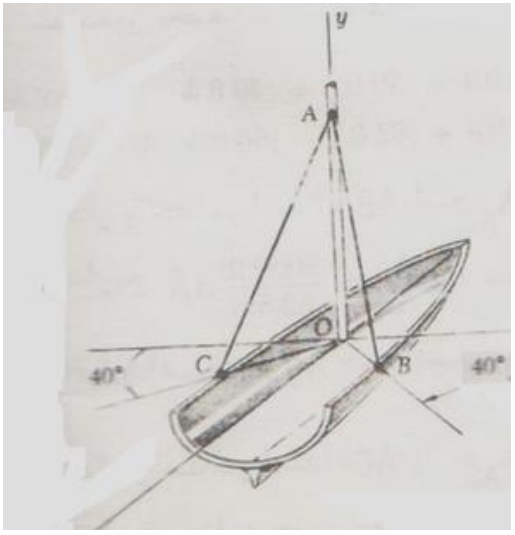
$Fz = \ -52.8 \quad 1b$

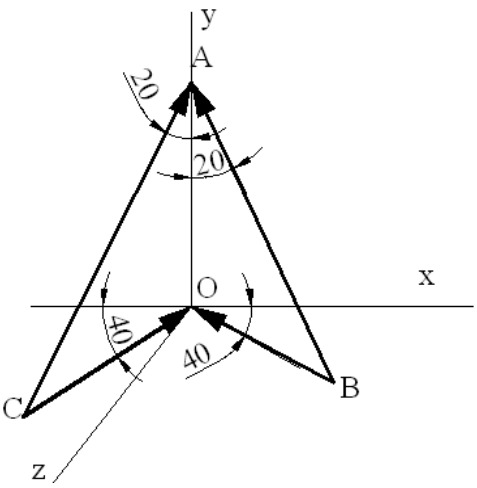
$Cos\ \theta x = \dfrac{Fx}{F} = \dfrac{113.3}{250} \qquad \theta x = 63.1$

$Cos\ \theta x = \dfrac{Fy}{F} = \dfrac{216.5}{250} \qquad \theta y = 30$

$Cos\ \theta z = \dfrac{Fz}{F} = -\dfrac{52.8}{250} \qquad \theta z = 102.2$

*2-52*زاویه بین سیم مهار AB و دکل 20° است. می‌دانیم که کشش سیم AB برابر با ۳۰۰نیوتن است، معین کنید *(a)* مؤلفه‌های x و y و z نیروی وارد بر قایق در نقطه c را و *(b)* زوایای θ_x و θ_y و θ_z مشخص کننده امتداد نیروی وارد بر نقطه C را.





$T_{AB} = 300$

$\alpha = 20°$

$sin20 = \frac{T_{OB}}{T_{AB}}$

$T_{OB} = -T_{AB}\ sin\ 20$

$T_{AO} = Ty = T_{AB}\ Cos\ 20$=*300cos20=282N*

$T_{AB}x = T_{OB}Cos\ 40$

$T_{AB}x = -T_{AB}\sin 20\ Cos\ 40$

$T_{AB}x = -300sin20cos40 = -230N$

$T_{AB}z = -T_{AB}\sin 20\ Cos\ 40$

$T_{AB}z = 230sin20cos40 = 60.3N$

$T_{OC} = T_{AC}\ sin20$

$T_{AC}y = T_{AC}\ Cos\ 20$

$T_{AC}x = T_{AC}\ sin20\ Cos\ 40$

$T_{AC}z = -T_{AC}\ sin20\ Cos\ 40$

$T_{AC} = -T_{AB}$

$T_{AB} + T_{AC} = 0$

$T_{AC}x = -300\ sin\ 20\ Cos\ 40$

$T_{AC}x = -78.6 \qquad N$

$Cos\ \theta x = \frac{Fx}{F} = \frac{-78.6}{300} \qquad \theta x = 105.2$

$T_{AC}y = T_{AC}\ Cos\ 20$

$T_{AC}y = -300\ Cos\ 20$

$T_{AC}y = -300\ Cos\ 20 = -282$

$Cos\ \theta y = \frac{-282}{300}$

$\theta y = 160$

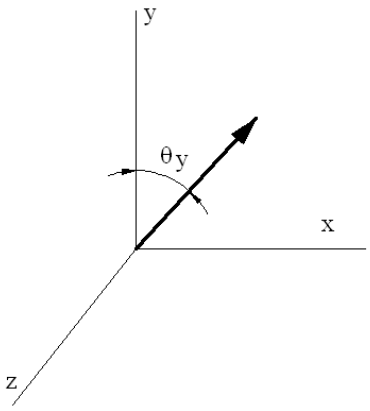
$T_{AC}Z = 300\ sin\ 256$

$T_{AC}Z = +66$

$Cos\theta_Z = \frac{66}{300}$

$\theta z = 77.3$

*2-54*نیروی ۲۵۰۰ نیوتنی در مبدأ مختصات در امتدادی که زوایای آن $\theta_x = ۶۵^\circ$ و $\theta_y = ۴۰^\circ$ است وارد می‌شود. هم چنین می‌دانیم که مؤلفه نیروی در امتداد محور z مثبت است. معین کنید مقدار زاویه θ_z و مؤلفه‌های نیرو را.



$F = 2500 \quad N$

$\theta x = 65 \qquad \theta y = 40 \qquad \overset{z^+}{\rightarrow}$

$\theta z = ?$

$Cos^2\theta z + Cos^2\theta y + Cos^2\theta z = 1$

$Cos^2\theta z = 1 - Cos^2 65 + Cos^2 40$

$Cos\ \theta z = 0.4843$

$\theta z = 61$

$\frac{Fx}{F} = Cos\ \theta x \qquad Fx = 2500 \times Cos\ 65$

$Fx = 1056.5 \qquad N$

$\frac{Fy}{F} = Cos\ \theta y \qquad Fy = 2500\ Cos\ 40$

$Fy = 1915 \qquad N$

$\frac{Fz}{F} = Cos\ \theta z \qquad Fz = 2500\ Cos\ 61$

$Fz = 1212 \qquad N$

*2-56*معین کنید مقدار و جهت نیروی

$F = (700N)i - (820N)\,j + (960N)k.$

$F = 700i - (820\ N)j + 960\ NK$

$R = \sqrt{700^2 + 820^2 + 960^2} = 1444\ N$

$F = 1444(0.48\ i - 0.56\ j + 0.66k)$

$Cos\ \theta x = \frac{Fx}{F} = \frac{700}{1444}$

$\theta x = 61$

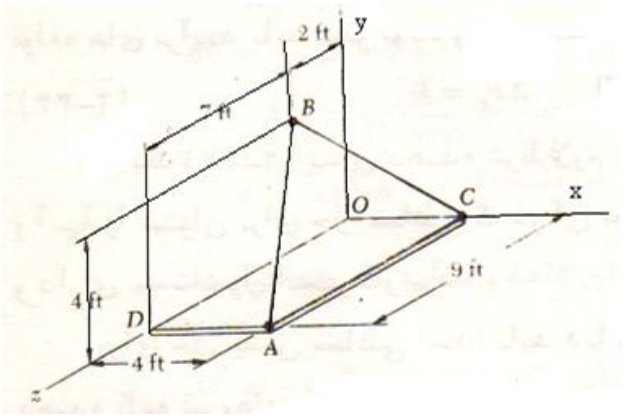
$Cos\ \theta x = -\frac{820}{1444} = -0.56$

$\theta y = 124.6$

$Cos\,\theta x = \frac{460}{1444} = 0.66$

$\theta z = 48.3$

2-58 می‌دانیم که کشش در کابل AB برابر ۴۵۰ پوند است. معین کنید مؤلفه‌های نیروی وارد بر صفحه در نقطه A را.



$T_{AB} = 450\ lb \qquad A(4,0,9) \qquad B(0,4,2)$

$\underset{AB}{\rightarrow} \qquad dx = -4\,,\quad dy = 4\,,\quad dz = -7$

$Fx = -200 \quad 1b \qquad Fy = 200 \quad 1b$

$Fz = -350 \quad 1b$

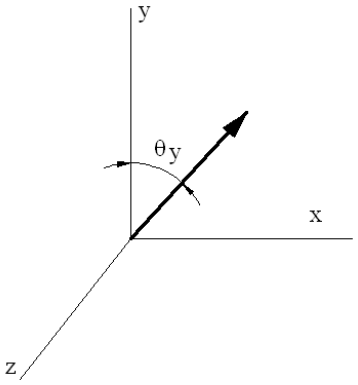
2-60 زوایای θ_x و θ_y و θ_z مشخص کننده جهت نیروی وارد بر نقطه A در مسئله *2-58* را بدست آورید.

$Cos\,\theta x = \frac{-200}{450} \qquad \theta x = 116.4$

$Cos\,\theta y = \frac{200}{450} \qquad \theta y = 63.6$

$Cos\,\theta z = \frac{-350}{450} \qquad \theta z = 141.1$

2-62 مطلوبست تعیین دو مقدار ممکن θ_y برای نیرویی مانند F بطوریکه *(a)* نیرو تشکیل زوایای مساوی با جهت مثبت محورهای x و y و z بدهد. *(b)* نیرو تشکیل زوایای مساوی با جهت مثبت محورهای y و z و زاویه 45° با جهت مثبت محور x تشکیل دهد.



$a) \quad \theta y = \theta z = \theta x$

$3Cos^2\theta x = 1$

$Cos^2\theta x = \frac{1}{3}$

$\theta x = 54.7$

$\theta x = 125.3$

	مقدار	dx	dy	dz	d	Fx	Fy	Fz
F	450	-4	4	-7	9	$-\frac{4}{9}x450$	$-\frac{4}{9}\times 450$	$-\frac{7}{9}\times 450$

$b) \quad \theta z = \theta y \qquad \theta x = 45°$

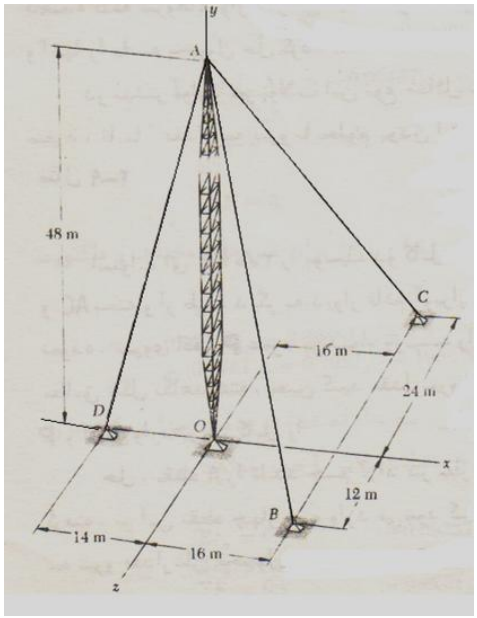
$2Cos^2\theta z = 1 - Cos^2 45$

$Cos^2\theta z = 0.25 \qquad Cos\ \theta z = 0.5$

$\theta z = 60$

$\theta z = 120$

2-64 می‌دانیم کشش وارد بر کابل AB برابر ۳۹ KN است معین کنید مقادیر لازم کشش وارد بر AC و AC را به طوریکه برآیند سه نیروی وارد بر نقطه A قائم باشد.

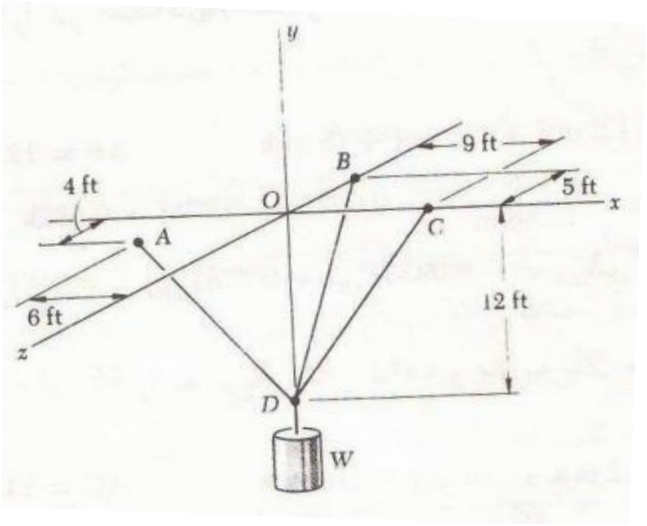


$T_{AB} = 39\ KN \qquad B(16,0,12) \qquad D(-14,0,0)$
$C(16,0,24) \quad A(0,48,0)$

$\overrightarrow{AB}$	$dx = 16$	$dy = -48$	$dz = 12$
$\overrightarrow{AC}$	$dx = 16$	$dy = -48$	$dz = -24$
$\overrightarrow{AD}$	$dx = -14$	$dy = -48$	$dz = 0$

$$F_X = \frac{16}{52}T_{AB} + \frac{16}{56}T_{AC} - \frac{14}{50}T_{AD} = 0$$
$$F_Y = \frac{-48}{52}T_{AB} - \frac{48}{56}T_{AC} - \frac{48}{50}T_{AD} = 0$$
$$F_Z = \frac{12}{52}T_{AB} - \frac{24}{56}T_{AC} = 0$$
$$T_{AB} = 1.857\,T_{AC} \qquad T_{AC} = \frac{39}{1.887}$$
$$T_{AC} = 21\ KN$$
$$0.857T_{AC} - 0.28T_{AD} = 0$$
$$T_{AD} = \frac{0.8857(21)}{0.28}$$
$$T_{AD} = 64.3\ KN$$

*2-66*وزنه W بوسیله سه کابل مطابق شکل نگاهداری می‌شود. معین کنید مقدار Wرا در صورتیکه بدانیم کشش در کابل BD برابر با ۹۷۵ پوند می‌باشد.



$T_{BD} = 975\ lb \qquad B(0,0,-5)$
$D(0,-12,0) \quad C(9,0,0) \quad A(-6,0,4)$
فرض گرفته شود جهت نیرو به سمت A,B,C

نیرو	مقدار	dx	dy	dz	d
DA	T_{DA}	-6	12	4	14
DB	975	0	12	-5	13
DC	T_{DC}	9	12	0	15
W	W		-W		

$$Fx = \frac{-6}{14}T_{DA} + \frac{9}{15}T_{DC}$$
$$Fy = \frac{12}{14}T_{DA} + \frac{12}{13}(975) + \frac{12}{15}T_{DC} - W$$
$$Fz = \frac{4}{14}T_{DA} - \frac{5}{13}(975)$$

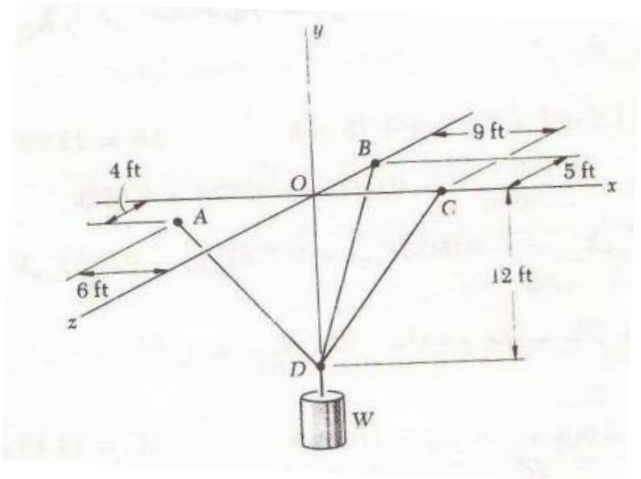
$$\sum Fz = 0$$
$$\frac{4}{14}T_{DA} - \frac{5}{13}(975) = 0$$
$$T_{DA} = 1321.5\ \ lb$$
$$\sum Fy = 0 \qquad , \sum Fx = 0$$
$$\frac{-6}{14}T_{DA} + \frac{9}{15}(T_{DC}) = 0$$

Fx	*Fy*	*Fz*
$\frac{-6}{14}T_{DA}$	$\frac{12}{14}T_{DA}$	$\frac{4}{14}T_{DA}$
0	$\frac{12}{13}(T_{DB})$	$-\frac{5}{13}(T_{DB})$
$\frac{9}{15}(300)$	$\frac{12}{15}(300)$	0
0	*-W*	*0*

$$\sum Fx = 0$$
$$\frac{-6}{14}T_{DA} - \frac{5}{13}(300) = 0$$
$$T_{DA} = 420 \ \ lb$$
$$\sum Fz = 0 \quad , \sum Fy = 0$$
$$\frac{4}{14}T_{DA} - \frac{5}{13}(T_{DB}) = 0$$
$$T_{DB} = \frac{4x13}{5x14}\ (420) = 312 \quad lb$$
$$\frac{12}{14}T_{DA} + \frac{12}{13}(T_{DB}) + \frac{12}{14}(T_{DC}) = W$$
$$\frac{12}{14}(420) + \frac{12}{13}(312) + \frac{12}{15}(300) = W$$

$$W = 888 \ \ lb$$

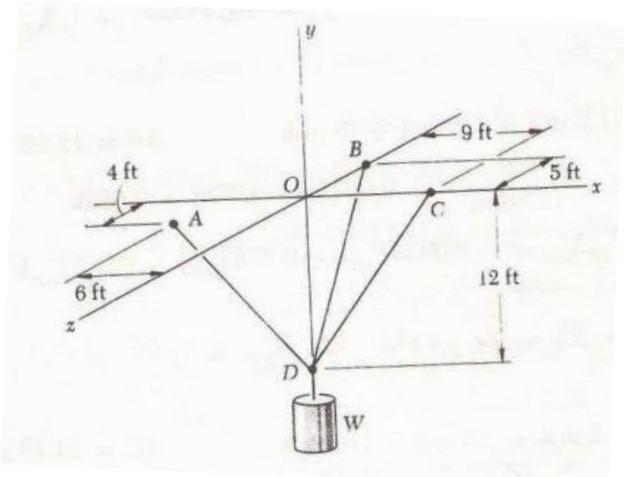
2-68 وزنه W به مقدار ۵۵۵ پوند بوسیله سه کابل نگاهداری می‌شود، معین کنید کشش در هر کابل را.



$$T_{Dc} = \frac{(15)(6)}{9(14)}(1321.5)$$
$$T_{DC} = 944 \ lb$$
$$\frac{12}{14}T_{DA} + \frac{12}{13}(975) + \frac{12}{14}T_{DC} = W$$
$$\frac{12}{14}(1321.5) + \frac{12}{13}(975) + \frac{12}{15}(944) = W$$
$$1133 + 900 + 755 = W$$

$$W = 2788 \ \ lb$$

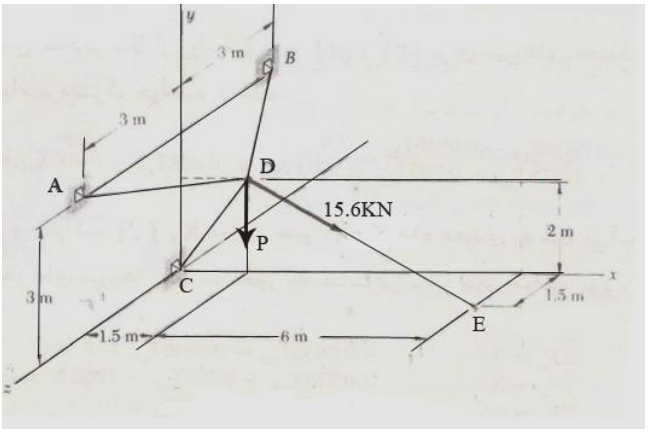
2-67 وزنه W بوسیله سه کابل مطابق شکل آویزان شده، معین کنید مقدار W را در صورتیکه می‌دانیم کشش در کابل CD ۳۰۰ پوند می‌باشد.



$T_{DC} = 300\ lb \qquad B(0,0,-5) \qquad D(0,-12,0)$
$C(9,0,0) \quad A(-6,0,4)$
فرض گرفته شود جهت نیرو به سمت A,B,C

نیرو	مقدار	*dx*	*dy*	*dz*	*d*
DA	T_{DA}	*-6*	*12*	*4*	*14*
DB	T_{DB}	*0*	*12*	*-5*	*13*
DC	300	*9*	*12*	*0*	*15*
W	*W*				

2-69 سه کابل در نقطه Dبهم متصل و نیروی$15.6KN$ بر آن مطابق شکل وارد می شود.معین کنید کشش در هر کابل را.



$B(0,3,-3)\ E(7.5,0,1.5)$
$D(1.5,2,0)\ \ C(0,0,0)\ \ A(0,3,3)$
A,B,C فرض گرفته شود جهت نیرو به سمت

نیرو	مقدار	*dx*	*dy*	*dz*	*d*
$\overrightarrow{DB}$	T_{DB}	*-1.5*	*1*	*-3*	*3.5*
$\overrightarrow{DA}$	T_{DA}	*-1.5*	*1*	*3*	*3.5*
$\overrightarrow{DE}$	15.6	*6*	*-2*	*1.5*	*6.5*
$\overrightarrow{DC}$	T_{DC}	*-1.5*	*-2*	*0*	*2.5*

Fx	*Fy*	*Fz*
$\frac{-1.5}{3.5}\times T_{DB}$	$\frac{1}{3.5}\times T_{DB}$	$\frac{-3}{3.5}\times T_{DB}$
$\frac{-1.5}{3.5}\times T_{DA}$	$\frac{1}{3.5}\times T_{DA}$	$\frac{3}{3.5}\times T_{DA}$
$\frac{6}{6.5}(15.6)$	$\frac{-2}{6.5}(15.6)$	$\frac{1.5}{6.5}(15.6)$
$\frac{-1.5}{2.5}(T_{DC})$	$\frac{-2}{2.5}(T_{DC})$	*0*

$T_{BD}=975\ lb \qquad B(0,0,-5)$
$D(0,-12,0)\ \ C(9,0,0)A(-6,0,4)$

A,B,C فرض گرفته شود جهت نیرو به سمت

نیرو	مقدار	*dx*	*dy*	*dz*	*d*
DA		*-6*	*12*	*4*	*14*
DB		*0*	*12*	*-5*	*13*
DC		*9*	*12*	*0*	*15*
W	*555*				

Fx	*Fy*	*Fz*
$\frac{-6}{14}T_{DA}$	$\frac{12}{14}T_{DA}$	$\frac{4}{14}T_{DA}$
0	$\frac{12}{13}(T_{DB})$	$-\frac{5}{13}(T_{DB})$
$\frac{9}{15}T_{DC}$	$\frac{12}{15}T_{DC}$	0
0	*-555*	*0*

$$\sum Fz=0$$
$$\frac{4}{14}T_{DA}-\frac{5}{13}(T_{DB})=0$$
$$T_{DA}-1.34(T_{DB})=0$$
$$\sum Fy=0 \quad ,\sum Fx=0$$
$$\frac{-6}{14}T_{DA}+\frac{9}{15}(T_{DC})=0$$
$$-T_{DA}+1.4(T_{DC})=0$$
$$\frac{12}{14}T_{DA}+\frac{12}{13}(\frac{T_{DA}}{1.34})+\frac{12}{15}\frac{T_{DA}}{1.4}=555$$
$$0.857(T_{DA})+0.688(T_{DA})+0.571(T_{DA})=555$$
$$2.116(T_{DA})=555$$
$$(T_{DA})=262.5\ \ lb$$
$$(T_{DC})=\frac{262.5}{1.4}=187.5lb$$
$$262.5-1.34(T_{DB})=0$$
$$(T_{DB})=196\ \ lb$$

$B(0,3,-3)$ $E(7.5,0,1.5)$ $D(1.5,2,0)$

$C(0,0,0)$ $A(0,3,3)$

فرض گرفته شود جهت نیرو به سمت A,B,C

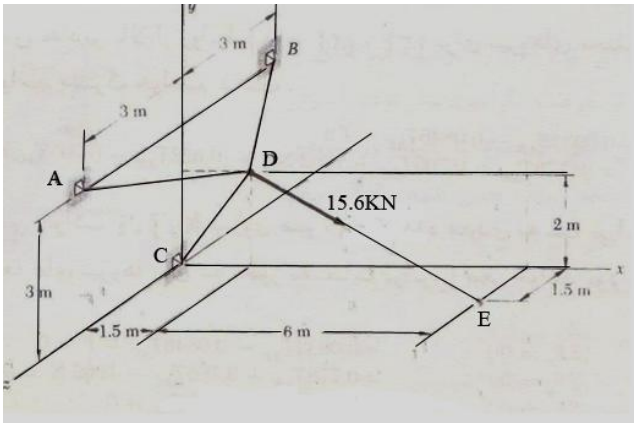
نیرو	مقدار	*dx*	*dy*	*dz*	*d*
$\overrightarrow{DB}$	T_{DB}	*-1.5*	*1*	*-3*	*3.5*
$\overrightarrow{DA}$	T_{DA}	*-1.5*	*1*	*3*	*3.5*
$\overrightarrow{DE}$	15.6	*6*	*-2*	*1.5*	*6.5*
$\vec{P}$	*P*				
$\overrightarrow{CD}$	۰				

Fx	*Fy*	*Fz*
$\frac{-1.5}{3.5}T_{DB}$	$\frac{1}{3.5}T_{DB}$	$\frac{-3}{3.5}T_{DB}$
$\frac{-1.5}{3.5}T_{DA}$	$\frac{1}{3.5}T_{DA}$	$\frac{3}{3.5}T_{DA}$
$\frac{6}{6.5}(15.6)$	$\frac{-2}{6.5}(15.6)$	$\frac{1.5}{6.5}(15.6)$
0	*-P*	*0*

$$\sum Fx = 0$$
$$\frac{-1.5}{3.5}\times T_{DB} + \frac{-1.5}{3.5}\times T_{DA} + \frac{6}{6.5}(15.6) = 0$$
$$+T_{DB} + T_{DA} = 33.6$$
$$\sum Fz = 0 \quad ,\sum Fy = 0$$
$$\frac{-3}{3.5}\times T_{DB} + \frac{3}{3.5}\times T_{DA} + \frac{1.5}{6.5}(15.6) = 0$$
$$+T_{DB} - T_{DA} = 4.2$$
$$\frac{1}{3.5}\times T_{DB} + \frac{1}{3.5}\times T_{DA} + \frac{-2}{6.5}(15.6) - P = 0$$
$$+2T_{DA} = 33.6 - 4.2 = 29.4$$
$$T_{DA} = 14.7 \ \ KN$$
$$T_{DB} = 33.6 - 14.7 = 18.9 \ \ KN$$

$$\sum Fx = 0$$
$$\frac{-1.5}{3.5}\times T_{DB} + \frac{-1.5}{3.5}\times T_{DA} + \frac{6}{6.5}(15.6) + \frac{-1.5}{2.5}(T_{DC}) = 0$$
$$+T_{DB} + T_{DA} + 1.4(T_{DC}) = 33.6$$
$$\sum Fz = 0 \quad ,\sum Fy = 0$$
$$\frac{-3}{3.5}\times T_{DB} + \frac{3}{3.5}\times T_{DA} + \frac{1.5}{6.5}(15.6) = 0$$
$$+T_{DB} - T_{DA} = 4.2$$
$$\frac{1}{3.5}\times T_{DB} + \frac{1}{3.5}\times T_{DA} + \frac{-2}{6.5}(15.6) + \frac{-2}{2.5}(T_{DC}) = 0$$
$$T_{DB} + T_{DA} - 2.8(T_{DC}) = 16.8$$
$$+2T_{DA} - 2.8(T_{DC}) = 12.6$$
$$T_{DA} - 1.4(T_{DC}) = 6.3$$
$$4.2 + T_{DA} + T_{DA} + 1.4\left(\frac{T_{DA} - 6.3}{1.4}\right) = 33.6$$
$$4.2 + T_{DA} + T_{DA} + (T_{DA} - 6.3) = 33.6$$
$$T_{DA} = 11.9 \ \ KN$$
$$T_{DC} = \frac{-6.3 + 11.9}{1.4} = 4 \ \ KN$$
$$+T_{DB} + 11.9 + 1.4(4) = 33.6$$
$$T_{DB} = 16.1 \ \ KN$$

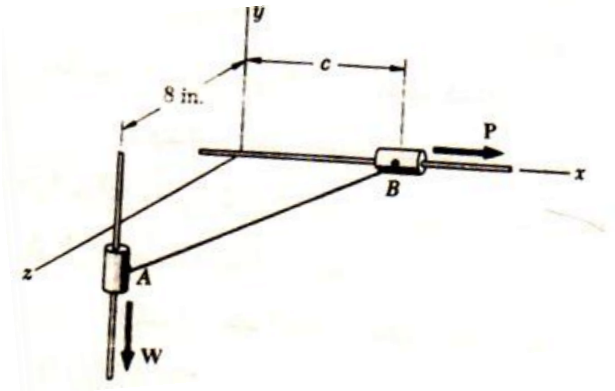
2-70 همراه نیروی $۱۵/۶KN$ مطابق شکل نیـروی دیگـر P در نقطه D در امتدادو موازی با محور y اثر داده می‌شود معین کنید مقدار و جهت نیروی P را هر گاه کشش در کابل CD برابر صفر باشد.



Fx	Fy	Fz
$-0.707T_{DB}$	$0.424T_{DB}$	$-0.565T_{DB}$
0	$0.35T_{DA}$	$0.94T_{DA}$
$0.707T_{DC}$	$0.424T_{DC}$	$-0.565T_{DC}$
0	-147.2 N	0

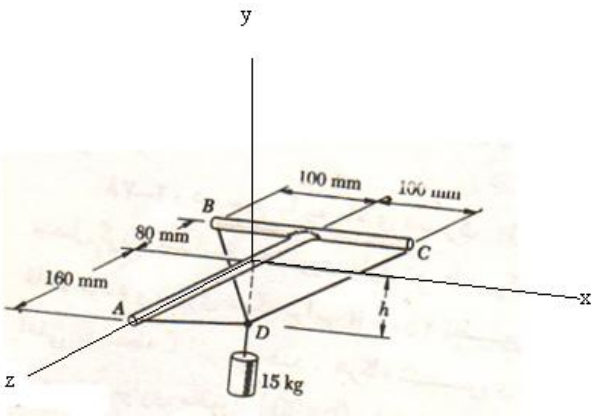
$$\sum Fx = 0$$
$$-0.707T_{DB} + +0.707T_{DC} = 0$$
$$+T_{DB} = T_{DC}$$
$$\sum Fz = 0 \quad , \sum Fy = 0$$
$$0.424T_{DB} + 0.35T_{DA} + 0.424T_{DC} - 147.2 = 0$$
$$-0.565T_{DB} + 0.94T_{DA} - 0.565T_{DC} = 0$$
$$0.94T_{DA} = 2(0.565T_{DB})$$
$$0.832T_{DA} = T_{DB}$$
$$0.832T_{DA} = T_{DC}$$
$$0.424(0.832T_{DA}) + 0.35T_{DA} + 0.424(0.832T_{DA}) = 147.2$$
$$147.2 = (1.055)T_{DA}$$
$$T_{DA} = 139.5 \ N$$
$$T_{DB} = T_{DC} = 0.832(139.5) = 115.8 \ N$$

2-74 طوقه A بوزن $5.6lb$ می‌تواند بطور آزاد روی میله قائم بدون اصطکاک بلغزد، بواسطه سیم AB به طوقه B متصل شده است. می‌دانیم که طول سیم $AB=18 \ in$ می‌باشد. معین کنید کشش وارد بر سیم را وقتی *(a)* فاصله $C=2in$ است. *(b)* فاصله $C=8in$ است.



$$\frac{1}{3.5} \times 19.8 + \frac{1}{3.5} \times 14.7 + \frac{-2}{6.5}(15.6) - P = 0$$
$$5.4 + 4.2 - 4.8 - P = 0$$
$$P = 4.8 \ KN$$

2-72 استوانه‌ای $15kg$ بوسیله سه سیم مطابق شکل نگهداری می‌شود معین کنید کشش در هر سیم را.



$h=60mm$

$B\left(-100, 0, -80\right) \ A(0,0,160)$

$D(0,-60,0) \ C(100,0,-80)$

فرض گرفته شود جهت نیرو به سمت A,B,C

نیرو	مقدار	dx	dy	dz	d
$\overrightarrow{DB}$	T_{DB}	-100	60	-80	141.4
$\overrightarrow{DA}$	T_{DA}	0	60	160	170.9
$\overrightarrow{DC}$	T_{DC}	100	60	-80	141.4
$\vec{P}$	P				

نیرو	مقدار	dx	dy	dz	d
P	–	–	–	–	–
W_A	–	–	–	–	–
T_{AB}	T	-8	14	8	18

Fx	Fy	Fz
P	–	–
–	-5.6	–
$-\frac{8}{18}T$	$\frac{14}{18}T$	$\frac{8}{18}T$

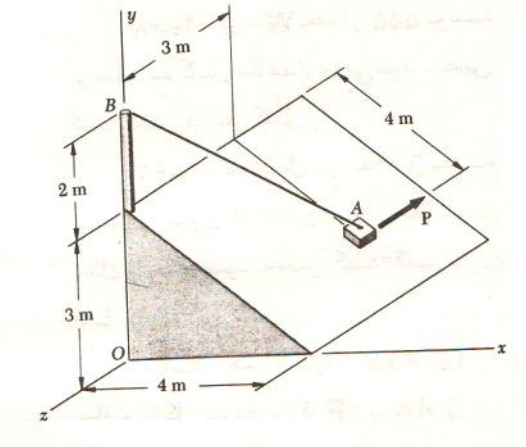
$\sum Fy = 0 \qquad +5.6 = \frac{14}{18}T$

$T = 7.2\ lb$

$\sum Fx = 0 \Longrightarrow P - \frac{8}{18}T = 0$

$P = \frac{8}{18}(7.2) = 3.2 \quad 1b$

2-76 صندوقی ۳۰ kg روی سطح شیب‌دار بواسطه سیم AB و نیروی افقی P که موازی محور zها می‌باشد نگاهداری می‌شود. از آنجایی که صندوق در حالت پرتاب است، نیروی وارد بوسیله سطح شیب‌دار بر صندوق عمود بر سطح شیب‌دار است. معین کنید مقدار P و کشش وارد بر سیم AB را.



$W_A = 30\ Kg$

$P = ?$

$B(0,5,0)$

اگر $C = 2"$ $\qquad C = 8"$ $\qquad T_{AB} = ?$

$A(O,h,8)\ \ B(2,0,0) \quad C=2"$

$\overrightarrow{AB} = (0-2)i + hj + 8k$

$(-2)^2 + h^2 + 64 = (18)^2 = 324$

$h^2 = 324 - 68 = 256$

$h = 16$

$\overrightarrow{AB} = -2i + 16j + 8k$

$T_{AB} = \frac{T}{18}(-2i + 16j + 8k)$

نیرو	مقدار	dx	dy	dz	d
P	P	–	–	–	–
W_A	5.6	–	–	–	–
T_{AB}	T	-2	16	8	18

Fx	Fy	Fz
P	–	–
–	-5.6	–
$-\frac{2}{18}T$	$\frac{16}{18}T$	$\frac{8}{18}T$

$\sum Fx = 0 \Longrightarrow P = \frac{2}{18}T$

$\sum Fy = 0 \qquad 5.6 = \frac{16}{18}T \quad T = 6.31\ lb$

$P = \frac{2}{18}(6.3) = 0.7$

b) $\quad C = 8"$

$64 + h^2 + 64 = (18)^2$

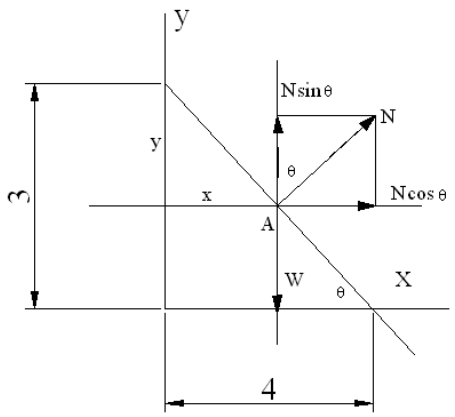
$h^2 = 324 - 64 - 64 \quad h = 14\ in$

$\overrightarrow{AB} = -8i + 14j + 8k$

$T_{AB} = \frac{T}{A}(-8i + 14j + 8k)$

$x = 4Cos\theta = 4x0.8=3.2$
$y = 4sin\theta = 4x0.6 = 2.4 \quad x = \frac{4}{5}$

$A(3.2, 3-2.4, 3) \quad A(3.2, 0.6, -3)$
$B = (0,5,0)$
$\overrightarrow{AB} \quad dx = -3.2 \quad , \quad dy = +4.4 \quad dz = +3$



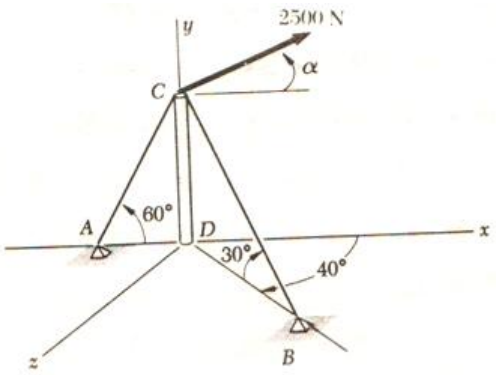
نیرو	dx	dy	dz	d
T_{AB}	-3.2	+4.4	+3	6.21
W_A	–	–	–	–
P	–	–	–	–
N				

Fx	Fy	Fz
$-\frac{3.2}{6.21}T_{AB}$	$\frac{+4.4}{6.21}T_{AB}$	$\frac{+3}{6.21}T_{AB}$
	-30×9.8	0
–	–	-P
$Nsin\theta$	$Ncos\theta$	

$$-\frac{3.2}{6.21}T_{AB} + Nsin\theta = 0$$
$$\frac{+4.4}{6.21}T_{AB} - 30 \times 9.8 + Ncos\theta = 0$$

$$\frac{+4.4}{6.21}T_{AB} - 30 \times 9.8 + 0.8(\frac{3.2T_{AB}}{0.6x6.21}) = 0$$
$$0.708T_{AB} - 294 + \quad 0.687T_{AB}=0$$
$$1.395T_{AB} = 294$$
$$T_{AB} = 211 \quad N$$
$$P = \frac{3}{6.21} \quad (211) = 102 \quad N$$

2-78 دو سیم را به بالای دیرک CD متصل کرده می‌دانیم که نیروی وارد توسط دیرک قائم بوده و نیروی دیگر برابر ۲۵۰۰ N بطور افقی بر نقطه C اثر می‌دهند. هر گاه نیروی ۲۵۰۰ N موازی محور Z $(\alpha = ۹۰^\circ)$ باشد، معین کنید کشش وارد بر هر کابل را.



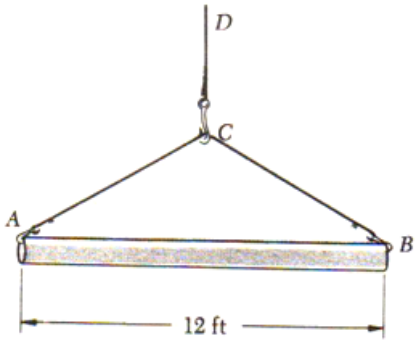
$$AC \Longrightarrow \quad T_{AC}\ cos60\ i + T_{AC}sin60j$$

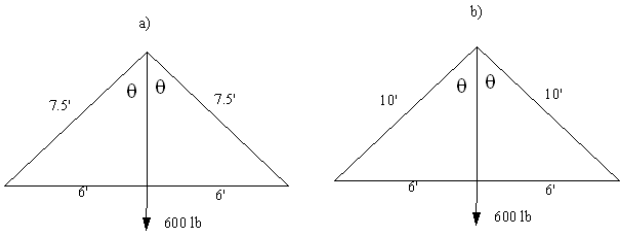
$$Dc \quad \Longrightarrow \quad T_{DC}\ j$$

$$BC\begin{cases}(T_{BC}\ sin30)\ j - (T_{BC}\ cos30cos40)i \\ -(T_{BC}\ cos30sin40)k - 2500k\end{cases}$$

$$T_{AC}\ cos60 = \frac{2500cos30cos40}{cos30sin40}$$
$$T_{AC} = 5958 \quad N$$
$$T_{BC} = \frac{5958\ cos60}{cos30cos40} = 4490 \quad N$$

2-82 لوله فولادی بوزن $1b$ ۶۰۰ و به طول ۱۲ فوت بوسله کابل CD بالا برده می‌شود معین کنید کشش کابل آویز ACB را ، می‌دانیم که طول آویز (a) ۱۵ ft (b) ۲۰ ft می‌باشد.





a)L=15'

b)L=20

$T_{AC} = T_{CD}$

a) $2T_{AC}\ Cos\ \theta = 600$

$$Cos\ \theta = \frac{\sqrt{7.5^2 - 56}}{7.5} = \frac{\sqrt{20.25}}{7.5} = 0.6$$

$$T_{AC} = \frac{300}{Cos\ \theta}$$

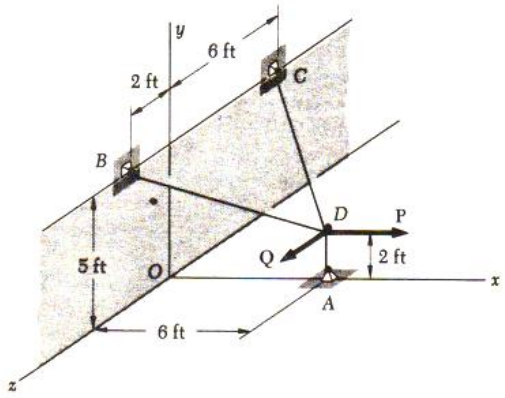
$$T_{AC} = 500\ \ 1b$$

b) $Cos\ \theta = \frac{\sqrt{100-36}}{10} = \frac{\sqrt{64}}{10}$

$$Cos\ \theta = 0.8$$

$$T_{AC} = \frac{300}{Cos\ \theta} = 375\ \ lb$$

2-84 سه کابل را به نقطه *D* جائیکه دو نیرو $p=700i\ \ lb$ $Q=300k\ \ lb$ بر آن وارد می شود متصل نموده،معین کنید کشش وارد بر هر کابل را



$(0,5,2)\quad D(6,2,0)\quad C(0,5,-6)$

فرض گرفته شود جهت نیرو به سمت A,B,C

نیرو	مقدار	*dx*	*dy*	*dz*	*d*
$\overrightarrow{DB}$	T_{DB}	*6*	*3*	*2*	*7*
$\overrightarrow{DC}$	T_{DC}	*-6*	*3*	*-6*	*9*
Q	*300*				
$\vec{P}$	700				
DA	T_{DA}	*0*	*2*	*0*	*2*

Fx	*Fy*	*Fz*
$\frac{-6}{7}T_{DB}$	$\frac{3}{7}T_{DB}$	$\frac{2}{7}T_{DB}$
$\frac{-6}{9}T_{DC}$	$\frac{3}{9}T_{DC}$	$\frac{-6}{9}T_{DC}$
0	*0*	*300*
700	*0*	*0*
	$-T_{DA}$	

$$\sum Fx = 0$$

$$\frac{-6}{7}T_{DB} + \frac{-6}{9}T_{DC} + 700 = 0$$

$$\sum Fz = 0 \quad ,\sum Fy = 0$$

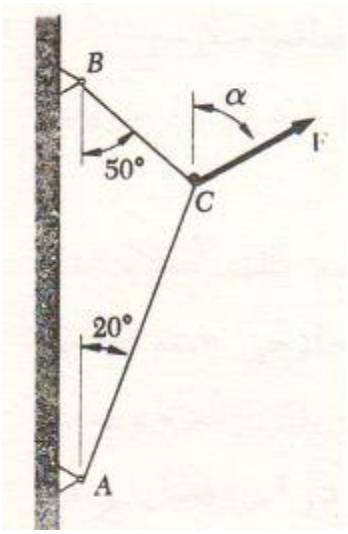
$$\frac{3}{7}T_{DB} + \frac{3}{9}T_{DC} - T_{DA} = 0$$

$$\frac{2}{7}T_{DB} + \frac{-6}{9}T_{DC} + 300 = 0$$

$$T_{DB} = 2.33T_{DC} - 1050$$

$$\frac{-6}{7}T_{DB}+\frac{-6}{9}T_{DC}+700=0$$
$$\frac{-6}{7}(2.33T_{DC}-1050)+\frac{-6}{9}T_{DC}+700=0$$
$$-2T_{DC}+900-0.666T_{DC}+700=0$$
$$T_{DC}=600\ lb$$
$$T_{DB}=2.33(600)-1050=350\ \ lb$$
$$\frac{3}{7}(350)+\frac{3}{9}(600)-T_{DA}=0$$
$$T_{DA}=350\ lb$$

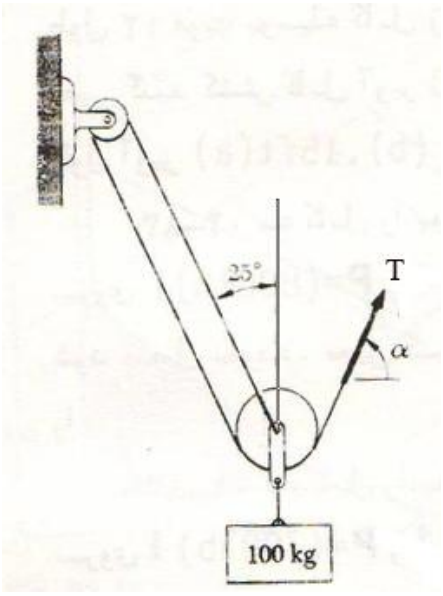
2-86 معین کنید کشش در هر کابل را وقتی $F=800\ N$ و $\alpha = ۹۰^{\circ}$.

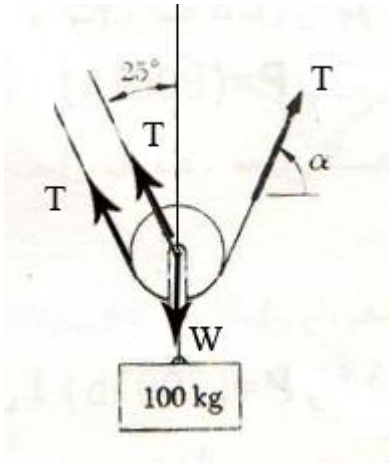


فرض گرفته شود هر دو نیرو به سمت A,C

$$A \Longrightarrow \quad -T_{CA}\ sin20\ i-Cos20j$$
$$F \quad \Longrightarrow \quad 800i$$
$$CB \Longrightarrow \quad -T_{CB}\ sin50\ i+T_{CB}cos50j$$
$$-T_{CA}\ sin20-T_{CB}\ sin50+800=0$$
$$-T_{CA}cos20+T_{CB}cos50=0$$
$$T_{CA}=+T_{CB}(0.684)=0$$
$$-T_{CB}(0.684)sin20-T_{CB}\ sin50+800=0$$
$$-T_{CB}(0.233)-T_{CB}\ (0.766)+800=0$$
$$T_{CB}=800\ \ N$$
$$T_{CA}=(800)(0.684)=547\ \ N$$

2 -88 صندوقی kg ۱۰۰ بوسیلهٔ طناب و قرقره مطابق شکل نگاهداری می‌شود. معین کنید مقدار وجهت نیروی لازم T را.

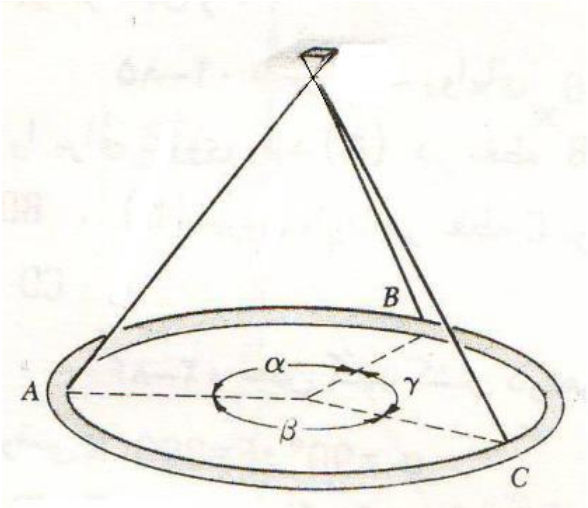


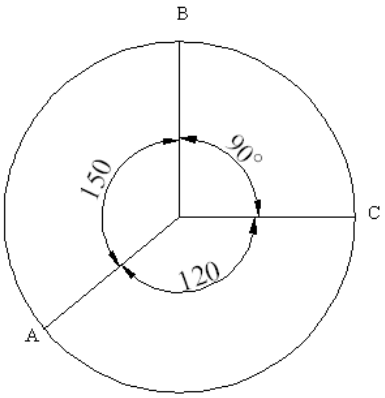


$$W=100\ Kg=100\times 9.81=981\ N$$
$$\sum Fy=0 \qquad T\ sin\ \alpha+$$
$$2T\ Cos\ 25=981$$
$$\sum Fx=0$$
$$T\ CoS\alpha-T\ sin\ 25-T\ sin\ 25=0$$
$$Cos\ \alpha=2\ sin\ 25$$
$$\alpha=32.3$$
$$T=\frac{981}{sin\ 32.3+2\ CoS\ 25}$$
$$T=418\ N$$

2-90 حلقه دایروی یکنواخت بوزن $1b$ ۶۰ و به قطر in ۱۸ را بوسیله سه سیم نگاهداری می‌کنند طول هر یک in ۱۵ می‌باشد.

هر گاه $\alpha = ۱۵۰^{\circ}$ و $\beta = ۱۲۰^{\circ}$ و $\gamma = ۹۰^{\circ}$ باشد معین کنید کشش وارد بر هر سیم را.





$W = 60 \quad 1b$

$D = 18"$ $\qquad AD = BD =$

$DC = 15"$

$\alpha = 150$ $\qquad OA = OB =$

$OC = 9"$

$\beta = 120$

$\gamma = 90$

$l = 15"$

$C(9\,,0\,,0)$

$D(0\,,12\,,0)$

$OD = \sqrt{225} - 81$

$OD = 12$

$\overrightarrow{DO} \quad dx = 0 \quad dy = -12$

$dz = 0$

$\overrightarrow{DA} \quad dx = -4. \quad dy = -12$

$dz = 7.8$

$\overrightarrow{DC} \quad dx = 9 \quad dy = -12$

$dz = 0$

$\overrightarrow{DB} \quad dx = 0 \quad dy = -1 \qquad dz = -9$

نیرو	*dx*	*dy*	*dz*	*d*
$\overrightarrow{DA}$	*-4.5*	*-12*	*7.8*	*15*
$\overrightarrow{DC}$	*9*	*-12*	۰	*15*
$\overrightarrow{DB}$	*0*	*-12*	*-9*	*15*
$\overrightarrow{DO}$	*0*	*-12*	*0*	۱۲

Fx	*Fy*	*Fz*
$-\frac{4.5}{15}T_{AD}$	$\frac{-12}{15}T_{AD}$	$\frac{7.8}{15}T_{AD}$
$\frac{9}{15}T_{DC}$	$-\frac{12}{15}T_{DC}$	*0*
0	$-\frac{12}{15}T_{DB}$	$-\frac{9}{15}T_{DB}$
0	*-60*	*0*

$$+\frac{4.5}{15}T_{AD} = \frac{9}{15}T_{DC}$$

$$T_{AD} = 2T_{DC}$$

$$\frac{7.8}{15}T_{AD} = \frac{9}{15}T_{DB} \qquad T_{AD} = 1.154\,T_{DB}$$

$$T_{AD} + T_{DC} + T_{DB} = -60 \times \frac{15}{12}$$

$$2T_{DC} + T_{DC} + 2T_{DC}/1.154 = -60 \times \frac{15}{12}$$

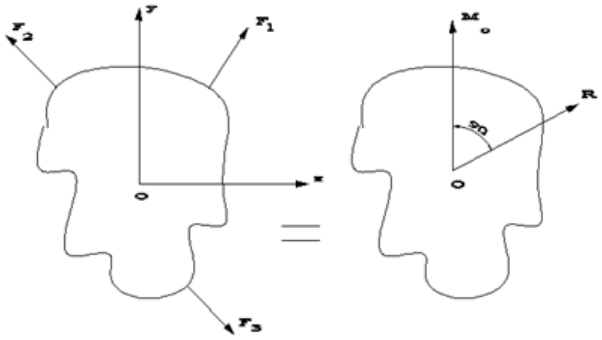
$$T_{DC} = -15.85 \;\; 1b$$

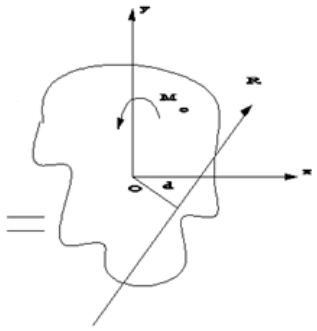
$T_{AD} = -31.7 \;\; 1b$ نیروها همه فشاری هستند

فصل ۳

شرح مختصری راجع به رنچ(Wrench)

اگر نیروها هم صفحه باشند Coplanar

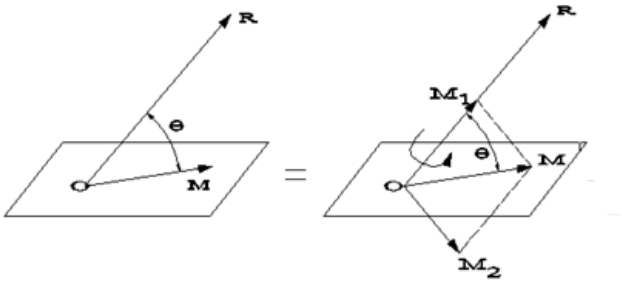


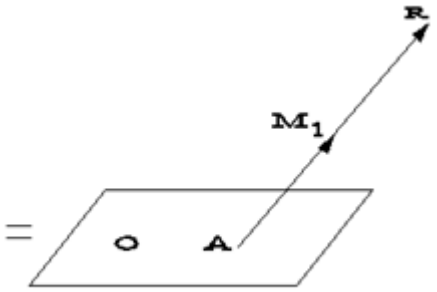


$d = Mo / R$

در حالی که R, M_o بر هم عمودهستند.

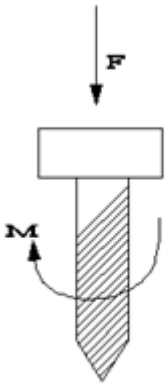
اگر $\vec{R}$ و $\overrightarrow{Mo}$ دو بردار با هم زاویه θ بسازند .



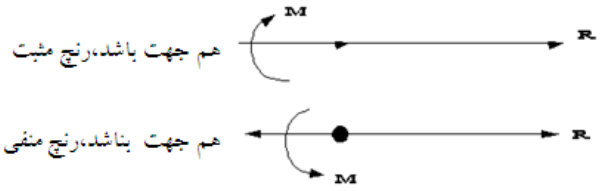


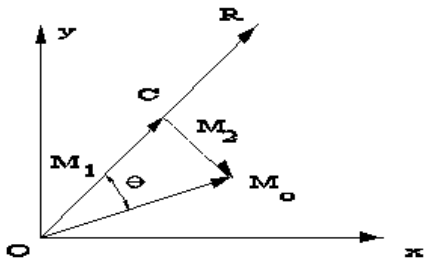
گشتاورM_2 عملاً با حرکت نیرویR ازO بهA خنثی می شودو فقط گشتاورM_1 است که در راستای نیروی Rعمل می کند.ترکیب اختصاصی R و M_1 (کوپل – نیرو) را پیچشی (wrench) یا پیچ گوشتی وار می گویند .

خط عمل $\vec{R}$ را محور دوران می گویند .



پای پیچ = M_1/R

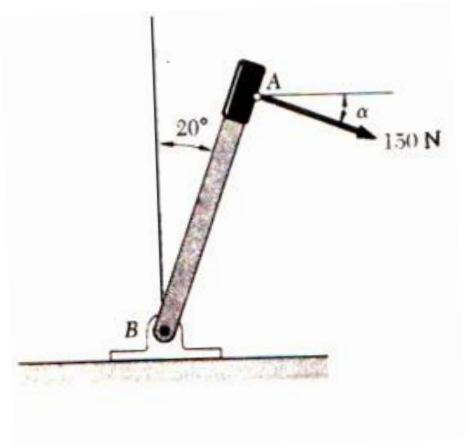


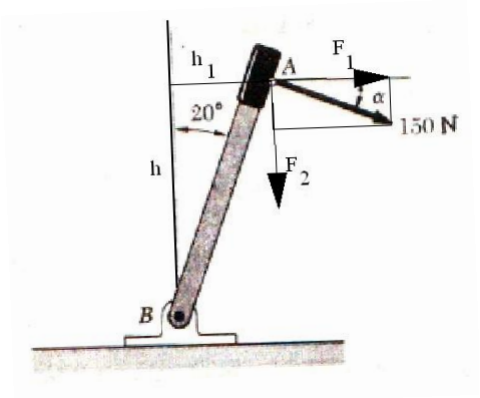


$$\overline{M}_1 = \overline{OC} = \overline{M}_o \cos\theta$$
$$\vec{R}.\vec{Mo} = \overline{R}.\overline{M}_o \cos\theta$$
$$\vec{R}.\vec{M}_o = \vec{R}.\overline{M}_1$$
$$\overline{M}_1 = \overline{OC} = \frac{\vec{R}.\overrightarrow{Mo}}{\overline{R}}$$
$$\overline{M}_1 = \vec{\lambda}_R.\overrightarrow{M}_O$$
$$\overrightarrow{M}_1 = (\vec{\lambda}_R.\overrightarrow{M}_O)\vec{\lambda}_R$$
$$\overrightarrow{M}_1 = (\frac{\vec{R}}{\overline{R}}.\overrightarrow{M}_O)\frac{\vec{R}}{\overline{R}}$$
$$\vec{M}_1 = \frac{\vec{R}.(\vec{R},\overrightarrow{Mo})}{(\overline{R})^2}$$
$$\overrightarrow{M}_2 = \overrightarrow{Mo} - \overrightarrow{M}1$$

$$\boxed{\vec{M}_1 = \frac{\vec{R}.(\vec{R},\overrightarrow{Mo})}{(\overline{R})^2}}$$

3-1نیروی ۱۵۰ نیوتن بر بالای اهرم در نقطـه A وارد مـی‌شـود. می‌دانیم که فاصله AB=250میلیمتر است. معین کنیـد گشـت آور نیرو را حول نقطه B وقتی $\alpha = ۵۰^{\circ}$ می‌باشد.





$M_{B=?}$

$$Sin\ 70 = \frac{h}{AB} = \frac{h}{250}$$

$h = 234.9\ mm$ $\qquad$ $h_1 = 85.5\ mm$

$F_1 = 150\ Cos\ 50 = 96.4\ N$

$F_2 = 150\ Sin\ 50 = 114.9\ N$

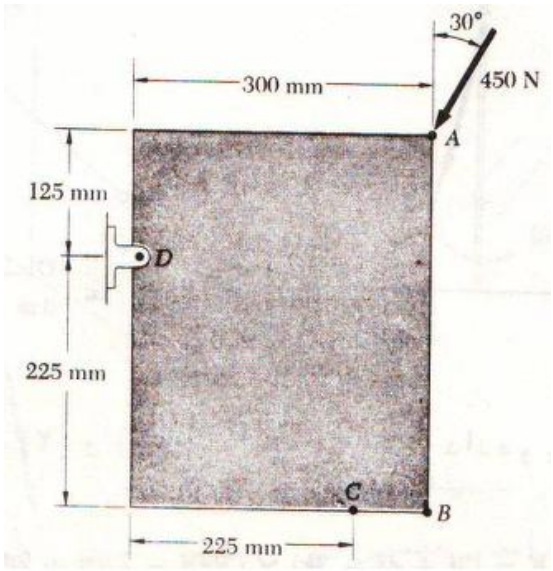
$$\sum M_B = (F_1)(h) + (F_2)(h_1)$$
$$M_B = (96.4)\left(\frac{234.9}{1000}\right) + \left(\frac{114.9}{1000}\right)(85.5)$$
$$M_B = 22.64 + 9.82 = 32.5\ N - M$$

3-2 از مسئله (3-1)می‌دانیم که $AB = 250mm$ است. معین کنید حداکثر گشت آور حول نقطه B را کـه در اثـر نیـروی ۱۵۰ نیوتن بوجود می‌آید. در چه جهتی این نیرو را باید اثر داد.

از مسئله قبل داریم

$$\curvearrowright + \sum M_B = (F_1)(h) + (F_2)(h_1)$$
$$\curvearrowright + \sum M_B = (150cos\alpha)\left(\frac{234.9}{1000}\right) + \left(\frac{114.9}{1000}\right)(150sin\alpha)$$
$$\mathrm{M_B} = 150\ \mathrm{Cos}\alpha\ \left(\frac{234.9}{1000}\right) + 150\ \mathrm{SIM}\alpha\ \frac{114.9}{1000}$$
$$M_B = 35.23\ Cos\alpha\ + 17.23\ Sin\alpha$$
$$M'_B = 0$$
$$-35.23\ sin\alpha + 17.23\ Cos\alpha = 0$$
$$\tan\alpha = \frac{17.23}{35.23} \Longrightarrow \alpha = 26$$
$$M_B = 3523\ Cos26\ + 17.23\ sin\ 26$$
$$= 39.2\ K - N$$

3-4نیروی ۴۵۰ نیوتن بر نقطه A وارد می‌شود. معین کنید (a) گشت آور نیرو را حول نقطه D و (b) مقدار و جهت نیروی افقی که بتوان در نقطه C وارد کرد تا گشت آوری برابر با حول نقطه D ایجاد کند. (c) حداقل نیروی وارد بر نقطه C که بتواند همان گشت آور حول نقطهD را ایجاد کند.



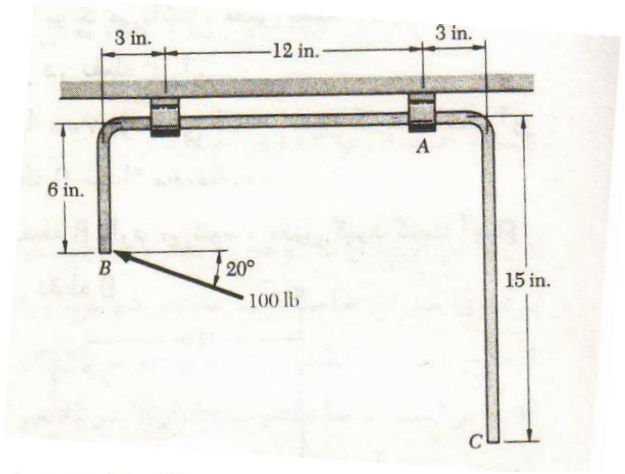
$F = -450\,Sin30\,i - 450\,Cos\,30\,j$
$F = -225\,i - 389.7\,j$
$A(300\,,350)$ $D(0\,,225)$
$M_D = \vec{r} \times \vec{F}$

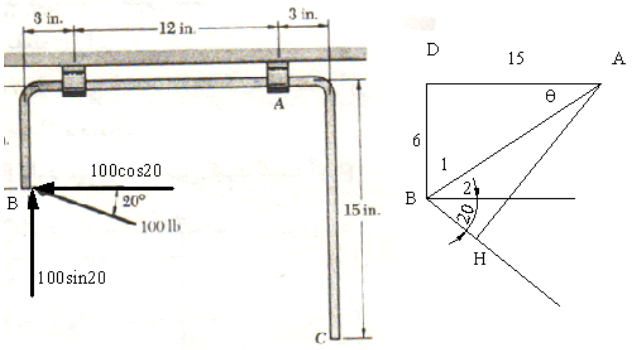
$\overrightarrow{DA}$ $\vec{r} = 300i + 125j$

$$M_D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 300 & 125 & 0 \\ -225 & -389.7 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 300 & 125 \\ -225 & -389.7 \end{matrix}$$

$M_D = 300(-389.7)k - k(125)(-225)$
$M_D = -116910k - 28125k$
$M_D = -88785 \;\; mm - Nt$
$M_D = -88.8\;N - m$
$\curvearrowright + M_D = 88.8\;\; N - m$

3-6 گشت آور نیروی ۱۰۰ پوند را حول نقطه A بدست آورده (a) با استفاده از تعریف گشت آور یک نیرو. (b) بوسیله تجزیه نیرو به مؤلفه‌های افقی و قائم، (c) به وسیله تجزیه نیرو در امتداد AB و عمود بر AB.





$A(3,0)$ $B\,(18,6)$
$\overrightarrow{AB} = 15i + 6j$
$F = -100Cos\;20\;i + 100\;SIM\;25\;j$
a) $MA = r \times F$

$$MA = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 15 & 6 & 0 \\ -93.96 & 34.2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 15 & 6 \\ -93.96 & 34.2 \end{matrix}$$

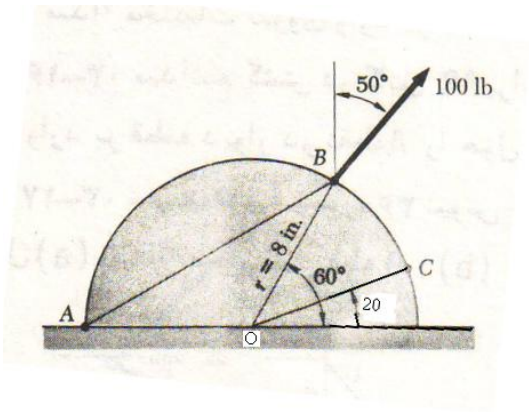
$MA = 15 \times 34.2k = 6(93.96)k$
$MA = 1077 \;\; \curvearrowright + 1b - 1n$
$b)$ $AB = \sqrt{15^2 + 6^2}$ =16.15
$cos\theta = \frac{6}{15}$ $\theta = 21.8,\;\; B_1 = 68.2\;\; , B_2 = 21.8$

$$\sin(21.8 + 20) = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{16.15}$$

AH =10.77

$$MA = AH \times F = 100x10.77 = 1077$$
$$\curvearrowleft + \quad lb - In$$
$$C) \qquad \curvearrowleft + \quad MA = r \times F$$
$$MA = 100Cos\ 20\ (6) + 100\ Sin\ 20\ (15)$$
$$MA = 1076.8 \quad 1b - in$$

3-8 معین کنید گشت آور نیروی ۱۰۰ پوند را حول نقطه C



از راه ضرب برداری

$$\vec{F} = FCos50\ j + F\sin 50 i$$
$$F = 100Cos50\ j + 100\sin 50 i = 76.6i + 64.3\ j$$
$$M_C = \vec{r}_{CB} \times \vec{F}$$
$$\vec{r}_{CB} + \vec{r}_{OC} = \vec{r}_{OB}$$
$$\vec{r}_{CB} = \vec{r}_{OB} - \vec{r}_{OC} = 8Cos60i + 8\sin 60\ j - (8Cos20i + 8\sin 20\ j)$$

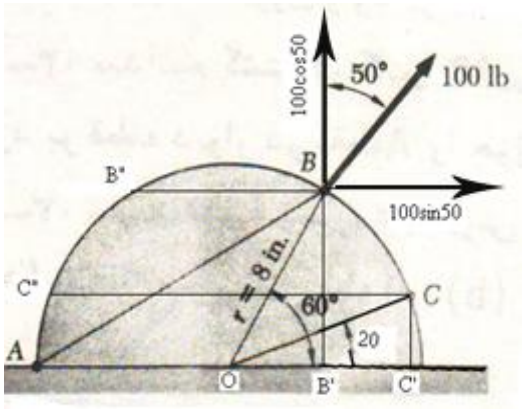
$$\vec{r}_{CB} = \vec{r}_{OB} - \vec{r}_{OC} = 8Cos60i + 8\sin 60\ j - (8Cos20i + 8\sin 20\ j)$$

$$\vec{r}_{CB} = 4i + 6.93\ j - 7.5i - 2.74\ j = -3.5i + 4.2\ j$$

$$M_C = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ -3.5 & 4.2 & 0 & -3.5 & 4.2 \\ 76.6 & 64.3 & 0 & 76.6 & 64.3 \end{vmatrix}$$

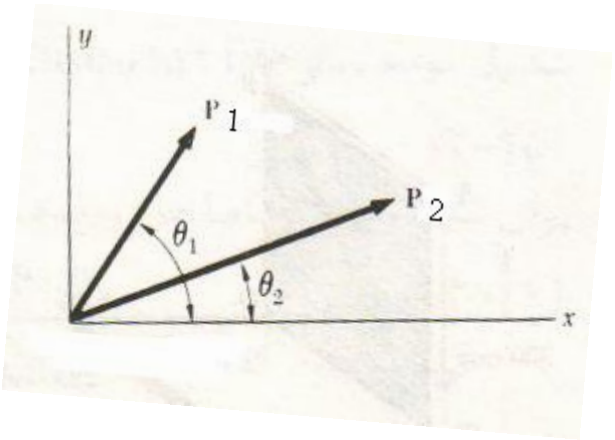
$$M_C = -3.5(64.3)k - (26.6)(4.2)(k)$$
$$M_C = -225\,k - 321.7k$$
$$M_C = -547 \quad N - M$$
$$M_C = +547 \quad \curvearrowleft^{+} \quad N - M$$

ازراه تجزیه بردار



$$OB' = 8\ Cos\ 60$$
$$OB'' = 8\ Sin60$$
$$OC' = 8\ Cos\ 20$$
$$OC'' = 8\ Sin20$$
$$M_C = 100Cos\ 50\ (B'C') + 100\ Sin\ 50(8\ Sin\ 60 - 8\ Sin\ 20)$$
$$M_C = 226.1 + 321.1 = 547.2 \ \text{lb-in}$$

3-10 از حاصلضرب برداری $P_1 \times P_2$ و با استفاده از نتیجه حاصله تشابه و همانندی رابطه $\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2$ را ثابت کنید.



$$M_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & 0 \\ (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ x_1 & y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{matrix}$$

$$M_O = x_1 \left(\frac{F}{\lambda}\right)(y_2 - y_1) \quad k - y_1(x_2 - x_1)F/\lambda$$

$$M_O = \frac{p(x_1y_2 - x_1y_1 - y_1x_2 + y_1x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$= \frac{p(x_1y_2 + y_1x_2)k}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

3-14 معین کنید گشت آور نیروی $F = 4i + 10j + 6k$ را که بر نقطه A وارد می‌شود. حول نقطه O مبدأ مختصات فرض می‌شود بردار وضعیت نقطه A برابر با (a) $r = 2i - 3j + 4k$ (b) $r = 2i + 6j + 3k$ و (c) $r = 2i + 5j + 6k$ باشد.

$$F = 4i + 10j + 6k$$

a $r_A = 2i - 3j + 4k$

b $r_A = 2i + 6j + 3k$

c $r_A = 2i + 5j + 6k$

a) $M_O = r \times F$

$$M_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 10 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 2 & -3 \\ 4 & 10 \end{matrix}$$

$$M_O = -18i + 16j + 20k + 12k - 40i - 12j$$

$$M_O = -58 + 4j + 32k$$

B) $M_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 10 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{matrix} = 36i + 12j +$

$20k - 24k - 30i - 12j$

$$M_O = 6i - 4k$$

b) $M_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 10 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{matrix} = 30i +$

$24j + 20k - 20k - 60i - 12j$

$$M_O = -30i + 12j$$

$$\overrightarrow{P_1} x \overrightarrow{P_2} = (p_2 \cos\theta_2 i + p_2 \sin\theta_2) x (p_1 \cos\theta_1 i + p_1 \sin\theta_1)$$

$$\overrightarrow{P_1} x \overrightarrow{P_2} = p_1 p_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 - p_1 p_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

$$Dot\ \text{Pr}oduct \quad \overrightarrow{P_1} x \overrightarrow{P_2} = p_1 p_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

به طور کلی

$$\overrightarrow{P_1} = F_1 x i + F_1 y j = P_1 Cos\ \alpha i + P_2 sin\ \alpha j$$

$$\overrightarrow{P_2} = F_2 x i + F_1 y j = P_2 Cos\ \beta i + P_2 sin\ \beta j$$

$$\overrightarrow{P_2} \times \overrightarrow{P_1}$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_1 Cos\ \alpha & P_1 sin\ \alpha & 0 \\ P_2 Cos\beta & P_2 sin\ \beta & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ P_1 Cos\ \alpha & P_1 sin\ \alpha \\ P_2 Cos\beta & P_2 sin\ \beta \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{P_2} \times \overrightarrow{P_1} = P_1 P_2 sin\beta\ Cos\alpha - P_1 P_2 sin\alpha\ Cos\beta$$

$$\overrightarrow{P_2} \times \overrightarrow{P_1} = P_1 P_2 (sin\beta\ Cos\alpha - sin\alpha\ Cos\beta)$$

$$\overrightarrow{P_2} \times \overrightarrow{P_1} = P_1 P_2 sin\theta = P_1 P_2 sin(\beta - \alpha)$$

$$sin(\beta - \alpha) = sin\beta\ Cos\alpha - sin\alpha\ Cos\beta$$

3-12 خط اثر نیروی P از دو نقطه $A(X_1, Y_1)$ و $B(X_2, Y_2)$ عبور می‌کند. هر گاه جهت نیرو از A بطرف B باشد، معین کنید گشت آور نیرو را نسبت به مبدأ مختصات.

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + c}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right|$$

$$M = dxp$$

$$M_o = P\left[\frac{(x_2x_1 - y_1y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right]$$

از راه دیگر

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2) \quad dx = x_2 - x_1$$

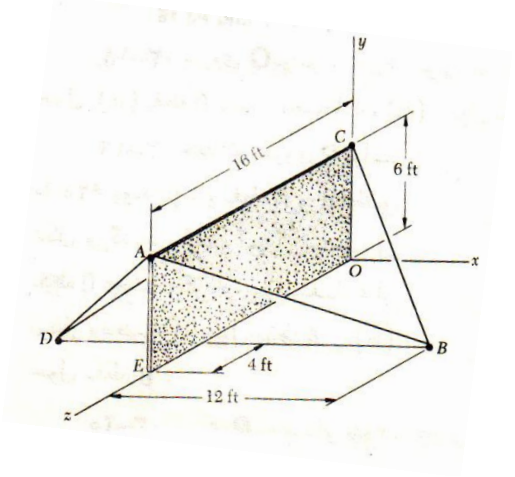
$$dy = y_2 - y_1$$

$$F = \frac{F}{\lambda}(x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j$$

$$r = x_1 i + y_1 j$$

$$M_O = r \times p$$

3-15 دیوار پیش ساخته بتونی موقتاً بوسیله کابلهائی مطابق شکل نگاهداری می شود.میدانیم که کشش در کابل BCبرابر با ۹۰۰ پوند می باشد.معین کنید گشت آور حول نقطه Oمبداء مختصات نیروی وارد بر قطعه دیوار در نقطه را.



$B(12\,,0\,,12) \quad C(0\,,6\,,0)$

$\overrightarrow{BC} = 12i - 6j + 12k \qquad \overline{BC} = 18$

$\overrightarrow{T_{BC}} = \frac{900}{18}(12i - 6j + 12k)$

$\overrightarrow{T_{BC}} = 600i - 300j + 600k$

$\overrightarrow{OC} = 6j$

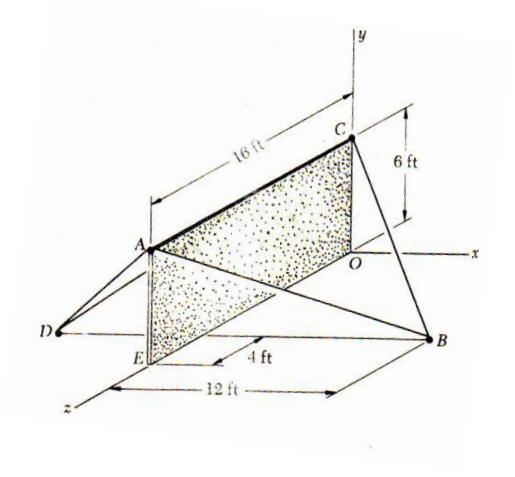
$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OC} x \overrightarrow{T_{BC}}$

$\overrightarrow{M_O} = 6j \times (600i - 300j + 600k)$

$\overrightarrow{M_O} = 3600(-k) - 3600i$

$\overrightarrow{M_O} = -3600i - 3600k$

3-16 می‌دانیم کشش در کابل AB برابر با ۷۰۰ پوند می‌باشد. گشت آوراین نیرو را نسبت به نقطه O مبدأ مختصات بدست آورید.



$T_{AB} = 700 \;\; lb$

$O(0\,,0\,,0) \;\; A(0\,,6\,,16) \quad B(12\,,0\,,12)$

$r_{OA} = +6j + 16k$

$\overrightarrow{AB} = +12i - 6j - 4$

$= \frac{700}{\sqrt{12^2 + 6^2 + 4^2}}(+12i - 6j - 4k)$

$\overrightarrow{AB} = +600 - 300j - 200k$

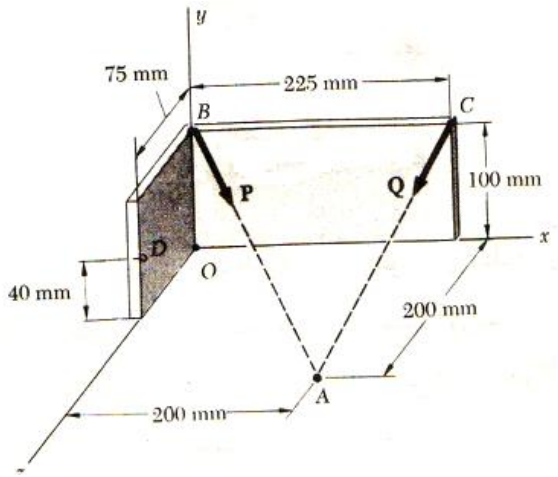
$$M_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & +6 & +16 \\ +600 & -300 & -200 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 0 & +6 \\ +600 & -300 \end{matrix}$$

$M_O = -1200i + 960j - 3600k + 4800i$

$M_O = +3600i + 960j - 3600k$

$M_O = 5180.8(+0.69i + 0.186j - 0.69k)$

3-18 نیروی Q برابر با ۴۵۰ نیوتن به نقطه C وارد می‌شود معین کنید گشت آور آنرا حول (a) نقطه O مبدأ مختصات، (b) حول نقطه D.



$C(0.225\,,0.10\,,0) \;\; A(0.2\,,0\,,0.2\;\;) O(0\,,0\,,0)$

$\overrightarrow{OA} = +0.2i + 0.2k$

$\overrightarrow{CA} = 0.025i - 0.1j + 0.2k$

$\lambda = \frac{\overrightarrow{CA}}{CA} = \frac{(-0.025i - 0.1j + 0.2k)}{\sqrt{0.000625 + 0.01 + 0.04}}$

$\lambda = \frac{-0.025i - 0.1j + 0.2k}{0.225}$

$F_Q = \frac{450}{0.225}(-0.025i - 0.1j + 0.2k)$

$F_Q = -50i - 200j + 400k$

$a) \qquad M_O = r \times F = r_{OA} \times R_Q$

$$M_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ +0.2 & 0 & +0.2 \\ -50 & -200 & 400 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ +0.2 & 0 \\ -50 & -200 \end{matrix}$$

$M_O = 0 - 10j - 40k + 40i - 80j$

$[M_O = +40i - 90j - 40k] \quad Ans.$

$D(0, 0.04, 0.075)$

$A(0.2\,,0\,,0.2)$

$\overrightarrow{DA} = +0.2i - 0.04j + 0.125k$

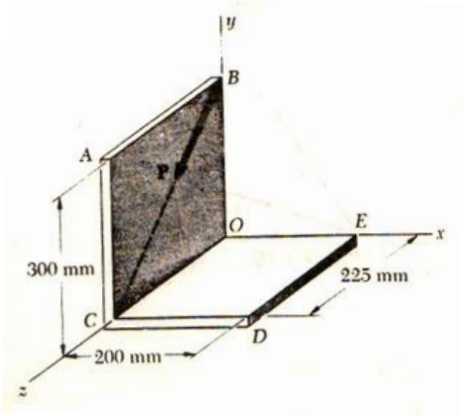
$b) \quad M_D = r_{AD} \times F_Q$

$$M_D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ +0.2 & -0.04 & +0.125 \\ -50 & -200 & 400 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ +0.2 & -0.04 \\ -50 & -200 \end{matrix}$$

$M_D = -16i - 6.25j - 40k - 2k + 25i - 80j$

$[M_D = +9i - 86.25j - 42k] \quad Ans.$

۲۰-۳نیروی P به مقدار ۲۰۰نیوتن در امتداد قطر از صفحه دولا وارد می شود .معین کنیدگشت آور آن را حول نقطه E .



$P = 200 \;\; N \qquad M_E = ?$

$B(0\,,0.3\,,0) \quad C(0\,,0\,,0.225) \quad E(0.2,0\,,0)$

$\overrightarrow{M_E} = \vec{r}_{BC} \times \vec{F}_p$

$\overrightarrow{BC} = (-0.3j + 0.225k)$

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overline{BC}} = \frac{-0.3j + 0.225k}{\sqrt{0.09 + 0.050625}}$$

$$= \frac{-0.3j + 0.225k}{0.375}$$

$\vec{\lambda} = -0.8j + 0.6k$

$\overrightarrow{F_P} = 200(-0.8j + 0.6k)$

$\overrightarrow{F_P} = -160j + 120k$

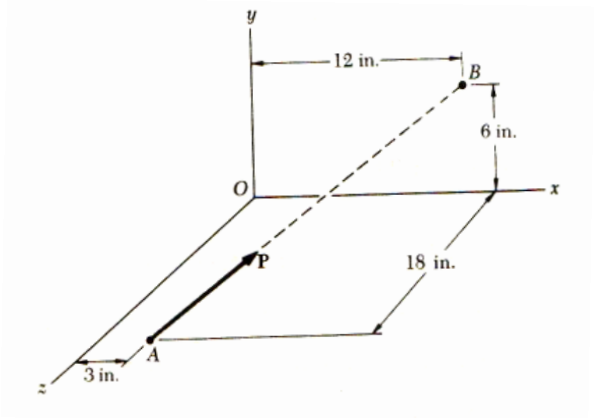
$\overrightarrow{EB} = -0.2j + 0.3j$

$\overrightarrow{M_E} = \overrightarrow{EB} x \overrightarrow{F_P}$

$$\overrightarrow{M_E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -0.2 & +0.3 & 0 \\ 0 & -160 & 120 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & k \\ -0.2 & +0.3 \\ 0 & -160 \end{matrix}$$

$\overrightarrow{M_E} = +36i + 32k + 24j$

3-22در مسئله ۱۹-۳ فاصله قائم خط اثر P را از مبدأ مختصات نقطه O بدست آورید.



$P = 420 \;\; lb \quad B(12\,,6\,,0) \quad A(3\,,0\,,18)$

$\overrightarrow{AB} = 9i + 6j - 18k$

$$\vec{P} = \bar{P}\lambda_{AB} = 420\frac{9i + 6j - 18k}{\sqrt{9^2 + 6^2 - 18^2}}$$

$$\vec{P} = \frac{420}{21}(9i + 6j - 18k)$$

$\vec{P} = 180i + 120j - 360k$

$\overrightarrow{r_{OA}} = 3i + 18k$

$$\overrightarrow{M_O} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 18 \\ 180 & 120 & -360 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 3 & 0 \\ 180 & 120 \end{matrix}$$

$\overrightarrow{M_O} = 3240j + 360k - 2160i + 1080j$

$\overrightarrow{M_O} = -2160i + 4320j + 360k$

$$M_O = \sqrt{(-2160)^2 + (4320)^2 + (360)^2}$$

$$= 4843.3$$

$\overrightarrow{M_O} = 4843.3(-0.446i + 0.89j + 0.074k)$

$d \times F = M_O$

$$d = \frac{4843.3}{420} = 11.5"$$

3-24در مثال حل شده ۴-۳ معین کنید فاصله قائم خط اثر BE را از نقطه C.

از مسئله ۴-۳داریم

$M_C = -1200i - 1800j - 3600k$

$F = 840 \;\; N$

$\overrightarrow{M_C} = \sqrt{1200^2 + 1800^2 + 3600^2} = 4200$

$\overrightarrow{M_C} = 4200(-0.285i - 0.428j - 0.86k)$

$M_C = d \times F \qquad d = \frac{4200}{840} = 5m$

3-26بردارهـــای $P = 2i + j + 2k$ و $Q = 3i + 4j - 5k$ و $S = -4i + j - 2k$ داده شده حاصلضـرب عـددی Q.S, P.S, P.Q را محاسبه نمائید.

$\vec{S} = -4i + j - 2k$

$\vec{Q}.\vec{S} = ?$

$\vec{Q} = 3i + 4j - 5k$

$\vec{P}.\vec{S} = ?$

$\vec{P} = 2i + j + 2k$

$\vec{P}.\vec{Q} = ?$

$\vec{Q}.\vec{S} = (3i + 4j - 5k).(-4i + j - 2k)$

$\vec{Q}.\vec{S} = -12 + 4 + 10 = 2$

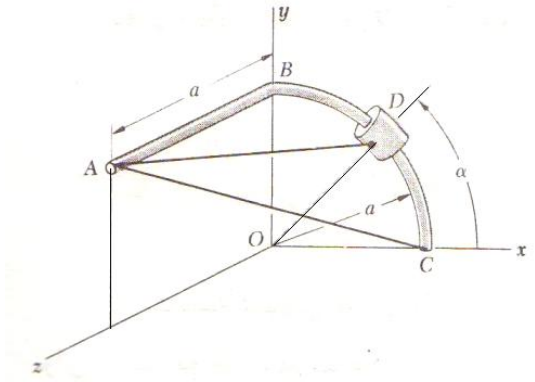
$\vec{P}.\vec{S} = (2i + j + 2k).(-4i + j - 2k)$

$\vec{P}.\vec{S} = -8 + 1 - 4 = -11$

$\vec{P}.\vec{Q} = (2i + j + 2k).(3i + 4j - 5k)$

$\vec{P}.\vec{Q} = 6 + 4 - 10 = 0$

3-30 میلـــه ABC از دو قطعـــه راســـت AB و خمیـــده BC تشکیل یافته. می‌دانیم کـه $\alpha = ۴۵^{\circ}$ و کشـش سـیم AC، N ۴۵۰ است، معین کنیـد (a) زاویـه‌ای کـه سـیمهای AC و AD تشکیل می‌دهند، (b) تصویر نیـروی وارد بوسـیله سـیم AC در نقطه A روی AD را.



$T_{AC} = 450N \quad AD, AC \quad C(a, 0, 0)$

$D(a\,Cos45, a\,sin\,45, 0) \quad A(0, a, a)$

$\overrightarrow{AD}$

$dx = aCos\,45$

$dz = -a$

$\overline{AD}^2 = a^2Cos^2 45 + (a - a\,sin\,45)^2 + a^2$

$\overline{AD}^2 = a^2Cos^2 45 + a^2 + a^2\,SIM^2 45 - 2a^2\,sin\,45 + a^2$

$\overline{AD}^2 = a^2(3 - 2\,sin\,45)$

$AD = 1.26\,a$

$\overline{AC}^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \quad AC = 1.73a$

$\overrightarrow{AD} = a\,Cos\,45i + (a\,sin\,45 - a)j - ak$

$\overrightarrow{AC} = ai - aj - ak$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \overline{AC}.\overline{AD}Cos\,\theta$

$a^2(Cos\,45) - a(a\,sin\,45 - a) + a^2 = 1.26\,a \times 1.73\,a\,Cos\theta$

$a^2Cos\,45 - a^2sin\,45 + a^2 + a^2 = (1.26\,a)(1.73\,a)\,Cos\theta$

$2a^2 = (1.26\,)(1.73\,)a^2\,Cos\theta$

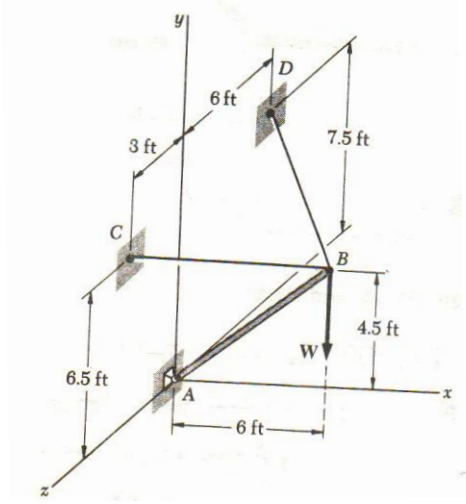
$Cos\,\theta = 0.9175$

$\theta = 23.4\,^{\circ}$

$F_{AC'} = F_{AC}Cos\theta = 450 \times Cos\,23.4$

$F_{AC} = 413 \quad N$

3-32 می‌دانیم که کشش در کابل BD برابـر ۱۸۰ پونـد اسـت، معین کنید (a) زاویه بین کابل BD و میلـه AB را. (b) تصـویر نیروی وارد بوسیله کابل BD در نقطه B روی AB را.



$T_{BD} = 180 \quad lb \quad A(0, 0, 0)$

$B(6, 4.5, 0)$

$C(6, 6.5, 3) \quad D(0, 7.5, -6)$

$\overrightarrow{DB} = 6i - 3j + 6k$

$\overrightarrow{AB} = 6i + 4.5j$

$\overline{DB} = \sqrt{36 + 9 + 36} = 9$

$\overline{AB} = \sqrt{36 + 20.25} = 7.5$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB}Cos\,\theta$

$(6)(6) + (4.5)(-3) + 0 = 9 \times 7.5\,Cos\,\theta$

$22.5 = 9 \times 7.5\,Cos\,\theta$

$Cos\,\theta = 0.333 \qquad \theta = 70.5$

$BD' = 180\ Cos\theta$

$BD' = 180\ Cos\ 70.5$

$BD' = 60\ \ lb$

3-34 بردارهـــای $P = 3i + 2j + k$ و $Q = 5i + j - 2k$ و $S = i + 3j + S_Z k$ مفروض‌اند، معین کنید مقدار S_z را برای حالتی که سه بردار هم صفحه باشند.

$\vec{P} = 3i + 2j + k$

$\vec{Q} = 5i + j - 2k$

$\vec{S} = i - 3j + S_z k$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$\vec{P} \times \vec{Q} = 4i + 5j + 3k - 15k - i + 6j$

$\vec{P} \times \vec{Q} = 3i + 12j - 7k$

$\vec{S}.\vec{P} \times \vec{Q} = 0$ همه صفحه می شوند

$(i + 3j + S_z k).(3i + 11j - 7k) = 0$

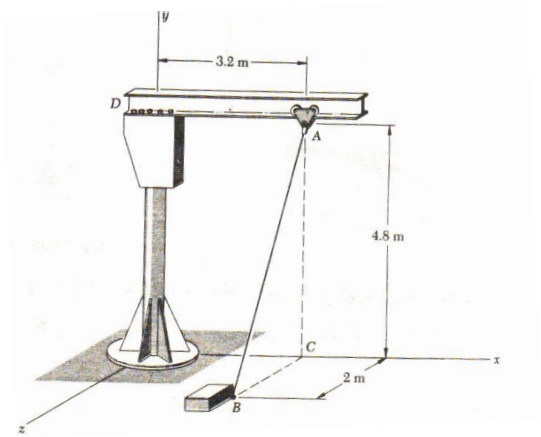
$3 + 3(11) - 7(S_z) = 0$

$7(S_z) = 33 + 3 = 36$

$(S_z) = 5.14$

3-36 بالابری را طوری قرار داده‌اند که تیر DA موازی محور x ها باشد. معین کنید حداکثر کشش مجاز در کابل AB را. هر گاه گشت آور مقـادیر مطلـق نیـروی وارد بـر نقطـه A حـول محـور مختصـــــــــات چنـــــــــین باشـــــــــد:

$|M_x| \le 10KN.m, \quad |M_y| \le 6KN.m, \quad |M_z| \le 16KN.m$



$T_{AB} = F$

$\overrightarrow{AB}$

$A(3.2\ ,4.8\ ,0)$

$B(3.2\ ,0\ ,2)$

$\overrightarrow{AB} = -4.8\,j + 2k$

$\overrightarrow{OB} = +3.2i + 2k$

$\vec{F} = \overrightarrow{F}.\vec{\lambda}_{AB} = \dfrac{F(-4.8j + 2k)}{\sqrt{4.8^2 + 2^2}}$

$\vec{F} = F(\dfrac{-4.8j + 2k}{5.2})$

$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{r_{OB}} \times \vec{F}$

$$= \frac{F}{5.2}\begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ +3.2 & 0 & +2 & +3.2 & 0 \\ 0 & -4.8 & 2 & 0 & -4.8 \end{vmatrix}$$

$\overrightarrow{M_O} = (-16.36k + 9.6i - 6.4j)\dfrac{F}{5.2}$

$M_x \le 10 \qquad M_y \le 6 \qquad M_Z \le 16$

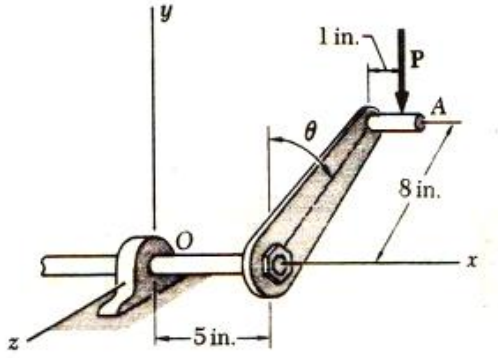
$\overrightarrow{M_O} = \sqrt{{M_x}^2 + {M_y}^2 + {M_z}^2} = 19.8$

$\overrightarrow{M_O} = \sqrt{(16.36)^2 + (9.6)^2 + (6.4)^2} = 20$

$20\dfrac{F}{5.2} = 19.8$

$F = 5.1 \quad K\,N$

3-38 معین کنید مقدار نیروی P و زاویـه θ را. در صـورتیکه بـدانیم گشـت آور P حـول محـور x و z بـه ترتیـب برابـر بـا $M_x = -160\ \ lb\text{-}in$ و $M_z = 240\ \ lb\text{-}in$ می‌باشد.



$M_x = -160 \qquad 1b - 1n$

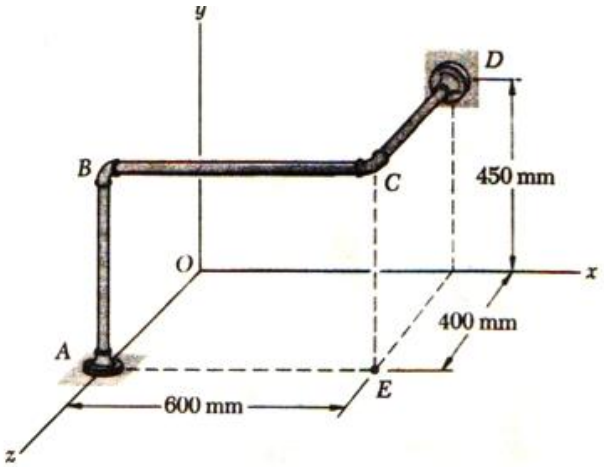
$M_z = 240 \qquad 1b - 1n$

$(P)(5 + 1) = 240$

$P = 40 \quad 1b$

$-\mathrm{P} \times \mathrm{BH} = -160$
$-\mathrm{P} \times 8 \sin\theta = -160$
$-40 \times 8 \sin\theta = -160$
$\sin\theta = 0.5$
$\theta = 30$

3-40نیروی 'F به مقدار و امتداد مجهول بر نقطه C از لوله ABCD وارد می‌شود. معین کنید گشت آور M_y نیروی F را حول محور y می‌دانیم که $M_x = +150 \ N.m$ و $M_z = +90 \ N.m$.



$M_y = ?$
$M_x = 150 \quad N-M$
$M_z = 90 \quad N-M$
$C(600\,,450\,,400)$
$F = F_x i + F_y j + F_z k$
$\overrightarrow{OC} = 0.6i + 0.45j + 0.4k$

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{r_{OC}} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 0.6 & 0.45 & 0.4 & 0.6 & 0.45 \\ F_x & F_y & F_z & F_x & F_y \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{MO} = 0.45F_z i + 0.4F_x j + 0.6F_y k - 0.45F_x k - 0.45F_y i - 0.6F_z j$$

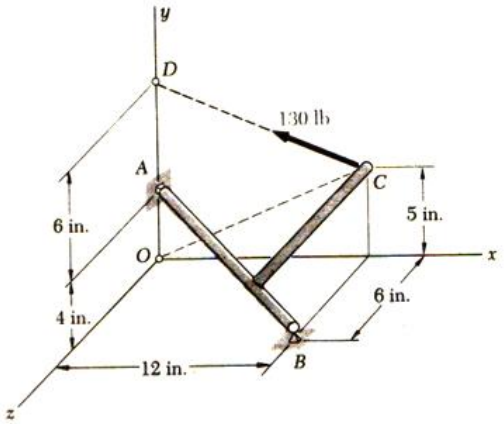
$$\overrightarrow{MO} = i(-0.45F_y + 0.45F_z) + j(0.4F_x - 0.6F_z) + k(0.6F_y - 0.45F_x)$$

$M_X = 150 = 0.45F_z - 0.4F_y$
$M_y = 0.4F_x - 0.6F_z$
$K = 90 = 0.6F_y - 0.45F_x$

$$1.5 \times \begin{cases} 150 = 0.45F_z - 0.4F_y \\ 90 = -0.45F_x + 0.6F_y \end{cases}$$

$90 = -0.45F_x + 0.6F_y$
$225 = +0.675F_z - 0.6F_y$
$315 = 0.675F_z - 0.45F_x$
$M_y = 0.4F_x - 0.6F_z$
$M_y = 0.4\left(\frac{0.675F_z - 315}{0.45}\right) - 0.6F_z$
$M_y = +0.6F_z - 280 - 0.6F_z$
$M_y = -280 \quad N-M$
$M_y = 280$
$M = M_x i + M_y j + M_z k$
$M = 150i - 280j + 90k$
$M = \sqrt{150^2 + 280^2 + 90^2} = 330.1 \quad N-M$
$F(d) = M$
$CO = d = \sqrt{0.6^2 + 0.45^2 + 0.4^2} = 0.85$
$F = \frac{330.1}{0.85} = 388.4 \ N$

3-42دو میله را به شکلی بهم جوش کرده که شکل T داشته باشد. بر آن نیروی ۱۳۰ پوند مطابق شکل وارد می‌شود. معین کنید گشت آور نیرو را حول میله AB.



$F = 130 \ lb \quad C(12\,,5\,,0) \quad B(12\,,0\,,6)$
$A(0\,,4\,,0) \quad D(0\,,10\,,0)$
$\overrightarrow{M_{AB}} = ?$
$\overrightarrow{r_{BC}} = 5j - 6k$
$\overrightarrow{CD} = -12i + 5j$
$\lambda = \frac{\overrightarrow{CD}}{\overline{CD}} = \frac{-12i + 5j}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{-12i + 5j}{13}$
$\vec{F} = \frac{130}{13}(-12i + 5j) = -120i + 50j$

$$\overrightarrow{M_B} = \vec{r}_{BC} x \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 0 & 5 & -6 & 0 & 5 \\ -120 & 50 & 0 & -120 & 50 \end{vmatrix}$$

$\overrightarrow{M_B} = 720j + 600k + 300i$

$\overrightarrow{M_{AB}} = (\overrightarrow{M_B}.\overrightarrow{\lambda_{AB}})\overrightarrow{\lambda_{AB}}$

$\overrightarrow{AB} = 12i - 4j + 6k$

$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}} = \frac{12i - 4j + 6k}{14}$

$\overrightarrow{M_{AB}} = \left[(300i + 120j + 600k).\left(\frac{12i-4j+6k}{14}\right)\right]\overrightarrow{(\lambda_{AB})}$

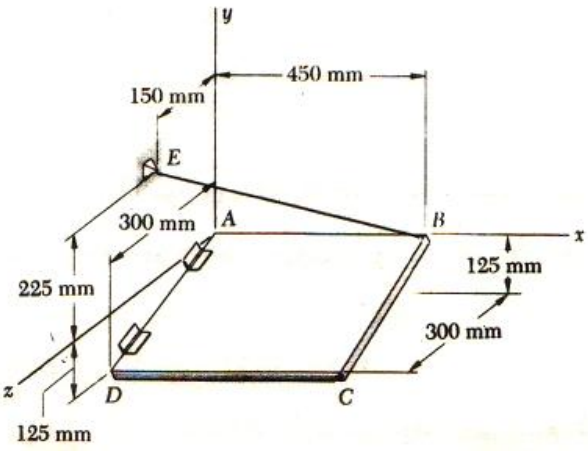
$\overrightarrow{M_{AB}} = \frac{(300)(12) - 4(720) + 600(6)}{14}\overrightarrow{(\lambda_{AB})}$

$\overrightarrow{M_{AB}} = 309\left(\frac{12i - 4j + 6k}{14}\right) \quad lb - in$

$\overrightarrow{M_{AB}} = 309(0.85i - 0.28j + 0.43k) \quad lb - in$

$|M_{AB}| = 309 \quad lb - in$

3-44 صفحه چهارگوش ABCD بوسیله لولا در امتدادلبه AD و سیم BE نگاهداری می‌شود. می‌دانیم که کشش در سیم ۵۴۶ نیوتن است. معین کنید گشت آور نیروی وارد بوسیله سیم در نقطه B را حول خط AD.



$T_{BE} = 546 \ N \quad \overrightarrow{M_{AD}} = ?$

$B(0.45, 0, 0) \quad E(0, 0.225, 0.15) \quad D(0, -0.125, 0.3)$

$\overrightarrow{BE} = 0.45i + 0.225j + 0.15k$

$\overrightarrow{M_{BE}} = \frac{\overrightarrow{BE}}{\overline{BE}} = \frac{-0.45i + 0.225j + 0.15k}{\sqrt{0.45^2 + 0.225^2 + 0.15^2}}$

$\overrightarrow{F_{BE}} = \frac{546}{0.525}(-0.45i + 0.225j + 0.15k)$

$\overrightarrow{F_{BE}} = -468i + 234j + 156k$

$\overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{r_{DB}} \times F$

$\overrightarrow{DB} = 0.45i + 0.125j - 0.3k$

$\overrightarrow{M_D}$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ +0.45 & +0.125 & -0.3 \\ -468 & 234 & 156 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ +0.45 & +0.225 \\ -468 & 234 \end{matrix}$$

$\overrightarrow{M_D} = +19.5i + 140.4j + 105.3k + 58.5k + 70.2\,i - 70.2\,j$

$\overrightarrow{M_D} = +89.7i + 70.2j + 163.8k$

$\overrightarrow{M_{AD}} = (\overrightarrow{M_D}.\overrightarrow{\lambda_{AD}})\overrightarrow{\lambda_{AD}}$

$\overrightarrow{AD} = -0.125j + 0.3k$

$\overrightarrow{\lambda_{AD}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overline{AD}} = \frac{-0.125j + 0.3k}{\sqrt{0.125^2 + 0.3^2}} = \frac{-0.125j + 0.3k}{0.325}$

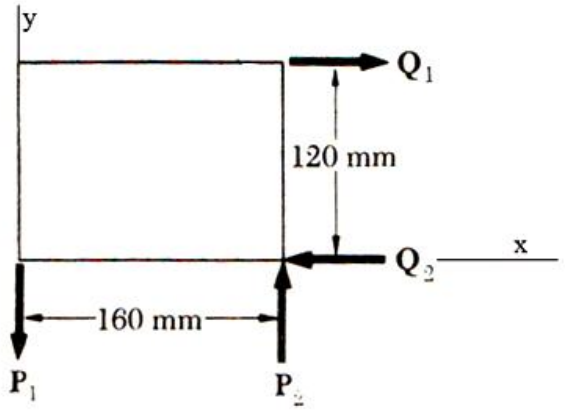
$\overrightarrow{M_{AD}} = \left(\frac{-0.125j + 0.3k}{0.325}\right).(+89.7i + 70.2j + 163.8k)$

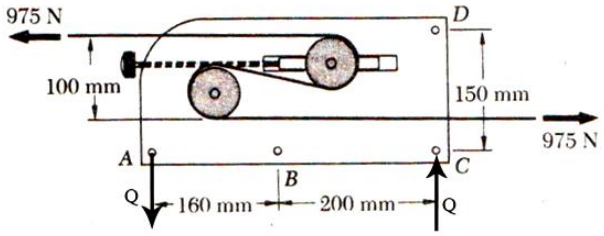
$\overrightarrow{M_{AD}} = \frac{-0.125(70.2) + 0.3(163.8)}{0.325} = \frac{-8.775 + 49.14}{0.325}$

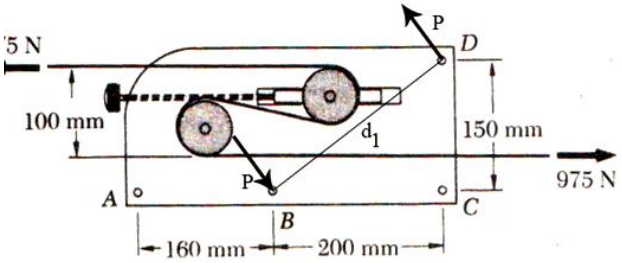
$\overrightarrow{M_{AD}} = +124.2 \qquad \overrightarrow{M_{AD}} = +124.2$

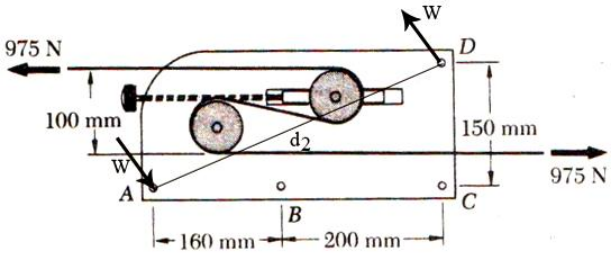
$\overrightarrow{M_{AD}} = 124.2(\frac{-0.125j + 0.3k}{0.325})$

3-49 دو کوپل مطابق شکل بر صفحه‌ای به ابعاد ۱۲۰×۱۶۰ m وارد می‌شود. می‌دانیم که $P_1 = P_2 = 150\,N$ و $Q_1 = Q_2 = 200\,N$. ثابت کنید که مجموع آنها صفر است (a) با جمع گشت آور آنها (b) با ترکیب P_1 و Q_1 به برآیند آنها R_1 و P_2 و Q_2 به برآیند آنها R_2 و سپس نشان دهید که دو بردار R_1 و R_2 برابر و در خلاف جهت هم و در یک امتداد می‌باشند.









a) $M = F.d$

$M = 975 \times 0.1 = 97.5 \quad N - M$

$M = Q \times d = Q \times (0.16 + 0.2)$

$Q = \dfrac{97.5}{0.36} = 270.8 \ N$

$b) \qquad d_1 = \sqrt{0.15^2 + 0.2^2} = 0.25$

$M = P \times d_1$

$97.5 = P \times 0.25$

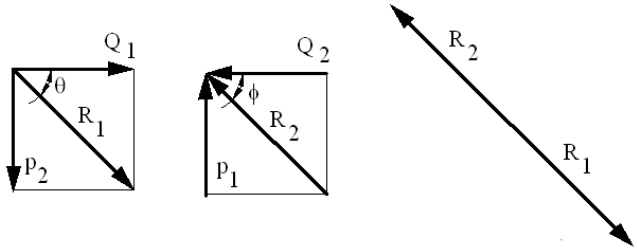
$P = 390 \ N$

$M = d_2 \times W$

$d \qquad d_2 = \sqrt{0.15^2 + (0.36)^2} = 0.36$

$W \times 0.39 = 97.5$

$W = 250 \ N$



$Q_1 = Q_2 = 200N$

$P_1 = P_2 = 150N$

$M_1 = 0.12 \times 200$

$M_1 = -24 \quad N - M$

$M_1 = 0.16 \times 150 = 24 \quad N - M$

$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} = 24 - 24 = 0$

$Q_1 = 200 \ N$

$P_1 = 150 \ N$

$R_1 = \sqrt{200^2 + 150^2} = 250$

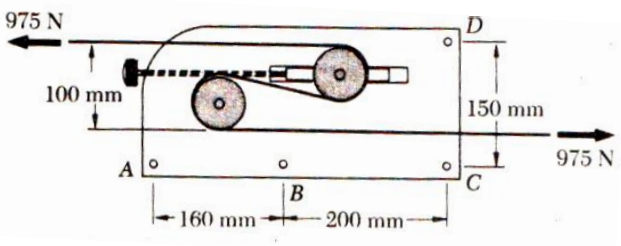
$\tan\theta = \dfrac{+150}{+200} \qquad \theta = 36.85$

$\tan\phi = \dfrac{-150}{-200} \qquad \phi = 36.85$

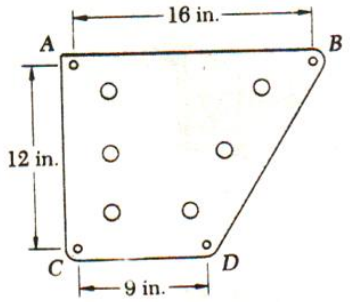
then , $\quad R_1 = R_2 = 250N$

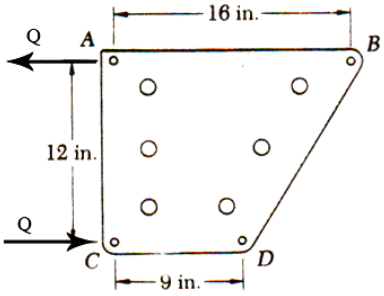
$\sum R = R_1 - R_2 = 0$

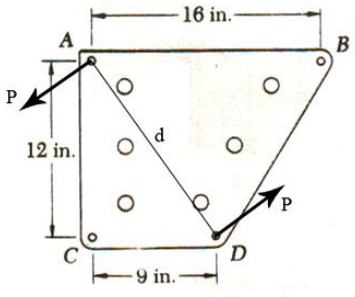
3-50 کوپل حاصله به وسیله دو نیروی ۹۷۵ تیوتن بر دو قرقره مطابق شکل وارد می‌شود معین کنید کوپل معادلی که بوسیله نیروهای قائم وارد بر نقطه A و C ایجاد می‌شود.(b)بر نقطه (a) D,A،بر نقطه (C)، D,B

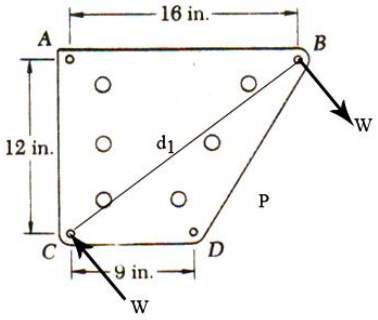


3-52 با ماشین چند مته‌ای سوراخ کن در یک لحظه شش سوراخ در صفحه فولادی مطابق شکل ایجاد می‌شود. هر مته کوپلی موافق عقربه ساعت برابر با $40lb\text{-}in$ روی صفحه درست می‌کند. معین کنید کوپل معادل تشکیل شده بوسیله حداقل نیروهای وارده، (a) در نقطه C و A (b) در نقطه A وD. (c) در نقطهB و C









$M = 40 \quad lb - in$

شش سوراخ

a) $M = 40 \times 6 = 240 \quad lb - in$

$M = Q \times d = Q \times 12$

$Q = \dfrac{240}{12} = 20 \quad lb$

b) $d = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$

$M = P \times d$

$240 = P \times 15$

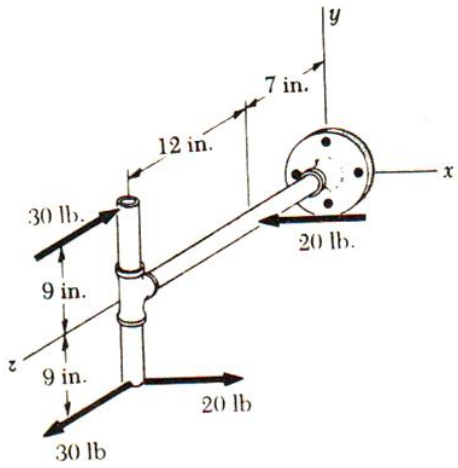
$P = 16 \quad$ lb

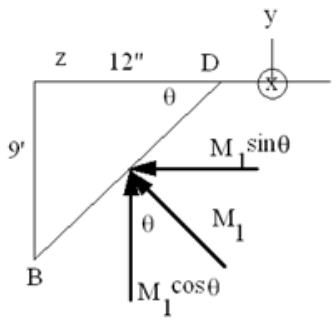
$M = d_1 \times W$

c) $d_1 = \sqrt{12^2 + 9^2} = 20$

$W = \dfrac{240}{20} = 12 \quad lb$

3-54 معین کنید مؤلفه‌های کوپل منفرد معادل با دو کوپل مطابق شکل را. نتیجه بدست آمده را با اضافه کردن گشت آورهای نیروهای منفرد حول مبدأ مختصات بررسی نمائید.





$\vec{M} = \overrightarrow{+M_1} + \overrightarrow{M_2}$

$\vec{M} = +M_1 SIN\theta k + M_1 Cos\theta j + M_2 i$

$\overrightarrow{DB} = \sqrt{12^2 + 81} = 25$

$\overrightarrow{M_1} = +(25)(20)\frac{9}{25}k + 25 \times 20\frac{12}{25}j + 30kx18j$

$\left[\ \overrightarrow{M_1} = 240j + 180k - 540i\right]$ Ans.

از راه بردار

$B(0\,,-9\,,19)$

$D(0\,,0\,,7)$

$\overrightarrow{DB} = -9j + 12k \qquad F = +20i$

$MA = r \times F = (-90j + 12k) \times +20i$

$MA = M_1 = +180(+k) + 240(+j)$

$M_1 = +180k + 240j$

$M_2 = (+30k)x(18)j = -540i$

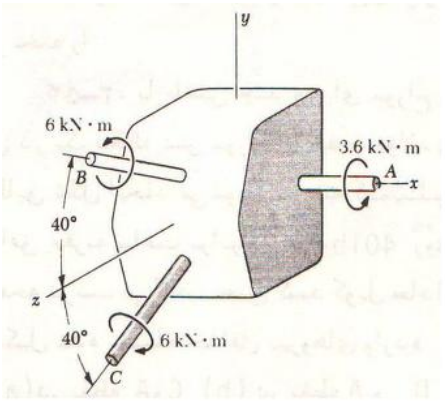
$M = M_1 + M_2 = -540i + 240j + 180k$

$M_x = -540 \quad 1b - 1n$

$M_y = 240 \quad 1b - 1n$

$M_z = 180 \quad 1b - 1n$

3-56 سه محور به جعبه دنده مطابق شکل وصل شده است. محور A افقی و محور B و C در صفحه قائم yz قرار دارند. معین کنید مؤلفه‌های کوپل برآیند وارد بر جعبه دنده را.



$MA = 3.6i$

$\overrightarrow{MB} = 6\,Cos\,40k + 6\,Sin\,40j$

$\overrightarrow{MC} = +6\,Sin40\,j - 6\,CoS\,40\,k$

$\vec{M} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{M_C}$

$\vec{M} = 3.6i + 12sin\,40j + 0$

$M_x = 3.6\ KN - M$

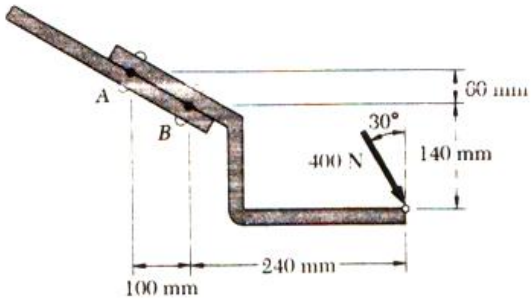
$M_Z = 7.72\ KN - M$

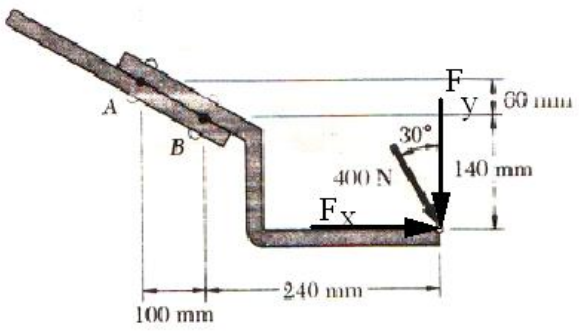
$M_y = 0\ KN - M$

$M = 3.6i + 7.72j$

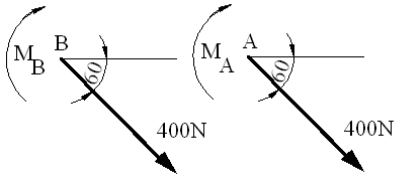
$M = 8.5(0.423i + 0.91j)$

3-58 نیروی ۴۰۰N بر صفحه خمیده ای مطابق شکل وارد می‌شود. معین کنید سیستم کوپل- نیروی معادل را (a) در نقطهٔ A ، (b) در نقطه B.

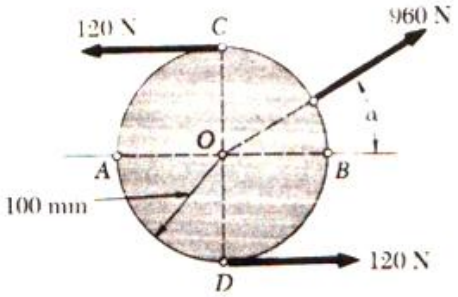


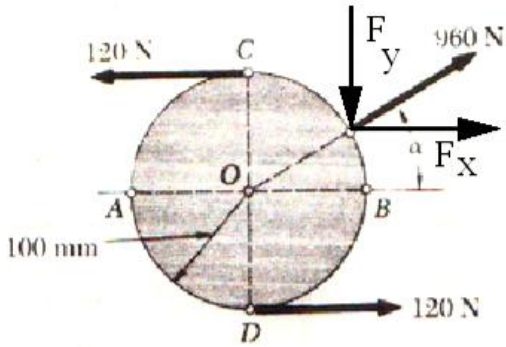


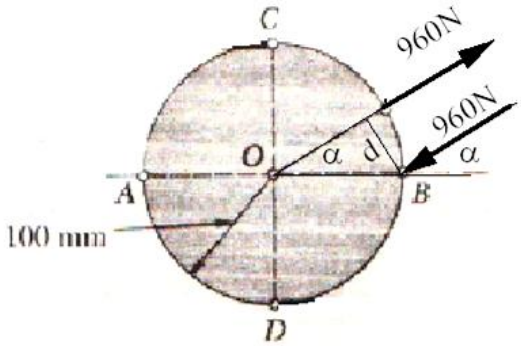
$F_x = 400\ SIN\ 30 = 200\ \ N$
$F_y = 400 Cos\ 30 = 346.4\ \ N$
a) $\curvearrowright + \sum M_A = +F_y(0.34) - F_x(0.2)$
$\curvearrowright + \sum M_A = 346.4(0.34) - 200(0.2)$
$M_A = 77.8 \quad N - M$
$b) \quad \curvearrowright + \sum M_B = +F_y(0.24) - F_x(0.14)$
$\curvearrowright + M_B = +346.4(0.24) - 200(0.14)$
$M_B = +83.13 + 28 = 55.1$
$M_A = 77.8 \ \curvearrowright + \ \ N - M$
$M_B = 55.1 \ \curvearrowright + \ \ N - M$



3-60 نیرو و کوپل نشان داده شده را به یک نیروی منفرد معادل جایگزین نموده. معین کنید مقدار لازم α را بطوریکه خط اثر نیروی معادل منفرد از نقطه B عبور نماید.

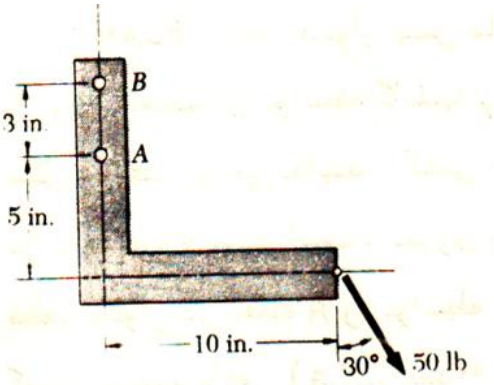


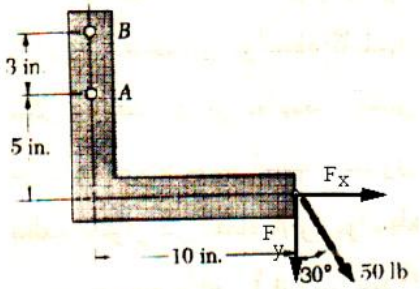


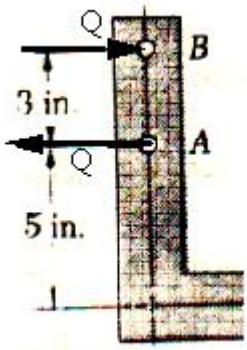


$r = 100mm$
$M_o = (120)(0.2)$
$M_o = 24 \quad N - M$
$(960)(d) = 24$
$d = 0.025$
$\sin \alpha = \frac{d}{r} = \frac{0.025}{0.1}$
$\alpha = 14.5$

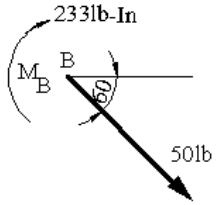
3-62 نیروی ۵۰ پوند بـر گوشـه صـفحه‌ای مطـابق شـکل وارد می‌شود. معین کنید (a) سیستم کوپل- نیروی معـادل در نقطـه B را (b) دو نیروی افقی در نقاط A و B بطوریکه ایجـاد کـوپلی معادل با کوپل بدست آمده در قسمت (a) بنماید.





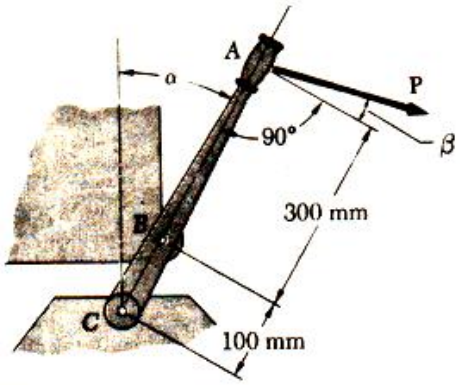


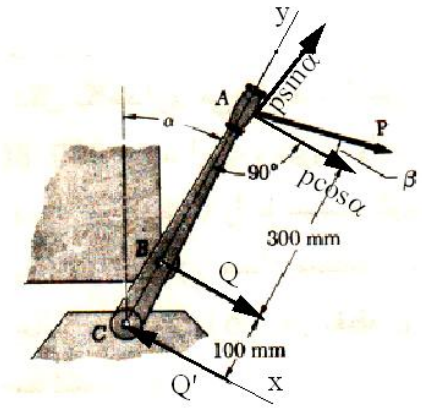
$F_y = 50\ Cos\ 30$
$F_y = +43.3\ \ 1b$
$F_x = 50\ sin\ 30$
$F_x = 25\ \ 1b$
$a)\qquad -\overrightarrow{M_B} + (F_y)(10) - F_x(8)$
$\overrightarrow{M_B} = +43.3(10) - 25(8)$
$\overrightarrow{M_B} = +433 + 200 = +233\ \ 1b - 1n$



$b)\qquad (3)(Q) = 233$
$= 77.67\ lb$

64 -۳ نیروی P را با یک سیستم نیروی معادل که از دو نیـروی موازی وارد بر نقاط B و C تشکیل یافته جایگزین نمائید . نشـان دهید (a) که این نیروها موازی با نیـروی P هسـتند. (b) مقـدار این نیروها مستقل‌اند از دو زاویه α و β.





$(\mathrm{P\ Cos\ \beta})(0.4) = \mathrm{M_C} \curvearrowright +$
$\mathrm{M_C} = (\mathrm{Q})(0.1)$
$(\mathrm{P\ Cos\ \beta})(0.4) = (\mathrm{Q})(0.1)$
$\mathrm{Q} = 4\ \mathrm{PCos\ \beta}$
$\mathrm{M_C} = (\mathrm{P})(0.4)$
$\mathrm{M_C} = (0.1)(\mathrm{Q})$
$\mathrm{P}(0.4) = 0.1\ \mathrm{Q}$
$\mathrm{Q} = 4\mathrm{P} \longrightarrow$

$\mathrm{B} \longrightarrow 4\mathrm{P}$

$\sum \mathrm{F_x} = 0$

$-\mathrm{Q} + \mathrm{Q}' = \mathrm{P}$

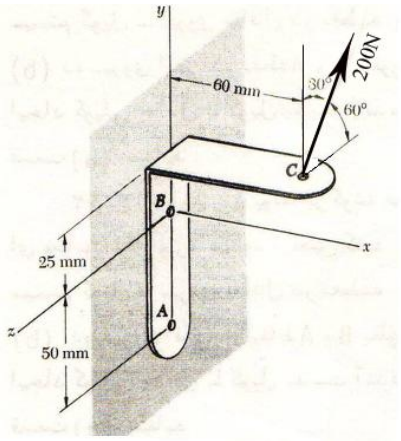
$\mathrm{Q}' = \mathrm{Q} - \mathrm{P}$

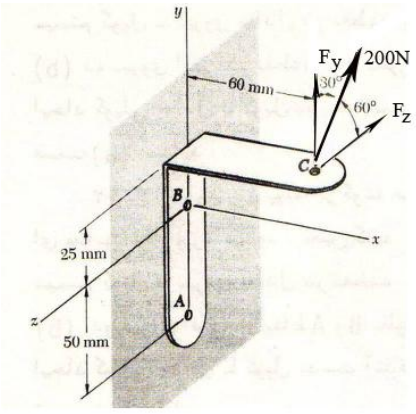
$\mathrm{Q}' = 4\mathrm{P} - \mathrm{P} = 3\mathrm{P} \longleftarrow$

$Q' = 3\mathrm{P} \longleftarrow$

$\mathrm{Q} = 4\mathrm{P} \longrightarrow$

3-66 نیروی ۲۰۰ نیوتن مطابق شکل بر شاخه وارد می‌شود. معین کنید مؤلفه‌های نیرو و کوپل وارد بر نقطهٔ A را بطوریکه معادل با نیروی فوق باشد.





$\theta y = 30$

$\theta z = 60$

$Cos\ \theta^2 y + Cos\ \theta^2 z + Cos\ \theta^2 x = 1$

$0.75 + 0.25 + Cos\ \theta^2 x = 1$

$Cos\ \theta x = 0 \qquad \theta x = 90$

$F_x = F\ CoS\ \theta x = 0$

$F_y = F\ Cos\ \theta y = (200)(Cos\ 30) = 173.2\ \mathrm{N}$

$F_z = F\ Cos\ \theta z$=(200)(Cos 60)=100 N

$F = 173.2\, j - 100k$

$A(0\,, -0.05\,, 0)$

$C(0.06\,, 0.025\,, 0)$

$\overrightarrow{CA} = -0.06i - 0.075j$

$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{r_{CA}} \times \vec{F}$

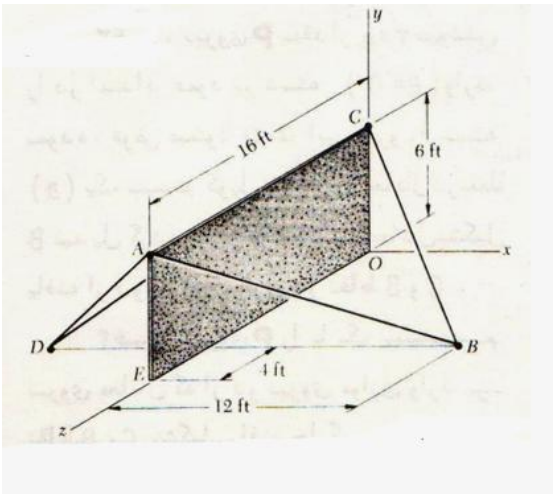
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.06 & -0.075 & 0 \\ 0 & 173.2 & -100 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ -0.06 & -0.05 \\ 0 & 173.2 \end{matrix}$$

$\overrightarrow{M_A} = 7.5i + 10.4k - 6j$

$M_A = 14.1$ N-m

$Q = -F = -173.2j + 100k$

3-68 قطعه دیوار پیش ساخته بتونی را برای لحظه‌ای بواسطه کابلهایی مطابق شکل نگاهداری می‌نمایند. کشش در کابل ۹۰۰lb BC پوند است. نیروی وارد بر قطعه دیوار در نقطه C را با سیستم کوپل – نیرو وارد بر (a) در مبدأ مختصات نقطه O جایگزین نمایید. (b) در نقطه E جایگزین نمایید.



$\mathrm{T_{BC}} = 900$ lb

a) O *کوپل نیرو*

b) E *کوپل نیرو*

$\mathrm{C}(0\,, 6\,, 0) \qquad \mathrm{B}(12\,, 0\,, 12)$

$\mathrm{E}(0\,, 0\,, 16)$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -12\,\mathrm{i} + 6\mathrm{j} - 12\mathrm{k}$

$$\vec{\lambda} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\mathrm{BC}} = \frac{-12\,\mathrm{i} + 6\mathrm{j} - 12\mathrm{k}}{\sqrt{144 + 144 + 36}}$$

$$= \frac{-12\,\mathrm{i} + 6\mathrm{j} - 12\mathrm{k}}{18}$$

$\overrightarrow{r_{OC}} = 6j$

$\overrightarrow{F_{BC}} = \frac{900}{18}(-12\,i + 6j - 12k)$

$\overrightarrow{F_{BC}} = -600\,i + 300j - 600k$

$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{r_{OC}} \times \vec{F} = 6j(-600\,i + 300j - 600k)$

$\overrightarrow{M_O} = +3600\,k - 3600i$

$\vec{Q} = -\vec{F} = +600i - 300j + 600k$

$\begin{cases} \overrightarrow{M_O} = 3600\,k - 3600i \\ \overrightarrow{Q} = 600i - 300j + 600k \end{cases}$

b) $\overrightarrow{CE} = -6j + 16k$

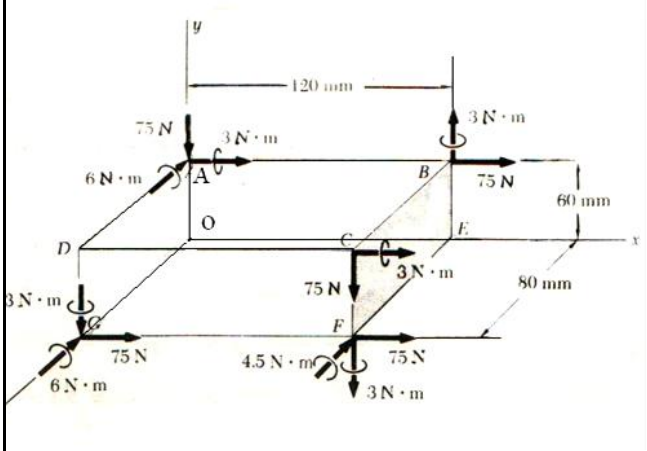
$$\overrightarrow{M_E} = \overrightarrow{r_{CE}} \times \vec{F}_{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -6 & 16 \\ -600 & 300 & -600 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 0 & 16 \\ -600 & 300 \end{matrix}$$

$M_E = +3600i - 9600j - 3600k - 4800i$

$M_E = -1200i - 9600j - 3600k$

$\begin{cases} \vec{Q} = -F = +600i - 300j + 600k \\ \overrightarrow{M_E} = -1200i - 9600j - 3600k \end{cases}$

3-69 پنج سیستم کوپل- نیرو مجزا در گوشه‌های یک متوازی‌السطوح مطابق شکل وارد می‌شود. مطلوبست دو سیستم کوپل – نیروی معادل آن.



$M_O = ?$

$M_O = \begin{Bmatrix} A \\ 3i - 6k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B \\ 3j - (75 \times 0.06)k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G \\ -3j - 6k + (75 \times 0.08)j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F \\ -4.5k - 3j + (75 \times 0.08)j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C \\ +3i - (75 \times 0.12)k + (75x0.08)i \end{Bmatrix}$

$M_O = (3i - 6k) + (3j - 4.5k) + (-3j - 6k + 6j) + (-4.5k - 3j + 6j) + (+3i - 9k + 6i)$

$M_O = (12i + 9j - 30k)$

3-70 معین کنید کدام یک از سیستم کوپل – نیرو نشان داده شده معادل با سیستم کوپل – نیرو وارد بر مبدأ مختصات می‌باشند که شامل نیروی $F = -(75N)\,j$ و $M_O = (9N.m)i - (9N.m)k$ باشد.

از مسئله قبل داریم در نقاط A,C

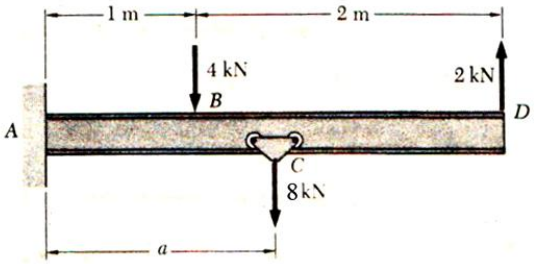
$M_O = \begin{Bmatrix} A \\ 3i - 6k \end{Bmatrix}$

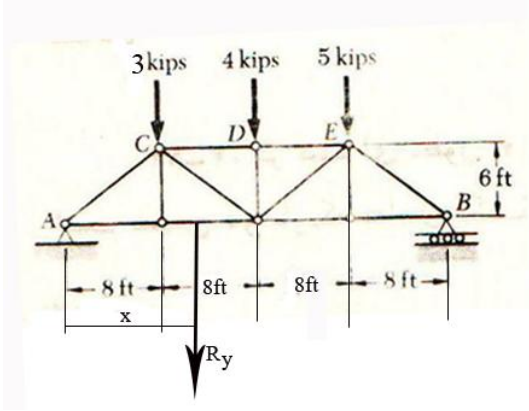
$M_O = \begin{Bmatrix} C \\ +9i - (9)k \end{Bmatrix}$

$M_O = \begin{Bmatrix} C \\ +3i - (75 \times 0.12)k + (75x0.08)i \end{Bmatrix}$

سیستم زوج نیرو در نقطه C درست است.

3-76 معین کنید فاصله نقطه A از نقطه اثر برآیند سه نیروی وارد مطابق شکل را وقتی که a=2.5m , a=1.5m ,a=1m





$$\curvearrowright^{+} \sum M_A = 8(3) + 4(16) + 5(24)$$

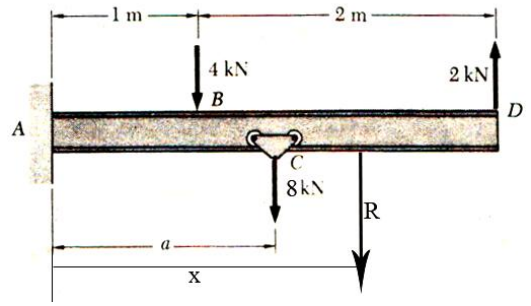
$$M_A = 208$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \sum F_y = -12 \text{ kips}$$

$$\sum F_y = -R_y - 3 - 4 - 5 = 0$$

$$R_y = -12 \text{ Kips}$$

$$(R_y)(x) = 208 \qquad x = \frac{208}{12} = 17.33 \text{ ft}$$



$x = ?$ $a = 1,\ 1.5,\ 2.5$

$$\uparrow + \sum F = 0 = -R + 2 - 8 - 4 = 0$$

$$\rightarrowtail \quad R = -10KN$$

$$\curvearrowleft + \sum M_A = \sum M'_A$$

$$\sum M_A = (2)(3) - 8(a) - 4(1) = -10x$$

$$M_A = 6 - 8a - 4 = 2 - 8a$$

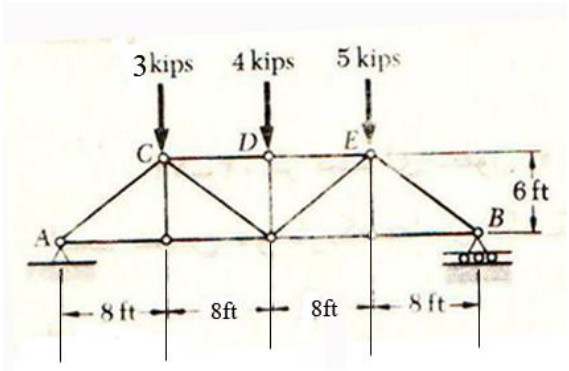
$2 - 8a = -10(x)$

$a = 1$ m $\qquad 2 - 8 = -10x \qquad x =$ 0.6 m

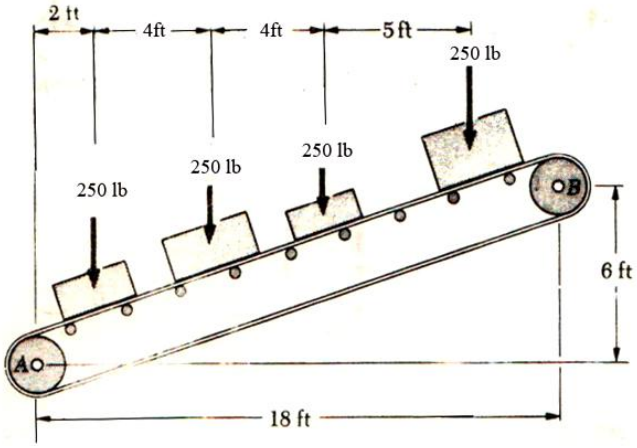
$a = 1.5$ m $\qquad 2 - 12 = -10x \qquad x = 1$ m

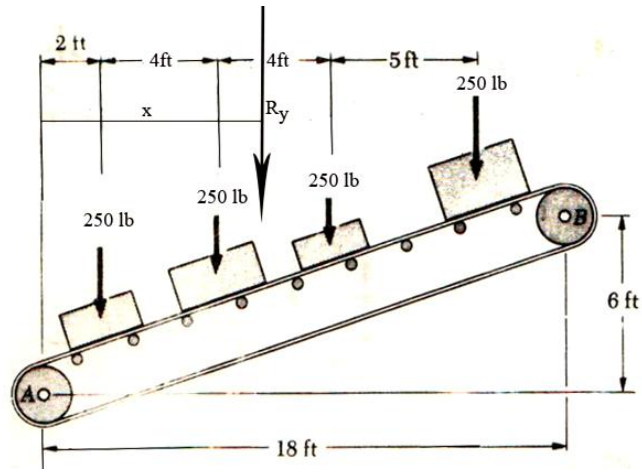
$a = 2.5$ m $\qquad 2 - 20 = -10x \qquad x = 1.8$ m

3-78 بارهایی مطابق شکل بر خرپا وارد می‌شود. معین کنید برآیند بارها را و فاصله نقطه A تا خط اثر برآیند را.



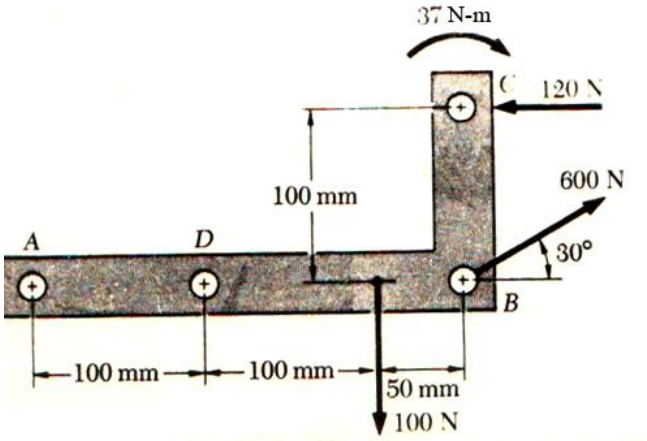
بواسـته Bبه نقطـهA چهار بسته با سرعت ثابتی از نقطه 3-80 تسمه انتقال دهنده ای منتقـل مـی شـوند. در لحظـه ای مطـابق شکل معین کنید برآیند آنهاو نقطه اثر آن را

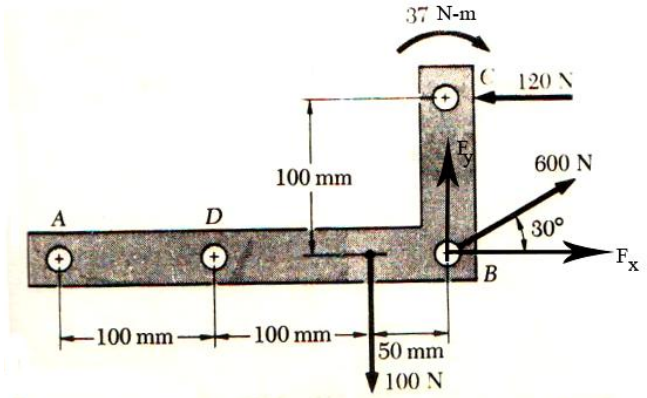


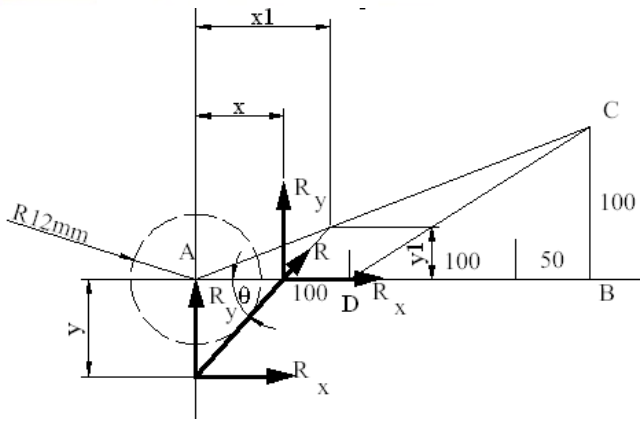


$$\sum R = 0$$
$$R_y = -4(250) = 0$$
$$R_y = -1000 \quad 1b$$
$$\curvearrowright^{+} \sum M_A = +250\,(2) + 250\,(6) + 250(10) + 250(15)$$
$$\sum M_A = 8250$$
$$8250 = 1000x$$
$$x = 8.25\ ft$$

3.-81 نیروهـایی مطـابق شـکل بـر جسـمی وارد مـی‌شـود. مطلوبست برآیند سیستم نیروها و نقطه اثر تقاطع خط اثر برآینـد از دو خط AC و CD را.





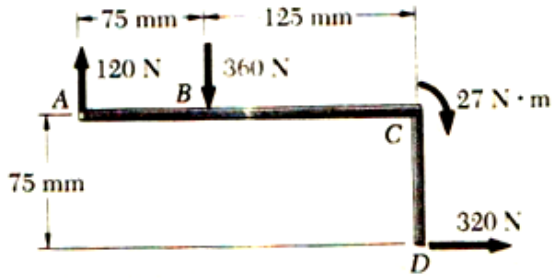


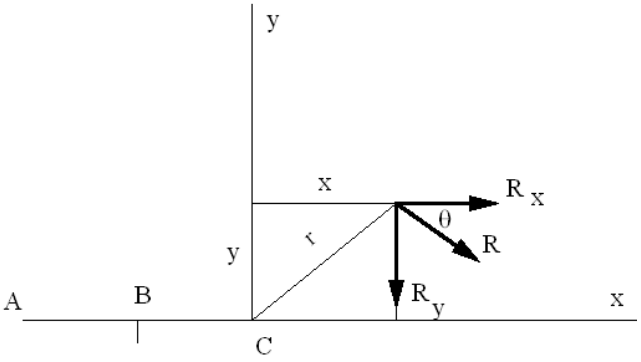
$$F_x = 600\ \text{Cos}\ 30 = 519.6\ \text{N}$$
$$F_y = 600\ sin\ 30 = 200\ \text{N}$$
$$\curvearrowleft^{+} \sum M_A = (120)(0.1) - 100(0.2) + 200(0.25) - 37$$
$$M_A = 12 - 20 + 50 - 37 = 5 \quad \text{N} - \text{m}$$
$$\sum F_y = R_y \qquad R_y = -100 + F_y = 0$$
$$R_y = 100 - F_y = -100 + 200 = +100\text{N}$$

$x = 19.2\ \text{mm}$
$y = +0.66(19.2) - 0.066 = 12.6$
$y = 12.6\text{mm}$

$$DC, R \quad \text{برخوردخط} \quad \begin{cases} x_2 = 19.2\ \text{mm} \\ y_2 = 12.6\text{mm} \end{cases}$$

3-82 مطلوبست برآیند سیستم نیروها مطابق شکل و نقطه تقاطع برآیند با خطوط AC و CD.





$\curvearrowright^{+} M_C = 120(0.20) - 360(0.125) + 27 - 320(0.075)$
$M_C = 24 - 45 + 27 - 24 = -18$
$\sum F_x = R_X \qquad R_X = 320 = 0$
$R_X = +320$
$\sum F_y = R_y \qquad R_y = 120 - 360 = 0 \qquad R_y = -240$

$\vec{R} = 320i - 240j$
$\vec{r} = xi + yj$
$\curvearrowright^{+} M_C = \vec{r} \times \vec{R}$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ +320 & -240 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ x & y \\ +320 & -240 \end{matrix}$$

$= -240xk - 320yk = -18$

$\sum F_x = R_X = R_X = F_x - 120 = 0$
$R_X = -120 + 519.6 = +399.6\ \text{N}$
$\vec{R} = +399.6i + 100j$

$\bar{x} = \frac{M_A}{R_y} = \frac{5}{399.6} = 0.0125\ m$
$\bar{y} = \frac{M_A}{R_x} = \frac{5}{100} = 0.05\ m$
$r = \frac{M_A}{\bar{R}} = \frac{5}{412} = 0.012\ m$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_X}$$

$\tan\theta = \frac{100}{399.6}$
$\theta = 14 \quad \theta = 14$
$\text{Cos}\,\theta = \frac{R_X}{R}$
$\bar{R} = \frac{399.6}{\text{Cos}\,14} = 412\ \text{N}$
R معادله $399.6\,y - 100(x) = 5$
$A(0, 0) \qquad C(0.25, 0.1)$
$D(0.1, 0)$
AC معادله $y - 0 = \frac{0.1}{+0.25}(x - 0)$
$\longrightarrow y = 0.4x$

$$\begin{cases} y = +0.4x \\ 399.6\,y - 100x = +5 \end{cases}$$

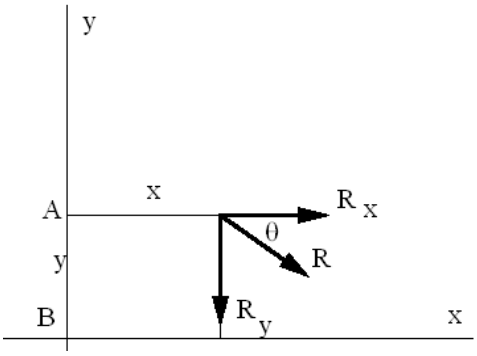
$399.6\,y - 100x = +5$
$399.6(+0.4x) - 100x = +5$
$+159.8x - 100x = +5$
$x = 83.6\ \text{mm}$
$y = +0.4(0.0836) = 0.0334$
$y = 33.4\text{mm}$

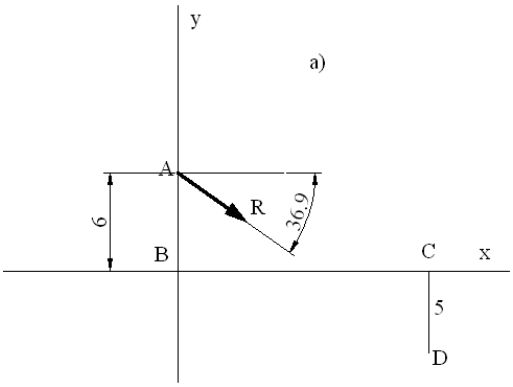
$$\left\{ AC, R \quad \text{برخوردخط} \quad \begin{cases} x_1 = 83.6\ \text{mm} \\ y_1 = 33.4\text{mm} \end{cases} \right\}$$

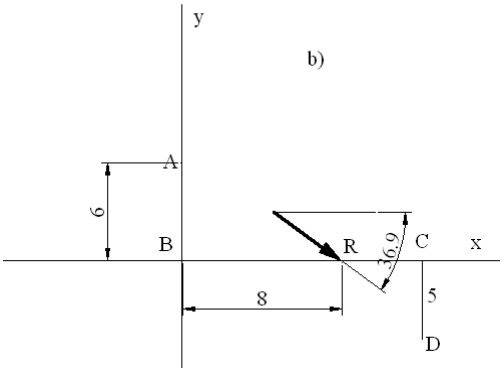
DC معادله $y - 0 = \frac{-0.1}{0.1 - 0.25}(x - 0.1)$
$\longrightarrow y = 0.66x - 0.066$

$$\begin{cases} y = 0.66x - 0.066 \\ 399.6\,y - 100x = +5 \end{cases}$$

$399.6\,y - 100x = +5$
$399.6(0.66x - 0.066) - 100x = +5$
$+263.7x - 100x = +5 + 26.4$







$AC \qquad x = 0$

$-320y = -18 \qquad y = +56.25 \ \ mm$

$CD \qquad y = 0 \qquad -240x = -18 \qquad x = +75 \ \ mm$

$R = +320i - 240j$

$\tan\theta = \frac{240}{320}$

$\theta = 36.87$

$\theta = 36.9°$

$\cos\theta = \frac{320}{R}$

$R = \frac{320}{\cos 36.9} = 400 \ \ N$

$R = 400$

$320y + 240x = -18$

$AC \qquad$ *برخورد با*

$y = 0$

$240x = -18$

$x = -75 \ \ mm$

$x = 0$

$y = -\frac{18}{320} \times 1000$

$y = -56.3 \ \ mm$

3-84 بر میله‌ای مطابق شکل سیستم نیرو و جفت نیرو وارد می‌شود، معین کنید برآیند سیستم و نقطه اثر محل تقاطع آن را از (a) خط AB ، (b) خط BC و (c) خط CD.

$\curvearrowright^{+} \quad M_B = (30)(6) + 200 + 400 - 25(12)$

$M_B = 480 \ \curvearrowright^{+}$

$\sum F_x = R_X = 50 + 30 = 80 \qquad R_X = +80 \quad 1b$

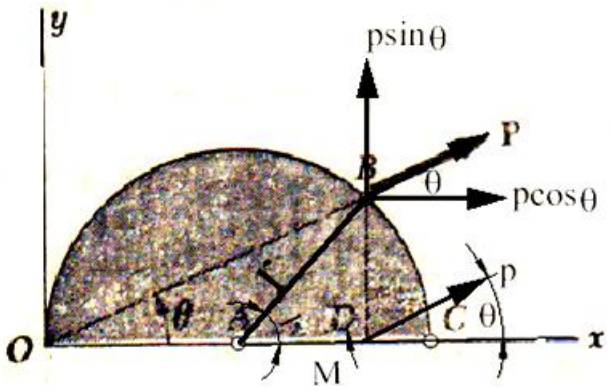
$\sum F_y = R_y = -85 + 25 = -60 \qquad R_y = -60 \quad 1b$

$\vec{R} = +80i - 60j$

$\tan\theta = \frac{60}{80} \qquad \theta = 36.9°$

$\cos\theta = \frac{80}{\bar{R}}$

$\bar{R} = \frac{80}{\cos 36.9} = 100 \ \ 1b$



$r = a$

$M = (P\ Cos\ \theta)(BD)$

$sin A_1 = \frac{BD}{r} = \frac{BD}{a}$

$BD = a \sin A_1$

$\widehat{A_1} = \widehat{BC}$

$\hat{\theta} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

$\hat{\theta} = \frac{\widehat{A_1}}{2}$

$BD = a\sin 2\theta$

$M = P\ Cos\theta\ a\ \sin 2\theta$

$M = Pa\ Cos\theta\ \sin 2\theta$

مشتق صفر M'

$= Pa(+2\ Cos\ 2\theta\ Cos\theta - sin 2\theta\ sin\theta) = 0$

$2Cos\theta\ Cos2\theta - \sin 2\theta\ \sin\theta = 0$

$2Cos\theta\ Cos2\theta - 2\sin\theta\ Cos\theta\ \sin\theta = 0$

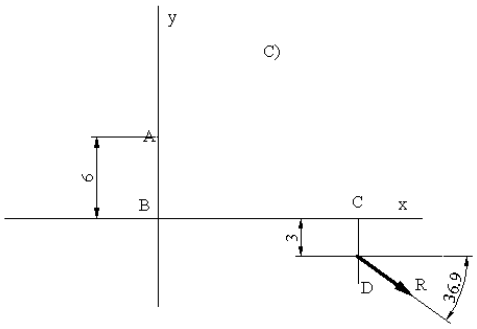
$Cos2\theta - \sin^2\theta = 0$

$Cos^2\theta - \sin^2\theta - \sin^2\theta = 0$

$Cos^2\theta = 2\sin^2\theta$

$\tan^2\theta = \frac{1}{2}$

$\tan\theta = \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\theta = 35.3$



$+80y + 60x = M_B = 480$

$+80y + 60x = 480$

a) AB $x = 0$ $y = +\frac{480}{80} = +6$ At A

b) BC $y = 0$

$x = +\frac{480}{60} = +8$

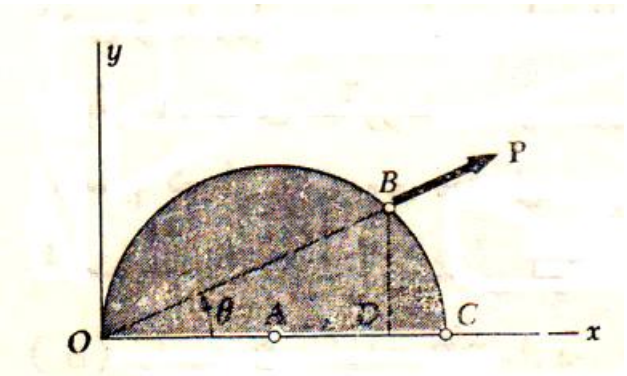
CD $x = 12$

$80y + 720 = 480$

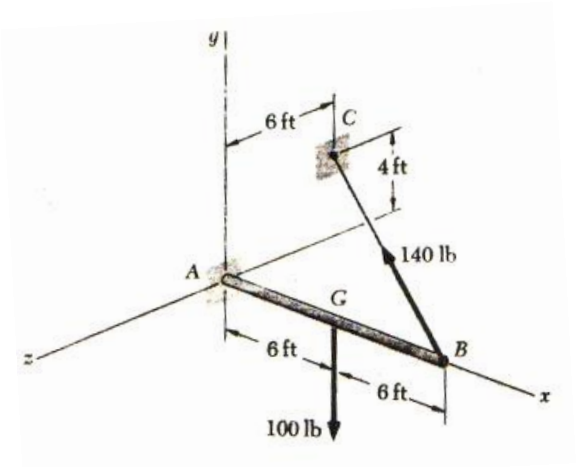
$80y = -240$

$y = -3.0$

3-86 نیروی P به مقدار P بر کنار نیم صفحه دایره شکل به شعاع (a) مطابق شکل وارد می‌شود. این نیرو را با سیستم کوپل نیروی معادل وارد بر نقطه F که پای عمود نقطه B بر محور xها است جایگزین نمایید. (b) معین کنید زاویه θ را برای وقتی که گشت آور سیستم کوپل- نیروی معادل وارد بر نقطه D حداکثر باشد.



3-88 میله AB بطور ۱۲ فوت یکطرف آن نقطه A ثابت است وزن آن ۱۰۰ lb و بر آن نیروی ۱۴۰ lb بواسطه کابل BC وارد می‌شود معین کنید نیرو و کوپل معادل وارد بر نقطه A را که از این دو نیرو حاصل می‌شود.



$C(0,4,-6)\quad A(0,0,0)\quad B(12,0,0)$

$\overrightarrow{BC} = -12i + 4j - 6k$

$\lambda = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{BC} = \dfrac{-12i + 4j - 6k}{\sqrt{144+16+36}}$

$\overrightarrow{F_B} = \dfrac{140}{14} = (-12i + 4j - 6k)$

$= -120i + 40j - 60k$

$\overrightarrow{F_G} = -100j$

$\vec{R} = \overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{F_G} = -120i - 60j - 60k$

$\overrightarrow{AB} = 12i$

$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{r_{AB}} x \overrightarrow{F_B} = 12ix(-120i + 40j - 60k)$

$\overrightarrow{M_A} = 480(k) - 720(-j) = 720j + 480k$

$100lb$ مربوط به نیروی $\overrightarrow{M'_A} = (100)(6)(-k)$

$= -600k$

$\vec{M} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{M'_A} = 720j + 480k - 600k$

$\vec{M} = 720j - 120k$

$\bar{M} = \sqrt{(720)^2 + (120)^2} = \sqrt{518400 + 14400}$

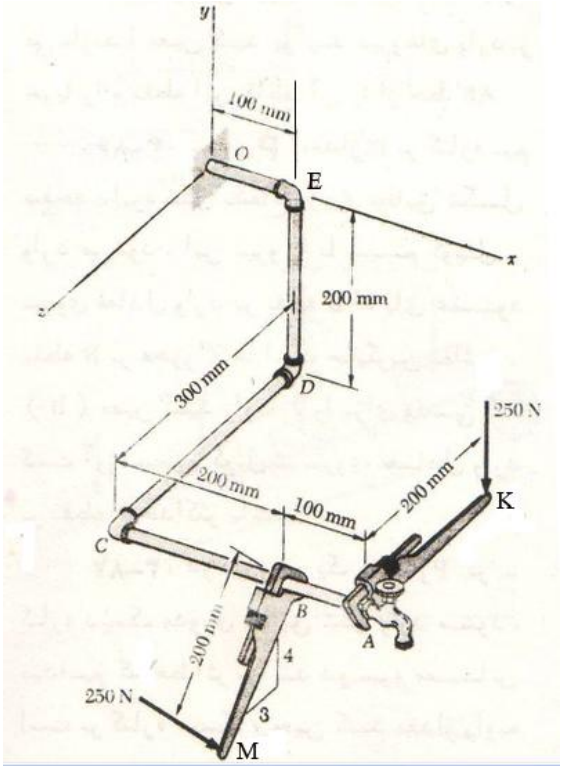
$\bar{M} = 729.93 = 730$

$\tan\theta y = \dfrac{120}{720}$

$\theta y = 9.5$

$\theta z = 90 - 9.5 = 80.5$

3-90 برای محکم کردن اتصال بین شیر A و لوله AC مطابق شکل عمل کرده از دو آچار استفاده می‌نمایند. با وارد کردن نیروی ۲۵۰ نیوتن روی هر کدام از آچارها به فاصله ۲۰۰ میلیمتر از محور لوله و در امتداد عمود بر لوله از چرخیدن لوله و هم چنین از شل شدن و یا زیاد سفت کردن اتصال در نقطه C جلوگیری بعمل می‌آورند. دو نیروی وارد را با سیستم کوپل – میروی معادل در نقطه D جایگزین نمائید و معین کنید کدام عمل لوله‌کش باعث تمایل به محکم شدن لوله‌ها و یا شل شدن اتصال بین (a) لوله CD و زانوی D دارد ؛ (b) زانوی D و لوله DE دارد. فرض می‌شود کلیه پیچ‌ها از قانون دست راست تبعیت کنند.



$M_D = ?$

$D(0.1,-0.2,0)A(0.4,-0.2,0.3)$

$B(0.3,-0.2,0.3)$

$F_E = -250j$

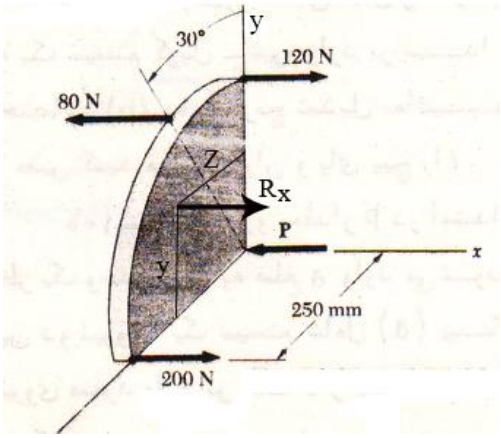
$F_F = ?$

$K(0.4,-0.2,0.1)$

$M(0.3,-(0.2+0.2x\frac{4}{5}),(0.3+0.2x\frac{4}{5}))$

$M(0.3,-0.36,.42)$

$\overrightarrow{DK} = +0.3i + 0.1k$



$r = 250\ mm$

$\sum F_X = R_X = 120 - 40 - 80 + 200$

$R_X = 200\ N$

$B(0\ ,0.25\text{Cos}\ 30\ ,0.25\ \sin 30)$

$O(0\ ,0\ ,0)$

$\overrightarrow{r_{OB}} = 0.216j + 0.125k$

$\overrightarrow{M_O} = (0.216j + 0.125k)x(-80i)$

$\overrightarrow{M_O} = -17.3(-k) - 10(j)$

$\overrightarrow{M_O} = +17.3k - 10j$

$\vec{M} = \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2}$

$\vec{M} = 17.3k - 10j - 120(0.25)k + 200(0.25)j$

$\vec{M} = 17.3k - 10j - 30k + 50j$

$\vec{M} = 40j - 12.7k$

$\vec{r} = zk + yj$

$\vec{M} = \vec{r}x\overrightarrow{R_x}$

$(zk + yj)x200i = 40j - 12.7k$

$+200z(+j) + 200y(-k) = 40j - 12.7k$

$$z = \frac{+40}{200} \times 1000 = 200\ mm$$

$$y = \frac{-12.7}{-200} \times 1000 = 63.5\ mm$$

$M_D = (+0.3i + 0.1k) \times -250j$

$M_D = -75(K) + 25i$

$F_F = -250 \times \frac{4}{5}k - 250 \times \frac{3}{5}j$

$F_F = -200k - 150j$

$\vec{R} = -200k - 150j - 250j$

$\left[\vec{R} = -200k - 400j\right]\ Ans.$

$M(0.3\ , -0.36\ , 0.42)$

$D(0.1\ , -0.2\ , 0)$

$\overrightarrow{DM} = +0.2i - 0.16j + 0.42k$

$\overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{r_{DM}} \times \overrightarrow{F_F}$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ +0.2 & -0.16 & +0.42 \\ 0 & -150 & -200 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & k \\ +0.2 & -0.16 \\ 0 & -150 \end{matrix}$$

$M_{D_1} = +32i - 30k + 63i + 40j$

$M_{D_2} = -75k + 25i$

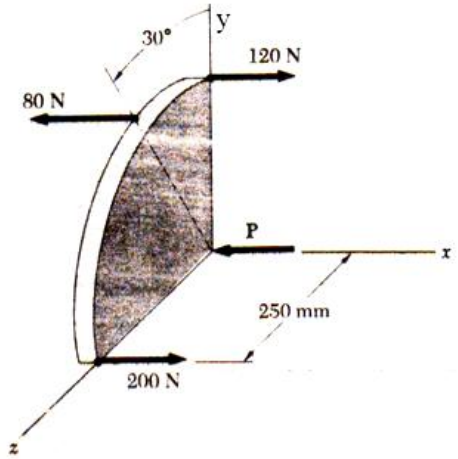
$M_{D_1} + M_{D_2} = M$

$$\text{Ans.} \begin{cases} M = 120i + 40j - 105k \\ R = -200k - 400j \end{cases}$$

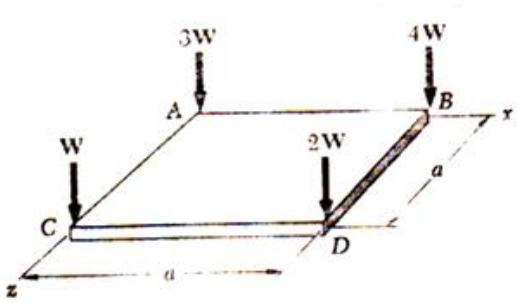
a (سفت می شود

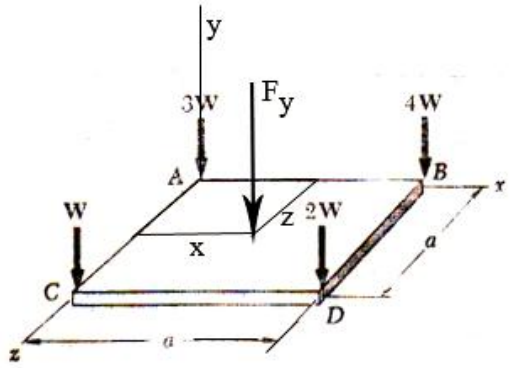
b(سفت می شود

3-92 چهار نیروی افقی بر روی یک صفحه ربع دایره بطور قـائم وارد می‌شود. شعاع صفحه ۲۵۰ mm می‌باشد. معین کنید مقدار و نقطه اثر برآیند چهار نیروی وارد را هر گاه P=40lbباشد.



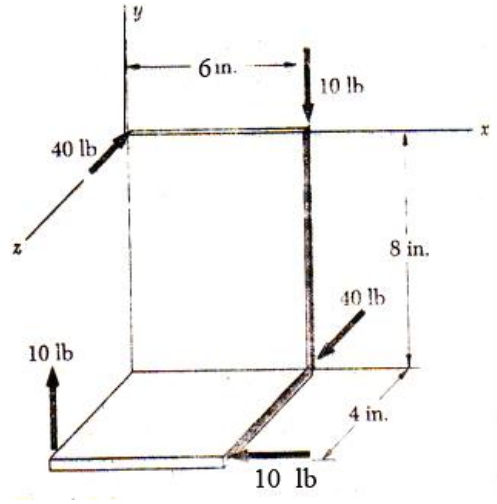
3-94 بر صفحه چهارگوش به ضلع a چهار بار مطابق شـکل وارد می‌شود، معین کنید مقدار و نقطه اثر برآیند چهار بار را.

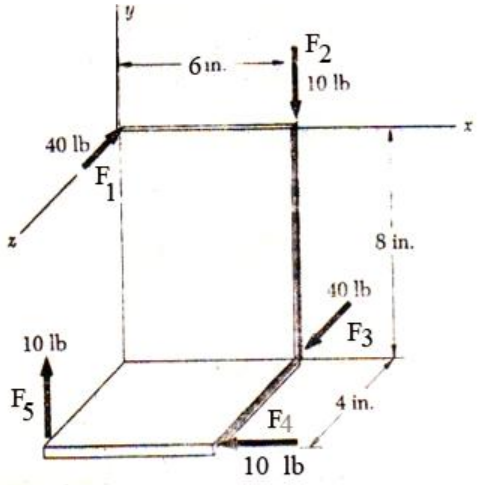




$$\sum F_y = 0, -F_y - 3w - 4w - 2w - 1w = 0$$
$$F_y = -10w$$
$$\curvearrowleft^{+} \sum M_A = 4wa(-k) + w(a)(i) + 2w(a)(-k) + 2wai$$
$$M_A = -6wak + 3wai$$
$$(-10w)(x)(k) + 10w(z)i = +3awi - 6awk$$
$$-10wx = -6aw$$
$$-10wz = -3aw$$
$$\begin{cases} x = 0.6a \\ z = 0.3a \end{cases}$$

3-96 سیستم نیروهایی مطابق شکل را به یـک رنـچ (wrench دینامیکی) تیـدبل نماییـد. معیـین کنیـد محـور دوران و نسـبت $\frac{M_1}{R}$ یعنی پای پیچ را.

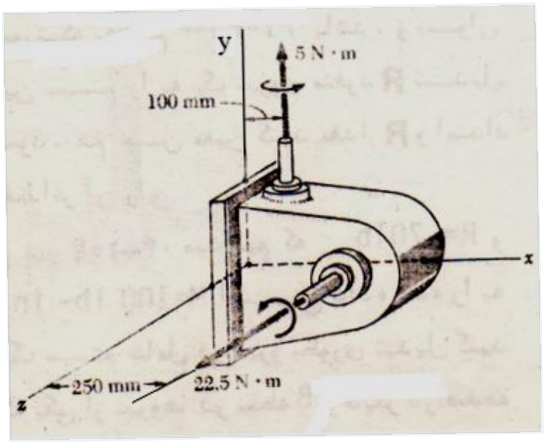




$$F_1 = -40k \quad F_2 = -10j \quad F_3 = 40k \quad F_4 = -10i$$
$$F_5 = 10j$$
$$\sum F = R = -40k - 10j + 10j + 40k - 10i$$
$$\vec{R} = -10i$$
$$\overrightarrow{M_O} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 8j \times (-40k) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 6i \times (-10j) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 6i \times (40k) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ (6i + 4k) \times (-10i) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5 \\ 4kx10j \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_O} = -320i - 60k + 240(-j) - 40j + 40(-i)$$
$$\overrightarrow{M_O} = -360i - 280j - 60k$$

3-98دنده مارپیچ مطابق شکل به وزن ۳۰۰ نیوتن مفروض است. مرکز ثقل آن بـه فاصـله x=200 میلیمتـر قـرار گرفتـه. وزن و کوپل وارده را به یک رنچ تبدیل نموده (معین کنید محـور دوران و پای پیچ را)



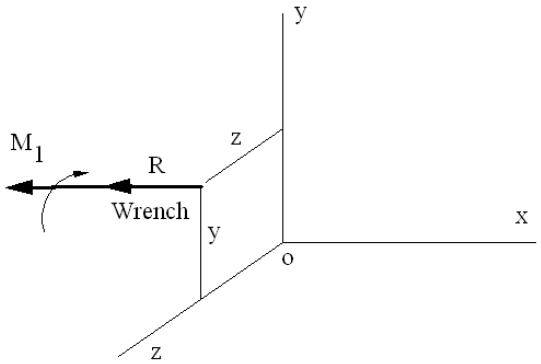
$x_G = 200\ \text{mm}$
$w_G = 200\ \text{N}$
$z = 0$
$R_y = 0 \qquad R_z = 0$
$R_y = -300\text{j}\ \ \text{N}$
$\curvearrowright^{+}\ \ \overrightarrow{M_O} = 5\text{j} + 22.5\text{k} - 300(0.2)\text{k} + 0$
$\overrightarrow{M_O} = 5\text{j} + 22.5\text{k} - 60\text{k} = 5\text{j} - 37.5\text{k}$
$\vec{M}_1 = \dfrac{\vec{R}.(\vec{R}.\vec{M}_O)}{(\vec{R})^2}$

$\vec{M}_1 = \dfrac{(-300\text{j}).[(-300\text{j}).(5\text{j} - 37.5\text{k})]}{(300)^2} = 5\text{j}$
$\vec{M}_2 = \vec{M}_O - \vec{M}_1 = 5j - 37.5k - 5j = -37.5k$
$\vec{M}_2 = \vec{r}x\vec{R} = (\text{xi} + \text{zk})\text{x}(-300\text{j}) = -37.5\text{k}$

$-\text{x}(300)(\text{k}) - \text{z}(300)(\text{i}) = -37.5\text{k}$
$\text{x} = \dfrac{37.5}{300} \times 1000$
$\text{x} = 125\ \text{mm}$
$\text{z} = 0$
پای پیچ $= \dfrac{M_1}{R} = \dfrac{5}{300} \times 1000$
پای پیچ $= 16.67\ \text{mm}$

محور دوران X=125 mm است .

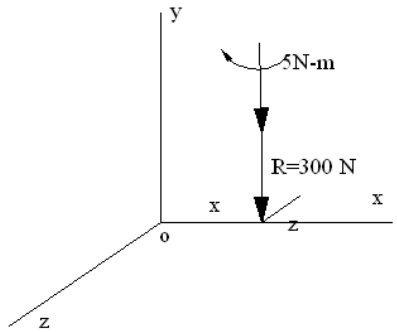
$\vec{M}_1 = \dfrac{\vec{R}.(\vec{R}.\vec{M}_O)}{(\vec{R})^2}$
$\vec{M}_1$
$= \dfrac{[-10i].[(-10i).(-360i - 280j - 60k)]}{(10)^2}$
$\vec{M}_1 = \dfrac{-10i}{100}(3600) = -360i$
$\vec{M}_2 = \vec{M}_O - \vec{M}_1$
$= -360i - 280j - 60k + 360i$
$= -280j - 60k$
$\vec{M}_2 = \vec{r}x\vec{R}$= (zk+yj)x(-10i)
$(10)(\text{y})(\text{k}) - 10\text{zj} = -280\text{j} - 60\text{k}$
$10\text{y} = -60$
$\text{y} = -6 \quad 1\text{n}$
$-10\text{z} = -280$
$\text{z} = 28 \quad 1\text{n}$
$M_1 = 360 \quad \text{lb} - 1\text{n}$
پای پیچ $\frac{M_1}{R} = \frac{360}{10} = 36 \quad \text{in}$



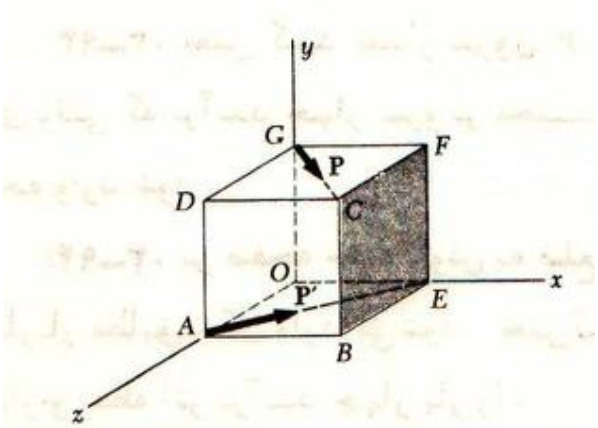
پای پیچ $= \frac{M_1}{R} = \frac{5}{300} \times 1000$

پای پیچ $= 16.67$ mm

محور دوران X=125 mm است .



3-100دو نیرو به مقدار P در امتداد قطر یک وجه مکعبی به ضلع a وارد می‌شود. این دو نیرو به یک سیستم شامل (a) یک نیروی منفرد وارد بر نقطه o و یک کوپل (b) به یک رنج تبدیل نمایید (معین کنید محور دوران و پای پیچ را)



A(0 , 0 , a) K(0, a , 0)

E(a , 0 , 0) C(a , a , a)

$\overrightarrow{KC} = ai + ak$

$\overrightarrow{AE} = ai - ak$

$\overrightarrow{F_{kc}} = \frac{P}{a\sqrt{2}}(ai + ak) = \frac{P\sqrt{2}}{2}(i + k)$

$\overrightarrow{F_{AE}} = \frac{P}{a\sqrt{2}}(ai - ak) = \frac{aP\sqrt{2}}{2}(i - k)$

$\overrightarrow{M_O} = \vec{r} \times \vec{F}_{KC} + \vec{r} \times \vec{F}_{AE}$

$\overrightarrow{M_O} = aj \times \frac{P\sqrt{2}}{2}(i + k) + aK \times \frac{P\sqrt{2}}{2}(i - k)$

$\overrightarrow{M_O} = \frac{aP\sqrt{2}}{2}(-k) + \frac{aP\sqrt{2}}{2}(i) + \frac{aP\sqrt{2}}{2}(j)$

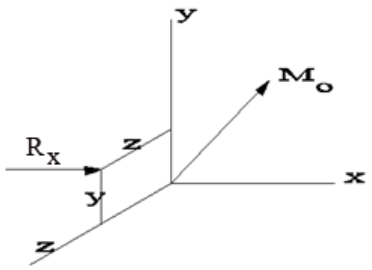
$\overrightarrow{M_O} = \frac{aP\sqrt{2}}{2}(i + j - k)$

$\sum F_X = 0 \quad \vec{R}_X = \frac{2P\sqrt{2}}{2} i = P\sqrt{2}i$

$\sum F_y = 0 = R_y$

$\sum F_z = 0 \quad R_z = \frac{P\sqrt{2}}{2} - \frac{P\sqrt{2}}{2} = 0$

$\vec{R} = P\sqrt{2}i$



$\overrightarrow{M_1} = \frac{\vec{R}.(\vec{R}.\overrightarrow{M_O})}{(\vec{R})^2}$

$\overrightarrow{M_1} = \frac{(p\sqrt{2}i).\{(p\sqrt{2}i).ap\sqrt{2}(i + j - k)\}}{2(p\sqrt{2})^2}$

$\overrightarrow{M_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2} pi$

$\vec{M}_2 = \vec{M}_O - \vec{M}_1 = \frac{aP\sqrt{2}}{2}(i + j - k) - \frac{a\sqrt{2}}{2} pi$

$\vec{M}_2 = \frac{aP\sqrt{2}}{2}(j - k)$

$\vec{M}_2 = \vec{r}x\vec{R} = (yj + zk)x(P\sqrt{2}i) = \frac{aP\sqrt{2}}{2}(j - k)$

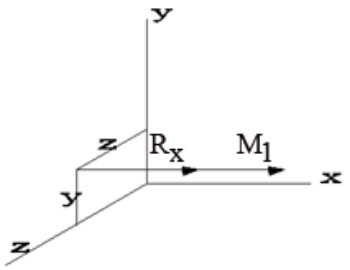
$(P\sqrt{2})(y)(-k) - P(\sqrt{2})zj = \frac{aP\sqrt{2}}{2}(j - k)$

$P\sqrt{2}(z) = \frac{aP\sqrt{2}}{2} \qquad z = \frac{a}{2}$

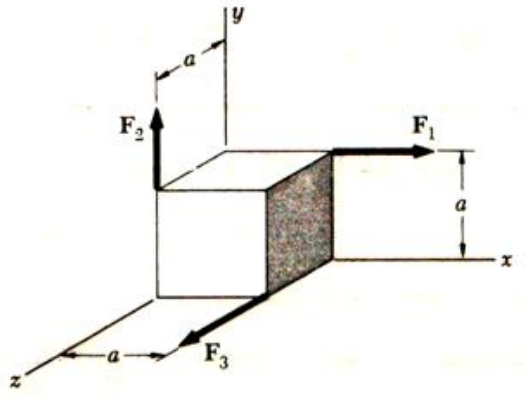
$-P\sqrt{2}(y) = \frac{aP\sqrt{2}}{2}(-1) \qquad y = \frac{a}{2}$

$z = y = \frac{a}{2}$

پای پیچ $= \frac{M_1}{R} = \frac{a\sqrt{2}P}{2P\sqrt{2}} = \frac{1}{2}a$



3-102 سه نیرو بر مکعبی به ضلع a وارد می‌شود. معین کنید مقدار و محور دوران معادل این نیروها را هر گاه $F_1 = F_2 = F_3 = P$ باشد.



$F_1 = F_2 = F_3 = P$

$F_1 = +Pj \qquad F_2 = Pi \qquad F_3 = PK$

$\vec{R} = P(i + j + k) \quad \bar{R} = p\sqrt{3}$

$\overrightarrow{M_O} = -Pai - Pak — Pij$

$\overrightarrow{M_O} = -Pa(i + j + k)\ \bar{R} = P\sqrt{3}$

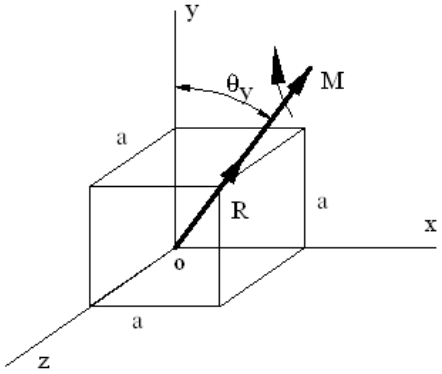
$\overrightarrow{M_O} = -Pa\sqrt{3}$

$\vec{M}_1 = \dfrac{\vec{R}.(\vec{R}.\vec{M}_O)}{(\bar{R})^2}$

$\vec{M}_1 = \dfrac{\{P(i + j + k)\}.\{(P(i + j + k)).-ap(i + j + k)\}}{(p\sqrt{3})^2}$

$\vec{M}_1 = \dfrac{\{P(i + j + k)\}.\{(-ap^2(1 + 1 + 1))\}}{3p^2}$

در مبدا $\vec{M}_1 = -Pa(i + j + k)$



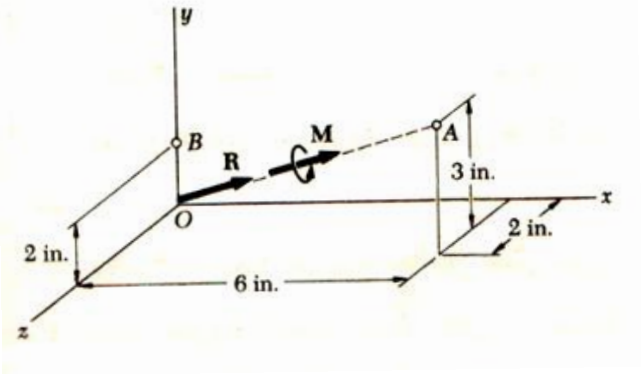
$\vec{M}_1 = -Pa\sqrt{3}$

پای پیچ $= \dfrac{M_1}{R} = \dfrac{-Pa\sqrt{3}}{P\sqrt{3}} = -a$

$Cos\ \theta y = \dfrac{P}{P\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta y = 54.7°$

3-104 می‌دانیم که R=70 lb و M=140 lb است رنج داده شده را به یک سیستم شامل دو نیرو بطوری تبدیل کنید که یکی از نیروها در نقطه B و دیگر در صفحه XZ قرار داشته باشند.



$M = 140\ \ 1b - 1n$

$R = 70\ \ 1b$

$A(6\ ,3\ ,2)$

$\overrightarrow{OA} = 6i + 3j + 2k$

$\lambda = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overline{OA}} = \dfrac{6i + 3j + 2k}{\sqrt{36 + 9 + 4}}$

$\vec{R} = \dfrac{70}{7} = (6i + 3j + 2k) = 60i + 30j + 20k$

$\overrightarrow{F_B} = F_X i + F_y j + F_z k$

$\overrightarrow{M_O} = \dfrac{140}{7}(6i + 3j + 2k) = 120i + 60j + 40k$

(xz) $\vec{Q} = Q_x i + Q_z k$

$$\begin{cases} i & \longrightarrow Q_x + F_X = 60 \\ j & \longrightarrow F_y = 30 \\ k & \longrightarrow (Q_Z) + Q_x(z) = 20 \end{cases}$$

$M_O = (2j)xF_B = 2jx(F_X i + F_y j + F_z k)$

$-2F_x k + 2F_Z i = 120i + 60j + 40k$

$2F_Z = 120 \qquad F_Z = 60$

$-2F_X = 40 \qquad F_X = -20$

$Q_X = 60 - F_X = 80$

$Q_Z = 20 - F_Z = 20 - 60$

$Q_Z = -40$

$F_B = F_X i + F_y j + F_z k$

$[F_B = -20i + 30j + 60k] \quad Ans.$

$F_{xz} = Qxi + Qzk$

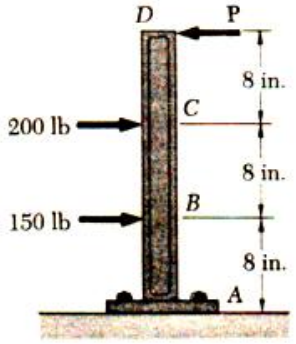
$[F_{xy} = 80i - 40k] \quad Ans.$

$Q_Z(x) + Q_x(z) = 60$

$-40(x) + 80(z) = 60$

$z = 0 \qquad x = -1.5$

3-110 سه نیروی افقی بر بازوی ماشینی مطابق شکل وارد می‌شود. معین کنید برآیند نیروها و نقطه‌ای که خط اثر برآیند محور AD را قطع می‌نند. هر گاه مقدار نیروی P برابر (a) P=50 lb، (b) P=500 lb و (c) P=350 lb باشد.



a) $P = 50$ 1b

b) $P = 500$ 1b

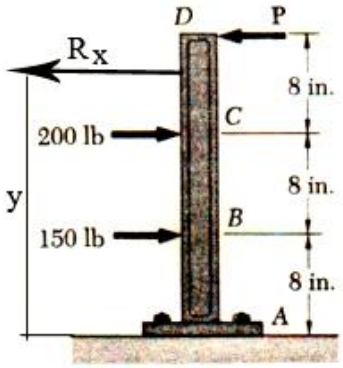
c) $P = 350$ 1b

$R_X = \sum F_X = -P + 200 + 150$

$R_X = 350 - P$

$\curvearrowleft^{+} \sum M_A = 24\,P - 4400$

$-(R_X)(y) = 24\,P - 4400$



$$y = \frac{24\,P - 4400}{-(350 - P)}$$

a) $P = 50$ 1b $\qquad R_X = 300$ 1b

$-300y = 24(50) - 4400$

$y = 10.67"$ $\qquad A$بالای

c) $P = 500$ 1b

d) $R = 350 - 500 = -150$ 1b

$+150y = +24(500) - 4400$

$y = 50.67$ 1n $\qquad A$بالای

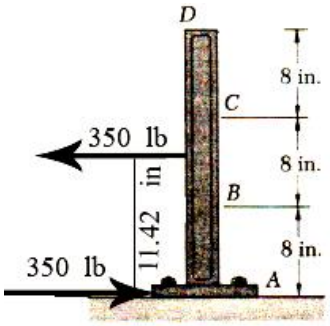
e) $P = 350$ 1b

$R_X = 350 - 350 = 0$

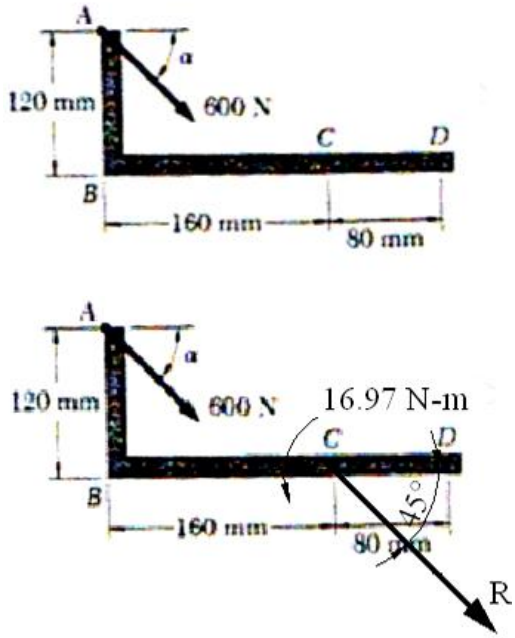
$M_A = 24(350) - 4400 = 4000$ 1b − 1n

$d = 11.42"$ $\qquad A$بالای

سیستم تبدیل به زوج نیرو می شود



3-112 می‌دانیم که $\alpha = ۴۵^\circ$ است، نیروی ۶۰۰-N را با (a) یک سیستم کوپل- نیروی معادل وارد بر نقطه C (b) با یک سیستم متشکل از دو نیروی موازی وارد بر نقطه B و C تبدیل نمائید.



$F_X = 600\ \text{Cos}\ 45 = 424.3\ \text{N}$

$F_y = 600 \sin 45 = 424.3\ \text{N}$

$M_c = -F \times (0.12) + F_y(0.16)$

a) $\curvearrowleft^+ M_c = -424.3(0.12) + 424.3(0.16)$

$M_c = 16.97\ \curvearrowleft^+$

$+424.3 + F_c\ \text{Cos}\alpha + F_B\ \text{Cos}\alpha = 0$

$-424.3 = +\ \text{Cos}\alpha(F_B + F_C)$

$-424.3 = \sin\alpha(F_B + F_C)$

$\tan\alpha = +1$

$\alpha = +45°$

b) $\curvearrowleft^+\ M_c = 16.97 + F_B\frac{\sqrt{2}}{2}(0.16)$

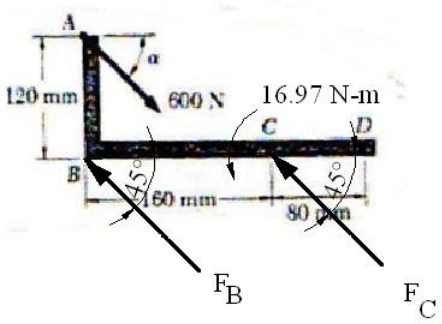
$= 16.97 + 0.113F_B$

$F_B = -\frac{16.97}{0.113}$

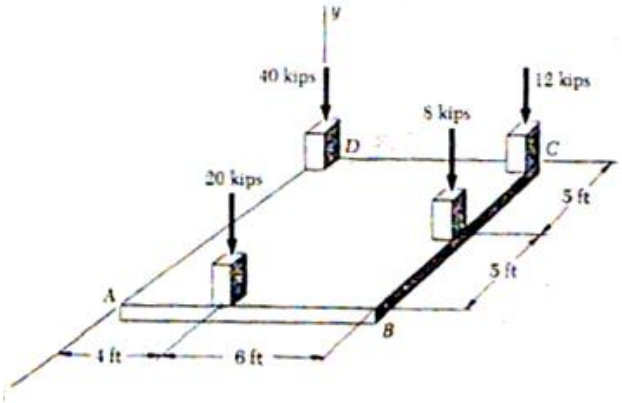
$F_B = -150\ \ 1b$

$F_B + F_c = -\frac{424.3}{\text{Cos}\ 45} = -600$

$F_C = -600 + 150 = -450\ \text{lb}$



3-114 معین کنید مقدار و نقطه اثر برآیند بار اضافی که باید بر صفحه بتونی وارد نمود تا برآیند پنج بار از مرکز صفحه عبور نماید.



$R_y = \sum F_y$

$R_y = 12 + 8 + 40 + 20$

$R_y = 80\ \text{KIPS}$

$\vec{M}_D = (4i + 10k)x(-20j) + (10i)x(-12j)$ +(10i+5k)x(-8j)

$\overrightarrow{M_D} = -80k - 200(-i) - 120k - 80k - 40(-i)$

$\overrightarrow{M_D} = -280k + 240i$

طبق قضیه وارنیون داریم.

$\overrightarrow{M_D} + (xi + zk)x(-R'j) = (5i + 5k)x(R' + 80)(-j)$

$240i - 280k - R'(x)(+k) - R'(z)(-i) = -5(R' + 80)(k) - 5(R' + 80)(-i)$

2Equ.,3Unknown $\begin{cases} -(R' + 80)(5) = -280 - R'(x) \\ (R' + 80)(5) = 240 + R'(z) \end{cases}$

Try &error $\rightarrow z = 10$

$5R' + 400 = 240 + 10R'$

$5R' = 160$

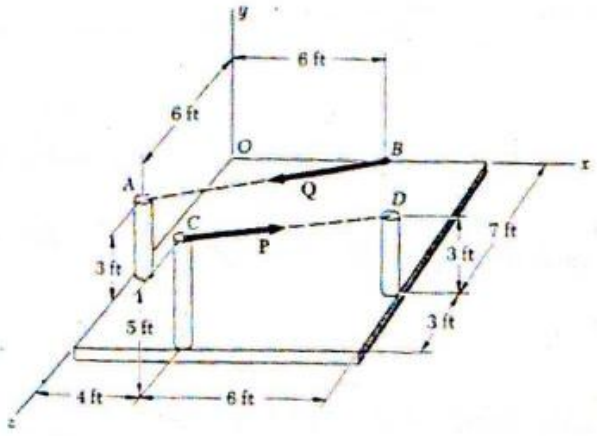
$R' = 32\ \text{Kips}\ \ \downarrow$

$$-(32+80)(5) = -280 - 32x$$
$$-560 = -280 - 32x \qquad 32x = 280$$
$$x = 8.75\text{ft} \qquad (8.75\,,10)$$

$$z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 5R' + 400 = 240$$
$$R' = -32 \qquad R' = 32$$
$$-5(32+80) = -280 + 32x$$
$$+32x = -280 \qquad x = -8.75$$
$$(-8.75\,,0) \qquad \textit{خارج از کادر است}$$

$$x = 10$$
$$-5R' - 400 = -280 - 10R'$$
$$5R' = 400 - 280 = 120$$
$$R' = 24\text{ KIPS} \quad \downarrow$$
$$5(24+80) = 240 + R'(z)$$
$$520 = 240 + 24(z) \qquad \textit{جواب}$$

3-116 نیروی Q برابر با ۲۱۰ lb در امتداد خط اتصال دو نقطه A و B مطابق شکل وارد می‌شود. معین کنید گشت آور Q را (a) حول نقطه D. (b) حول خط DC.



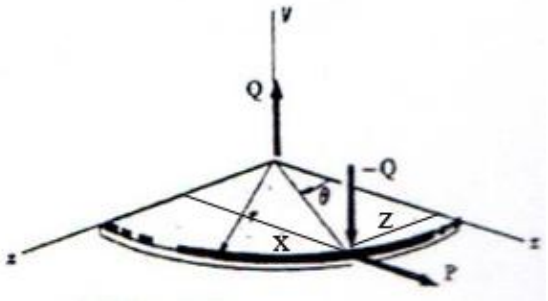
$$Q = 210 \;\; 1b$$
$$M_D = ?$$
$$M_{DC} = ?$$
$$A(0,3,6 \qquad B(6\,,0\,,0)$$
$$C(4\,,5\,,10) \qquad D(10\,,3\,,7)$$
$$\overrightarrow{BA} = -6i + 3j + 6k$$
$$\lambda_{BA} = \frac{\overrightarrow{BA}}{BA} = \frac{-6i+3j+6k}{\sqrt{36+36+9}}$$

$$Q = \frac{210}{9}(-6i + 3j + 6k)$$
$$= -140i + 70j + 140k$$
$$\overrightarrow{DB} = -4i - 3j - 7$$
$$\overrightarrow{M_D} = r_{\overrightarrow{DB}} \times F_Q$$
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -3 & -7 \\ -140 & 70 & 140 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ -4 & -3 \\ -140 & 70 \end{matrix}$$
$$\overrightarrow{M_D} = -420i + 980j - 280k - 420k + 490i + 560j$$
$$\overrightarrow{M_D} = 70i + 1540j - 700k$$
$$\overrightarrow{M_D} = 1693(0.04i + 0.9j - 0.41k)$$

a) $M_{DC} = ?$

$$\overrightarrow{DC} = -6i + 2j + 3k$$
$$\vec{\lambda}_{DC} = \frac{-6i+2j+3k}{\sqrt{36-4+9}}$$
$$\vec{\lambda}_{DC} = \frac{-6i+2j+3k}{7}$$
$$\bar{M}_{DC} = \vec{\lambda}_{DC}.(\vec{r} \times \vec{F})$$
$$\bar{M}_{DC} = \vec{\lambda}_{DC}.(\overrightarrow{M_D})$$
$$\bar{M}_{DC} = \left(\frac{-6i+2j+3k}{7}\right).(70i + 1540j - 700k)$$
$$\bar{M}_{DC} = \frac{70}{7}(-6) + \frac{1540}{7}(2) - \frac{700}{7}(3)$$
$$\bar{M}_{DC} = -60 + 440 - 300$$
$$= 80 \;\; 1b - ft$$

3-118 سه نیرو بر صفحه‌ای مطابق شکل وارد می‌شود. نیروی افقی P موازی محور x و دو نیروی قائم Q و Q– تشکیل کوپلی به گشت آور M=Qr می‌دهد. معین کنید (a) رنچ معادل سیستم وارد بر صفحه را. (b) نقطه تقاطع محور رنج را با صفحه YZ وقتی θ تغییر می‌کند.



$x = r\,Cos\theta$

$z = r\,sin\theta$

$R_y = 0$ $\qquad R_x = Pi$

$R_Z = 0$

$M_O = (Pz)j + Px(-k) + Q(z)i$

$M_O = Prsin\,\theta j + Qrsin\,\theta i - QrCos\theta k$

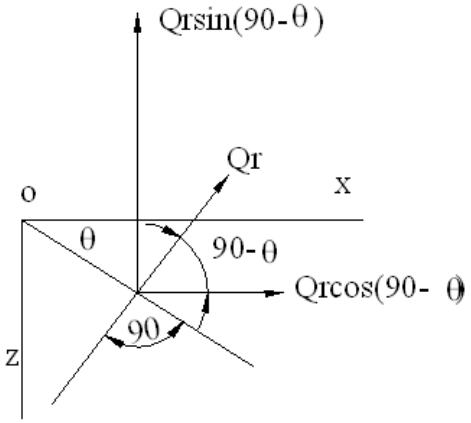
$\overrightarrow{M_1} = \dfrac{\vec{R}.(\vec{R}.\vec{M}_O)}{(\vec{R})^2}$

$$\overrightarrow{M_1} = \frac{(pi).\{(pi).(Prsin\,\theta j + Qrsin\,\theta i - QrCos\theta k)\}}{(p)^2}$$

$\overrightarrow{M_1} = Qrsin\theta i$

$\vec{M}_2 = \vec{M}_O - \vec{M}_1$

$= Prsin\,\theta j + Qrsin\,\theta i - QrCos\theta k - Qrsin\theta i$



$\vec{M}_2 = Prsin\,\theta j - QrCos\theta k$

$\vec{M}_2 = (yj + zk)x\vec{R}$

$P(z)j - P(y)k = M_2$

$= Prsin\,\theta j - QrCos\theta k$

$P(z) = Prsin\,\theta$

$z = r\,sin\,\theta$

$-P(y) = -QrCos\theta$

$y = \dfrac{Q}{P}rCos\theta$

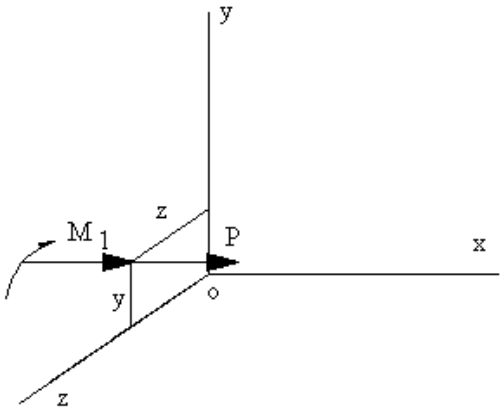
$M_1 = Qrsin\theta$

$R = P$

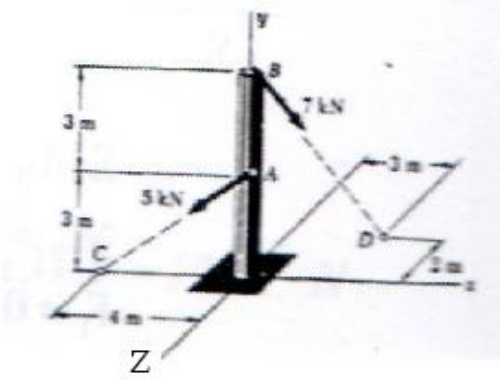
پای پیچ $= \dfrac{M_1}{R} = \dfrac{Q}{P}sin\theta$

b) $r^2 = z^2 + y^2$

$r^2 = z^2 + (\dfrac{Q}{P}rcos\theta)^2$



3-120 دو نیرو بر دیرکی مطابق شکل وارد می‌شود. معین کنید مؤلفه‌های نیرو و کوپل معادل وارد بر نقطـه o معـادل دو نیـروی فوق را.



$O(0\,,0\,,0)$ $\qquad B(0\,,6\,,0)$

$D(3\,,0\,,-2)$ $\qquad A(0\,,3\,,0)$

$C(4\,,0\,,0)$

$\overrightarrow{BD} = 3i - 6j - 2k$

$\vec{\lambda}_{BD} = \dfrac{3i - 6j - 2k}{\sqrt{9+36+4}} = \dfrac{3i - 6j - 2k}{7}$

$\vec{F}_{BD} = 3i - 6j - 2k$

$\overrightarrow{AC} = 4i - 3j$

$\vec{\lambda}_{AC} = \dfrac{4i - 3j}{\sqrt{16+9}}$

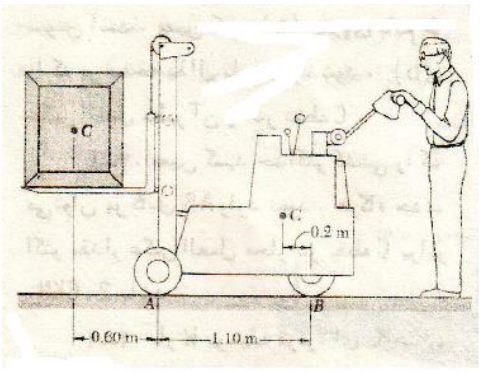
$\vec{F}_{AC} = 4i - 3j$

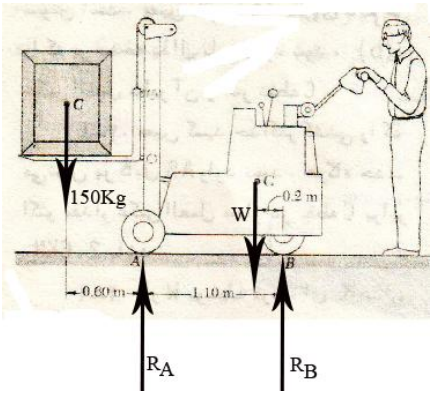
$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$
$$\vec{M}_1 = \overrightarrow{OB} \times \vec{F}_B = 6j \times (3i - 6j - 2k)$$
$$\vec{M}_1 = 18(-k) - 12(i)$$
$$\vec{M}_2 = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}_A = 3j \times (4i - 3j)$$
$$\vec{M}_2 = 12(-k) = -12k$$
$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = -12i - 30k$$
$$\vec{R} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BD} = 4i - 3j + 3i - 6j - 2k$$

$$\vec{R} = 7i - 9j - 2k$$

فصل ۴

4-2ماشین بالابر ۶۰۰ kg بـرای نگاهـداری صـندوق C بـه وزن ۱۵۰ kg در وضعی مطابق شکل بکار برده می‌شـود. معـین کنیـد عکس‌العمل‌ها را (a) در هر یک از دو چرخ A (یک چـرخ در هـر طرف ماشین) (b)در یک چرخ محرک B





$W_G = 600 \ \ kg$

$\sum MA = o \ \ \curvearrowleft^{+}$

$-150 \ (0.6) - R_B \ (1.10) + W(1.10 - 0.2) = 0$

$-150(0.6) - R_B \ (1.10) + 600 \ (0.9) = 0$

$1.1 \ R_B = 450 \qquad R_B = 409.1 \ kg$

$R_B = \dfrac{409.1 \times 9.81}{1000} = 4.01 \ KN \uparrow$

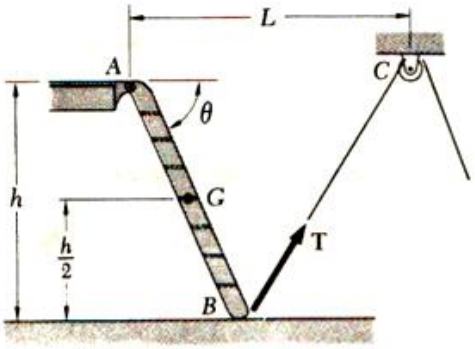
$\uparrow \ \sum Fy = 0 \qquad -150 + R_A + R_B - 600 = 0$

$R_A = 150 - 409.1 + 600$

$R_A = 340.9 \ kg$

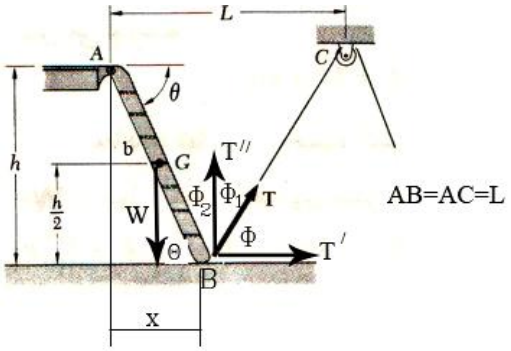
$R_A = \dfrac{340.9 \times 9.81}{1000} = 3.34 \ KN \uparrow$

4-4 نردبان AB بطور L و وزن W را می‌تـوان بواسـطه کابـل BC بلند کرد. معین کنید کشش لازم برای بلند کـردن نقطـه B درست در لحظه بلند شدن از زمین (a) بر حسـب W و θ (b) هر گاه h=8ft وL=10ft وW=35 lbباشد.



$AB = L \qquad W$

$h = 8 \ ft \qquad L = 10 \ \ ft \qquad W = 35 \ \ lb$



در لحظه ای که از مقداری از زمین فاصله دارد

$2\phi + \theta = 180$

$\phi = 90 - \dfrac{\theta}{2}$

$\phi_1 + \phi_2 = \phi$

$\theta + \phi_2 = 90$

$\phi_1 + 9\phi - \theta = 9\phi - \dfrac{\theta}{2}$

$\phi_1 = \dfrac{\theta}{2}$

$T \qquad \qquad \dfrac{\theta}{2} \qquad\qquad T' = T \ Sin\dfrac{\theta}{2}$

$\sum MA = o \ \ \curvearrowleft^{+} \qquad\qquad b = \dfrac{x}{2}$

$T''(x) + T'h - w \ (\dfrac{X}{2}) = 0$

$$Tan\theta = \frac{h}{x}$$

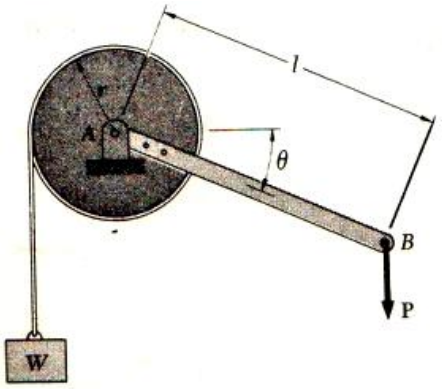
$$T\ Cos\frac{\theta}{2}\ (\frac{h}{\tan\theta}) + T\ Sin\frac{\theta}{2})\ (h) = \frac{Wh}{2\tan\theta}$$

$$T\ (\frac{Cos\theta\ Cos\frac{\theta}{2} + Sin\frac{\theta}{2}Sin\theta}{Sin\theta}) = \frac{W\ Cos(\theta)}{2Sin\theta}$$

$$T = \frac{WCos\theta}{2Cos\ (\theta - \frac{\theta}{2})} = \frac{WCos\theta}{2Cos\frac{\theta}{2}}$$

$$T = \frac{35\ Cos\ 53.13}{2\ Cos\ \frac{53.13}{2}} = 11.74\ lb\ \Downarrow$$

4-6 معین کنید مقدار زاویه θ را برای وقتی که چرخ بالابر در وضع تعادل باشد، هر گاه W=125 lb و P=50 lb و r=3 in و L=15 in باشد



$$\sum M_A = 0$$

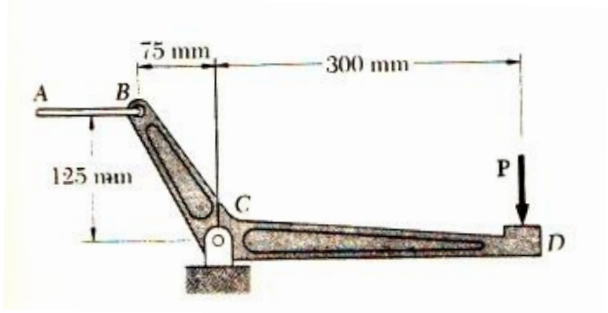
$$Wr = P(L)\cos\theta$$

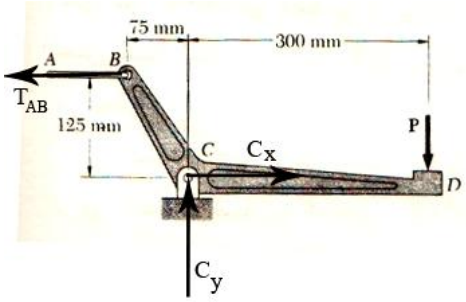
$$\cos\theta = \frac{Wr}{PL}$$

$$\cos\theta = \frac{125(3)}{50(15)} = 0.5$$

$$\theta = \pm 60^\circ$$

4-8 معین کنید حداکثر کششی را که می‌توان بر کابل AB وارد نمود. هرگاه حداکثر مقدار عکس‌العمل مجاز در نقطه C برابر ۲.۶KN باشد.





حداکثر نیروی در C $= 2.6\ KN$

$$T_{AB}(0.125) = P\ (0.3)$$

$$\sum M_C = o\ \curvearrowleft^{+}$$

$$C_y = P$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T_{AB} = C_x$$

$$\sum F_x = 0$$

$$C = \sqrt{cx^2 + cy^2}$$

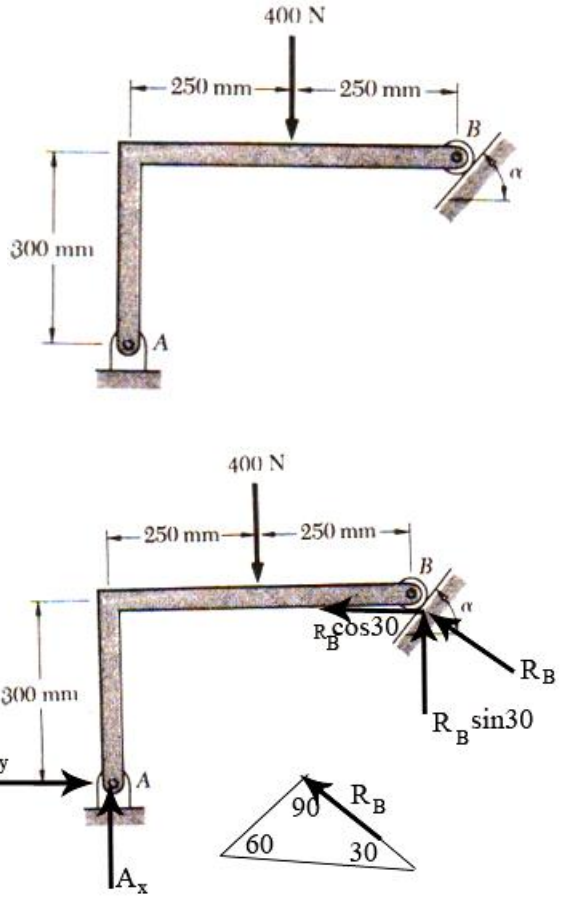
$$2.6 = \sqrt{T_{AB}{}^2 + P^2}$$

$$2.6 = \sqrt{T_{AB}{}^2 + T_{AB}{}^2(\frac{0.125}{0.3})^2}$$

$$2.6 = T_{AB}\ \sqrt{1 + 0.173L} = T_{AB}(1.0833)$$

$$\boxed{T_{AB} = 2.4\ KN}$$

4-10 معین کنید عکس‌العملهای نقاط A وB را وقتی $\alpha = ۶۰^\circ$ است



$\alpha = 60^\circ$

$\sum M_A = o \quad \curvearrowleft^+$

$(400)(0.25) - R_B Sin30(0.5) - R_B \cos 30(0.3) = 0$

$400\ \ (0.25) = R_B(0.25) + 0.26\ \ R_B$

$R_B = 196\ \ N$

$\rightarrow \sum Fx = 0 \qquad Ax - R_B\ Cos30 = 0$

$Ax = 196\ \ Cos30 = 169.74\ \ N \rightarrow$

$\uparrow \sum Fy = 0 \qquad Ay - 400 + R_B\ Sin30 = 0$

$$Ay = 400 - \frac{196}{2} = 400 - 98$$

$Ay = 302\ \ N\ \uparrow$

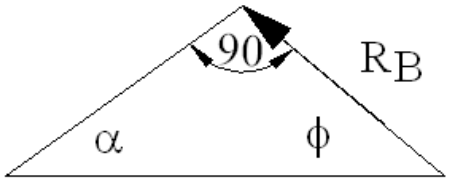
$$\tan\theta = \frac{302}{169.74} \qquad \theta = 60.7^\circ$$

$$F_A = \frac{169.69}{Cos\ 60.7}$$

$F_A = 346.8\ \ N$

4-12 معین کنید مقدار α را برای حالتی که عکس العمل در نقطه B حداقل باشد. عکس‌العمل‌های نظیر را برای A و B محاسبه کنید.

از مسئله قبل 4-10 داریم



$100 = R_B\ (0.5Cos\phi + 0.3Cos\phi)$

$$R_B = \frac{100}{0.5\ Sin\phi + 0.3\ Cos\phi}$$

$$R'_B = \frac{-100\ \ (0.5\ Cos\phi - 0.3\ Sin\phi)}{K^2}$$

$R'_B = 0$

$0.5\ Cos\phi = 0.3\ Sin\phi \qquad \tan\phi = \frac{0.5}{0.3}$

$\phi = 59^\circ$

$\alpha =$ ۱$^\circ$

$100 = R_B\ (0.5\ Sin59 + 0.3\ Cos59)$

$R_B = 172.1\ \ N$

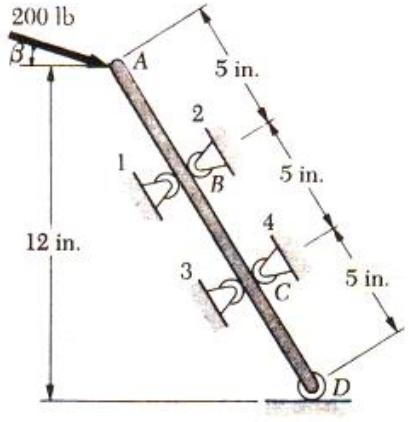
$\sum Fx = 0 \qquad Ax = R_B Cos\ 59$

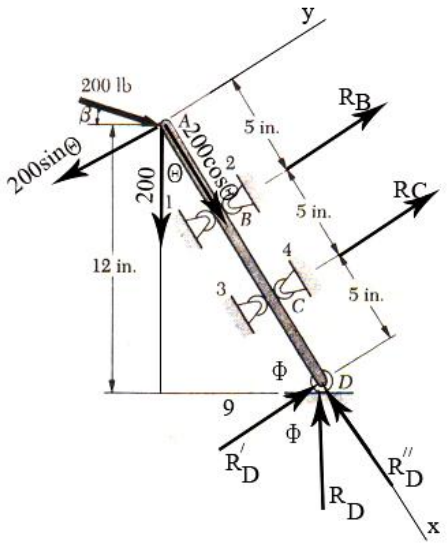
$Ax = 88.64\ \ N$

$Ay - 400 + RB\ Sin59 = 0$

$Ay = 400 - 147.5 = 252.5\ \ N$

4-14 بر میله نازکی که بوسیله کره‌های غلطان در نقاط B و C و D نگاهداری می‌شود، نیروی دیگری برابر با ۲۰۰ پوند در نقطه A به آن وارد می‌آورند. وقتی نیروی ۲۰۰ پوند بطور قائم و به طرف پایین بر آن وارد می‌شود یعنی وقتی $\beta = 90$ باشد ، عکس‌العملهای نقاط B، C و D را حساب کنید.





$$Cos\phi = \frac{R'_D}{R_D}$$

$$R'_D = R_D\ Cos\phi \qquad R''_D = R_D Sin\phi$$

$$Cos\theta = \frac{12}{15} \qquad \theta = 36.86$$

$$\sum Fx = 0$$

$$-R''_D + 200\ Cos\theta = 0$$

$$R''_D = 200 \times \frac{12}{15} = 160\ lb$$

$$R'_D = -200\ Cos\phi = 200 \times \frac{9}{15} = 120$$

$$\curvearrowleft^{+} \quad \sum MA = o$$

$$\begin{cases} +R'_D\ (15) + R_C\ (10) + R_B(5) = 0 \\ 10\ R_C + 5R_B = -1800\ lb \end{cases}$$

$$\sum Fy = 0 \qquad 200\ Sin\theta = R'_D + R_B + R_C$$

$$10\ RC + 5RB = -1800 \Downarrow$$

$$200 \times {}^{9}\!/_{15} = R'_D + R_B + R_C$$

$$120 = 120 + R_C + R_B$$

$$R_C = R_B$$

$$-10R_B + 5R_B = -1200\ lb \qquad R_B = 360$$

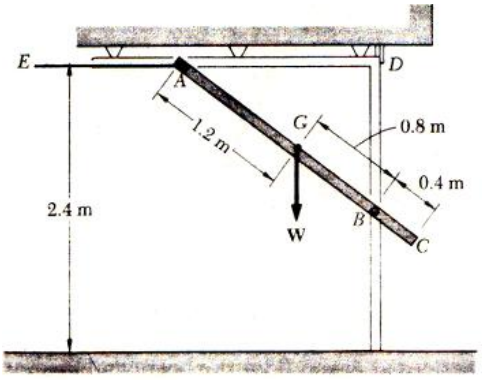
$$\theta = 36.8^{\circ}$$

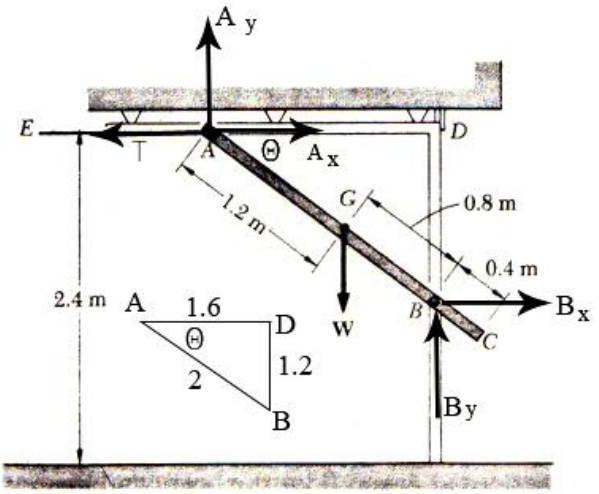
$$R_C = -360 \qquad R_C = 360$$

$$R_D = 200 \uparrow$$

بصورت ضربدری برداریم فرقی نخواهد کرد

4-16درب بالا رونده گاراژی ۹۰kg از صفحه مستطیل شکل AC به ارتفاع 2.4 m بوسیله کابل AE متصل به وسط لبه بالایی درب و دو دسته کره غلطان بدون اصطکاک A و B نگاهداری می‌شود. هر دسته شامل دو گروه که بر یک طرف درب قرار گرفته‌اند می‌باشد. غلطان‌های A آزاد برای حرکت در امتداد ناودانک‌های افقی بوده در حالیکه غلطانک‌های B در ناودانک قائم در حرکت می‌باشند. هر گاه درب در وضعی مطابق شکل باشد و BD=1.2متر، معین کنید (a) کشش در کابل AE و (b) عکس‌العمل هر یک از دوکره غلطان را.

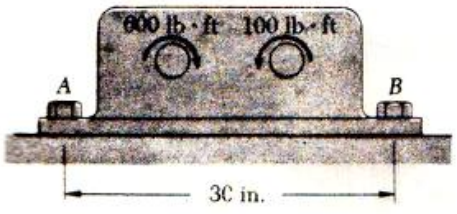


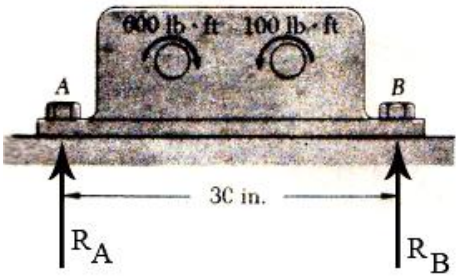


چون کره غلطان بدون اصطکاک است، پس، $A_x=0, B_y=0$

$$BD = 1.2^m$$
$$W = 90\ kg$$
$$\sum M_A = o \ \curvearrowleft^+$$
$$By\ (1.4) + Bx\ (1.2) - w\ (1.2)\ Cos\theta = 0$$
$$1.6By + 1.2Bx = 90 \times 1.2 \times 0.8 = 86.4$$
$$\sum Fy = 0$$
$$Ay + By = 90 \quad A_y = 90x9.8 = 883\ \ N$$
$$\sum Fx = 0 \qquad T = Ax + Bx = B_X$$
$$1.6By + 1.2Bx = 90 \times 1.2 \times 0.8 = 86.4$$
$$1.2Bx = 90 \times 1.2 \times 0.8 = 86.4$$
$$B_X = 72\ Kg = 72x9.8 = 706\ \ N$$
$$T = B_X = 706\ \ N$$

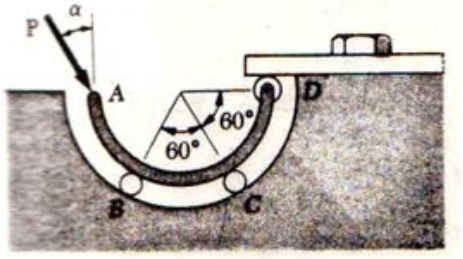
4-18 بر دو محور خارجی جعبه چرخ دنده‌ای پیچشی مطابق شکل وارد می‌شود. معین کنید مؤلفه‌های قائم نیروهایی که باید به دو مهره A و B وارد شود تا جعبه دنده در حال تعادل باشد

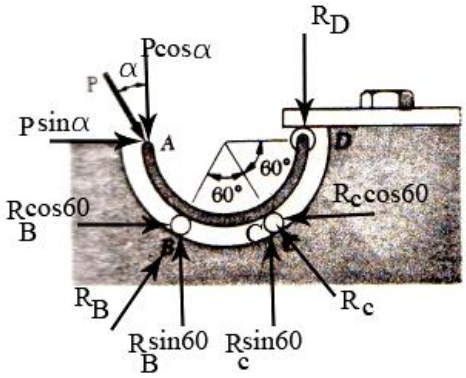




$$\curvearrowleft^+ \quad \sum MA = o$$
$$R_B\ (\frac{30}{12}) + 100 - 600 = 0$$
$$R_B = 200\ \uparrow$$
$$\sum Fx = 0 \qquad T = Ax + Bx$$
$$R_A = -RB = -200$$
$$R_A = 200\ \downarrow$$

4-20 معین کنید عکس‌العمل‌های نقاط B و C و D را (a) هرگاه $\alpha = ۰$ و (b) $\alpha = ۳۰^\circ$ باشد.





$\alpha = 0 \quad , \alpha = 30$

RB, RC, RD ?

a) $\curvearrowleft^{+} \quad \sum MA = o$

$$-2r\,R_D + R_C\ Sin60\ (r + r\,Cos60) - R\,Cos\ 60\ r\,Sin60$$

$$+ R_B\ Sin60\ (r - r\,Cos60) + R_B Cos60\ Sin60\ (r) = 0$$

$$-2R_D + R_C Sin60 + R_B Sin60 = 0$$

$$\sum Fy = 0$$

$$-p\ Cos\alpha + RB\ Sin60 + RC\ Sin60 - RD = 0$$

$$\sum Fx = 0$$

$$-p\ Sin\alpha + R_B\ Cos60 - R_C\ Cos60 = 0$$

$$-pCos\alpha + 2R_D - R_D = 0$$

$$\alpha = 0$$

$$R_D = pCos\alpha = p$$

$$R_B\ Cos60 - R_C\ Cos60 = 0 \qquad R_B = R_C$$

$$2P = 2R_C\ Sin60 \qquad R_C = 2P/\sqrt{3}$$

$$R_B = 2p/\sqrt{3}$$

$$R_C = 2P/\sqrt{3} \qquad R_D = P \downarrow$$

$$R_B = 2p/\sqrt{3}$$

$\alpha = 30^{\circ}$

b)

$$R_D = P\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{P}{2} + RB\ Cos60 - RC\ Cos60 = 0$$

$$-p\sqrt{3} + RCSin60 + RBSin60 = 0$$

$$\begin{cases} p + R_B - R_C = 0 \\ -2p\ \sqrt{3} + \sqrt{3}R_B + \sqrt{3}R_C = 0 \end{cases}$$

$$p\sqrt{3} + R_B\sqrt{3} - R_C\sqrt{3} = 0$$

$$-P\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\ R_B = 0$$

$$R_B = \frac{p}{2}$$

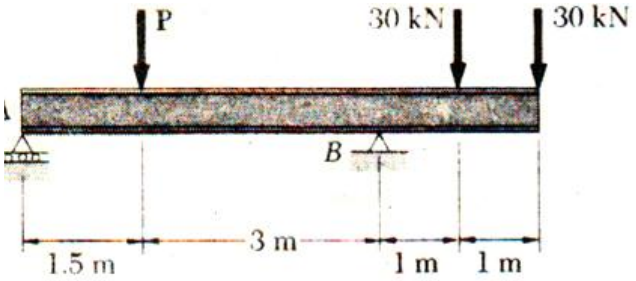
$$R_C = p + \frac{p}{2} = \frac{3p}{2}$$

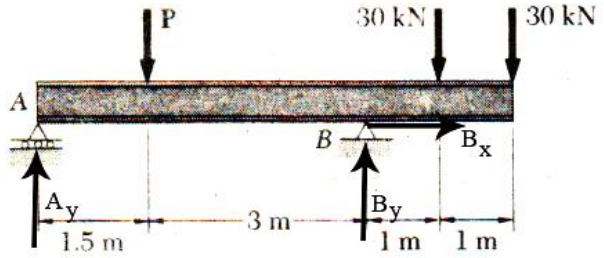
$$2R_D = {}^{3p}\!/_{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + {}^{p}\!/_{2}\ \ {}^{\sqrt{3}}\!/_{2}$$

$$2R_D = \frac{3p\sqrt{3} + p\sqrt{3}}{4} = p\sqrt{3}$$

$$R_D = p\sqrt{3}/2 \downarrow$$

4-22 حداکثر مقدار عکس‌العمل مجاز وارد بر هر یک از نقاط اتکاء ۱۵۰ KN بوده و عکس العمل در نقطه A باید بطرف بالا باشد. از وزن میله صرف نظر می‌شود. معین کنید حدود مقادیر P را برای اینکه میله تغییر شکل ندهد.





$RA \geq \uparrow 150\ KN$

$RB \geq 150KN$

$$\sum Fx = 0$$

$$K_{BX} = 0$$

$$\curvearrowleft^{+} \quad \sum MA = o$$

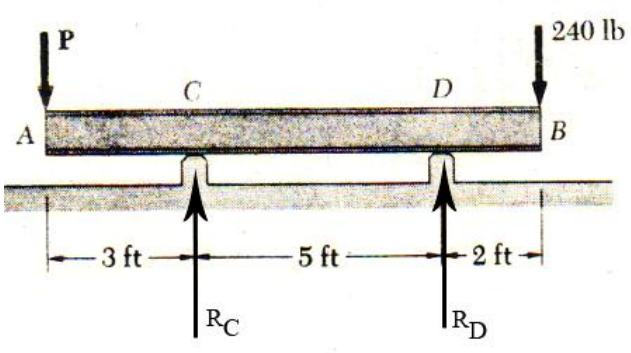
$$+30\ (6.5) + 30\ (5.5) + 1.2P$$

$$+4.5\ R_B = 0$$

$$4.5\ R_B = 360 + 1.5\ P$$

$$R_A + R_B = P + 60$$

$$R_A + \frac{1.5P + 360}{4.5} = 60 + P$$



$$\curvearrowleft^{+} \quad \sum MA = o$$

$$240\ (10) - R_D(8) - R_C\ (3) = 0$$

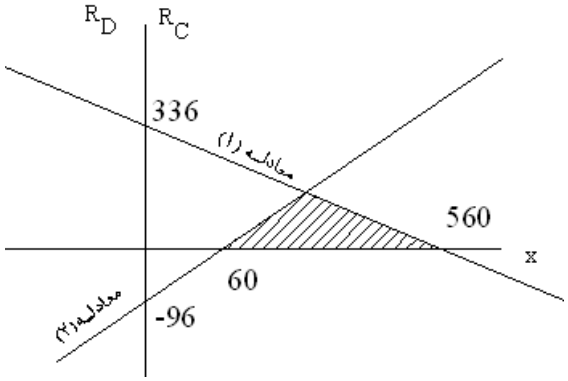
$$8R_D + 3R_C = 2400$$

$$\uparrow \quad \sum Fy = 0 \qquad R_C + R_D = 240 + P$$

$$2400 = 8\ (240 + p - R_C) + 3R_C$$

$$8p - 5R_C = 480$$

$$240 + p = R_D + \frac{8p - 480}{5}$$



$$240 + P = RD + \tfrac{8}{5} P - 96$$

$$\begin{cases} (1) \quad \text{معادله} & 336 = R_D + \tfrac{3}{5}\ P \\ (2)\ \text{م} & 8p - 5R_C = 480 \end{cases}$$

$$60 \le P \le 560$$

(2) معادله $\qquad RA + 80 + \dfrac{1.5}{4.5}\ P = 60 + P$

(1) معادله $\qquad RA + 20 = \tfrac{3}{4.5}\ P$

$$y + 20 = \tfrac{3}{4.5} P$$

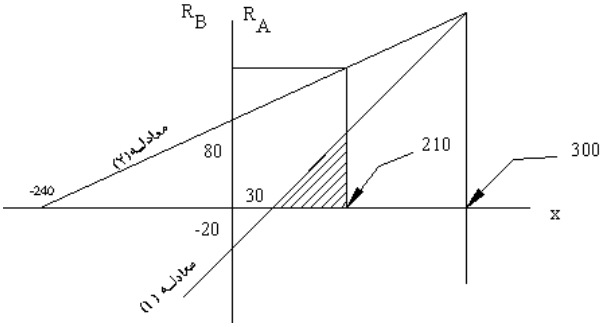
$$4.5y = 360 + 1.5P$$

$$4.5\ (\tfrac{3}{4.5} P - 20) = 360 + 1.5P$$

$$3p - 90 = 360 + 1.5P$$

$$1.5p = 450$$

$$p = 300$$

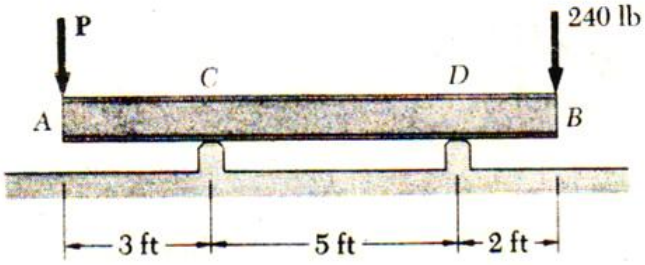


$$R_B = 150 \ \ KN$$

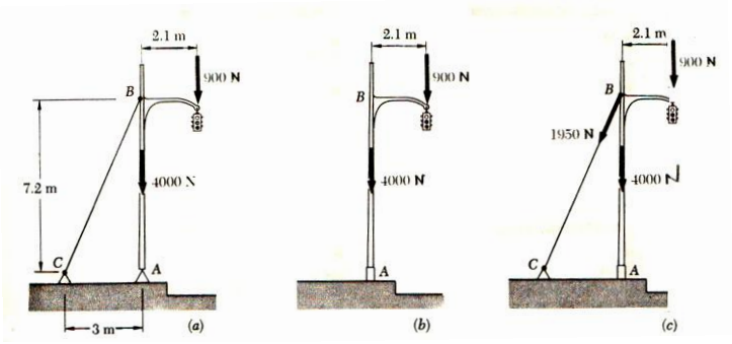
$$4.5\ (150) = 360 + 1.5P \qquad \underline{P = 210}$$

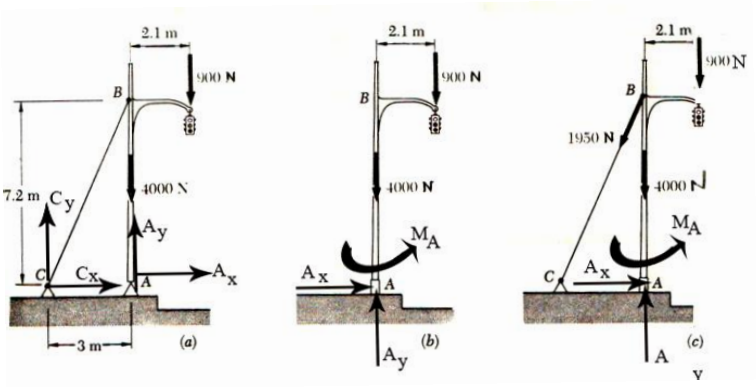
$$30 \le p \le 210 \uparrow \quad \sum Fy = 0$$

4-24 میله AB بطول ۱۰ft مطابق شکل در وضع سکون قرار دارد و اتصالی با دو نقطه C و D ندارد. از وزن میله صرفنظر می‌شود. معین کنید حدود مقادیر P را برای وقتی که میله در حالت تعادل باقی بماند.



پایه چراغ راهنمایی را می‌توان به سه طریق مطابق شـکل 4-26 معلـوم و BC کشش وارد به کابل Cنگاهداری نمود. در قسمت ۱۹۵۰ می‌باشد. معین کنید عکس‌العمل‌هـا را بـرای هـر Nبرابر حالت.





$$\sum MA = o \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$(7.2)\ (C_x) - 900\ \ (2.1) = 0$$

$$C_x = 262.5\ \ N$$

a) $\sum MA = o \quad \curvearrowleft^{+}$

$$3\ (C_y) + 900\ \ (2.1) = 0$$

$$C_y = -630\ \ N$$

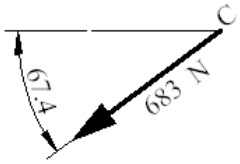
$$\sum Fy = 0 \qquad -A_y + 400 + 630 + 900 = 0$$

$$A_y = 5530\ \ N$$

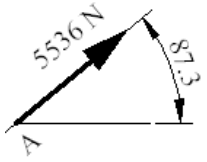
$$\sum F_x = 0 \qquad A_x + C_x = 0$$

$$A_x = +\ C_x$$

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{630}{262.5} \\ \theta = 67.4 \\ R_c = \dfrac{262.5}{Cos 67.4} = 683\ \ N \end{cases}$$



$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{5530}{262.5} \\ \theta = 87.3^{\circ} \\ R_A = \dfrac{262.5}{Cos\ 87.3} = 5536\ \ N \end{cases}$$



b)

$$\sum Fy = 0$$

$$\begin{cases} A_y = 4900\ \ N\ \uparrow \\ M_A = 1890\ N - m \end{cases}$$

$$\sum MA = o \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$(900)\ \ (2.1) - M_A = 0$$

$$M_A = 1890$$

C)

$$C_x = 1950\ \ Cos\theta$$

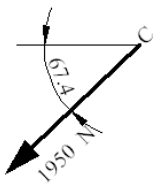
$$C_x = 1950 \times {}^{3}\!/_{7.8}$$

$$C_x = 750\ \ N$$

$$C_y = 1950\ \ Sin\theta = 1950 \times \frac{7.2}{7.8}$$

$$C_y = 1800$$

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{750}{1800} \\ \theta = 67.4 \end{cases}$$



$$\sum Fy = 0 \qquad -A_y + 4000 + 400 + 1800$$

$$A_y = 6700\ \uparrow\ \ N$$

$$\sum F_x = 0 \qquad C_x = A_x$$

$$A_x = 750$$

$$\tan\theta = \frac{6700}{750} \qquad R_A = \frac{750}{Cos\ 83.6}$$

$$\sum MA = 0$$

$$R_A = 6742 \quad N$$

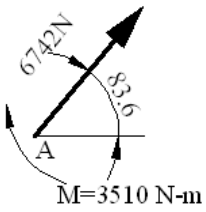
$$R_c = \frac{262.5}{Cos67.4} = 683 \ N$$

$$MA = -1950 \times \tfrac{3}{7.8}(7.2) + 900 \quad (2.1)$$

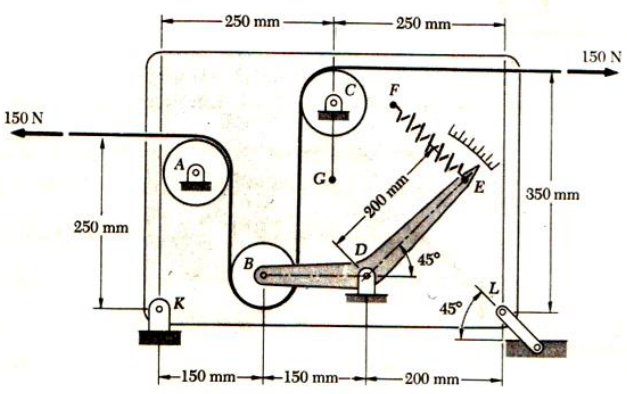
$$-M_A - 5400 + 1890 = -3510 \ N-m$$

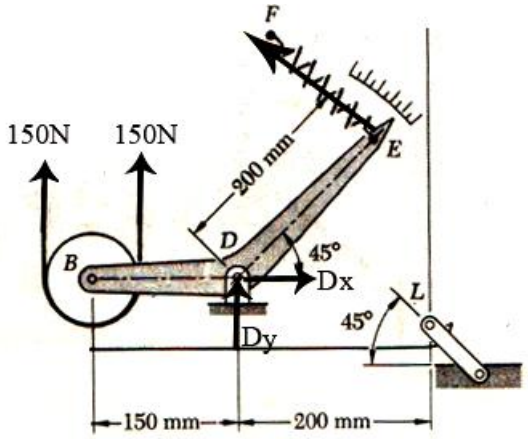
$$MA = -3510 \quad N-M$$

$$\theta = 83.6^\circ$$



4-27 مکانیسم نشان داده شده طرحی است که برای اندازه‌گیری کشش نوارهای کاغذی ضخیم در کارخانجات بکار می‌رود. نـوار از روی سه قرقره‌ای که آزاد برای چرخیدن حول محورهای A، B و C می‌باشند عبور مـی‌کنـد. یاطاقانهـای A وC در صـفحه قـائم ثابت‌اند. در حالیکه یاطاقان B در انتهای میله زانوئی قـرار گرفتـه که آن نیز حول نقطه D دوران می‌کند و از طـرف دیگـر بـه فنـر EF متصل می‌باشد. وقتی کشش در نوار تغییر نماید، اهرم حـول نقطه D دوران نموده و عقربه E روی خـط کـش مـدرج تغییـر مکان پیدا کرده و آن را می‌خوانند. معین کنید (a) نیروی وارد بر E که بواسطه فنر منتقل می‌شود وقتی کشش در نوار برابـر KN ۱۵۰ و (b) عکس العمل نظیر آن را در نقطه D.





$$(150+150)\ (0.15) - F\ (0.2) = 0$$

$$F = 225 \quad Nt$$

$$\sum F_x = 0$$

$$D_x - F\ Cos45 = 0$$

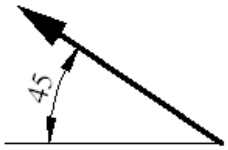
$$D_x = 225\ Cos45^\circ$$

$$D_x = 159.1 \ N$$

$$\sum F_x = 0 \qquad D_y + 300 + E\ Sin45 = 0$$

$$D_y = -300 - 225\ \ Sin45 = -300 - 159.1$$

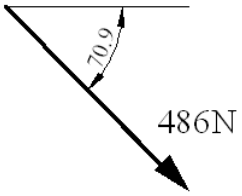
$$D_y = 459.1 \ Nt$$



$$D = \sqrt{Dx^2 + Dy^2}$$

$$D = \sqrt{(159.1)^2 + (459.1)^2}$$

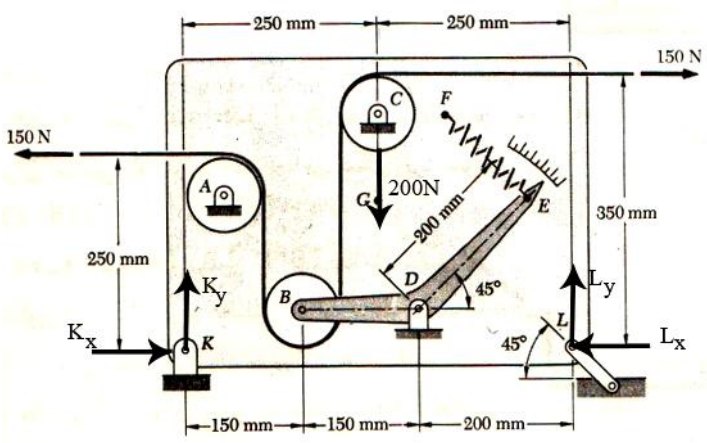
$$D = 486 \quad N$$



$$\tan\theta = \frac{D_y}{D_x} = \frac{459.1}{159.1}$$

$$\theta = 70.9^\circ$$

4-28 در مسئله ۴-۲۷ وزن ماشین برابر ۲۰۰N و مرکز ثقل آن مستقیماً در زیر نقطه C قرار گرفته، معین کنید عکس‌العملهای نقاط L و K را وقتی کشش در نوار ۱۵۰N است.



$$\curvearrowleft^{+} \quad \sum MA = o$$

$$(0.5)\ (k_Y) - 150\ (0.35) - 200\ (0.25) + 150\ (0.25) = 0$$

$$0.5\ k_Y - 52.5 - 50 + 37.5 = 0$$

$$k_Y = 130\ \ N$$

$$\sum F_y = 0 \qquad k_Y + L_y = 200$$

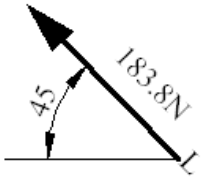
$$k_Y = 200 - 130 = 70\ \ N$$

$$\sum F_x = 0 \qquad K_x - L_x + 150 - 150 = 0$$

$$K_x = +L_x$$

$$K_x = L_x = 150\ \ N$$

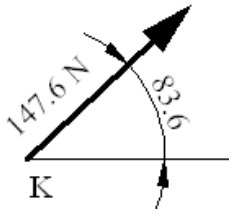
$$L = 130\ \sqrt{2} = 183.8\ N$$



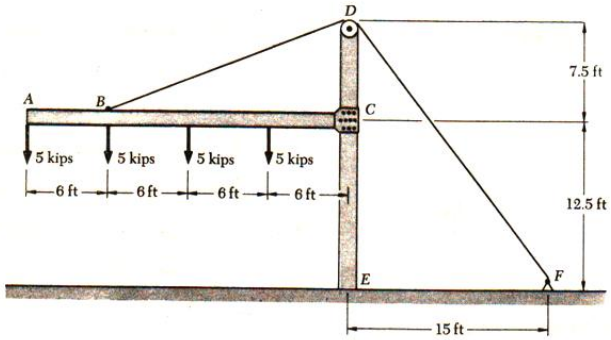
$$\tan\theta = \frac{70}{130} \qquad \theta = 83.6^{\circ}$$

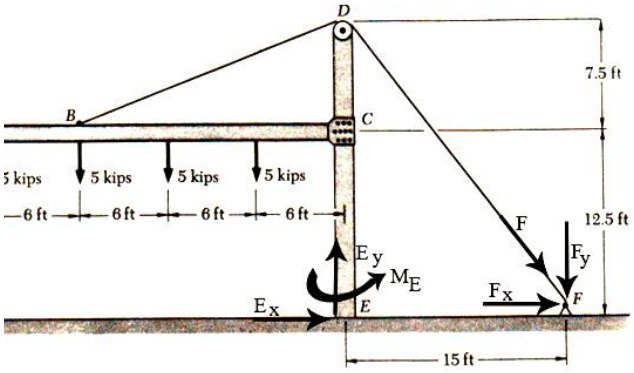
$$K = \frac{130}{Cos 83.6}$$

$$K = 147.6\ \ N$$



4-30 در قابی که قسمتی از سقف ساختمان کوچکی را نگاهداری می‌کند (a) هرگاه کشش در کابل ۳۰ kips باشد، معین کنید عکس‌العمل در نقطه انتهایی ثابت E را. (b) برای چه مقدار کشش کوپل در نقطه E صفر خواهد شد.





$$F_x = 30 \times {}^{15}\!/_{25} = 18$$

$$F_y = 30 \times \frac{20}{25} = 24$$

$$T = 30\ \ kips$$

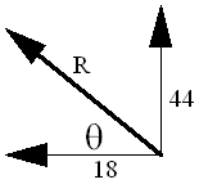
a) $\curvearrowleft^{+} \quad \sum M_A = o$

$$5(24) + 5(18) + 5(2) + 5(4) + M_E - 24(15) = 0$$

$$M_E = 60 \qquad \curvearrowleft^{+} \qquad kips - ft$$

$$\sum F_y = 0 \qquad E_y - F_y - 20 = 0$$

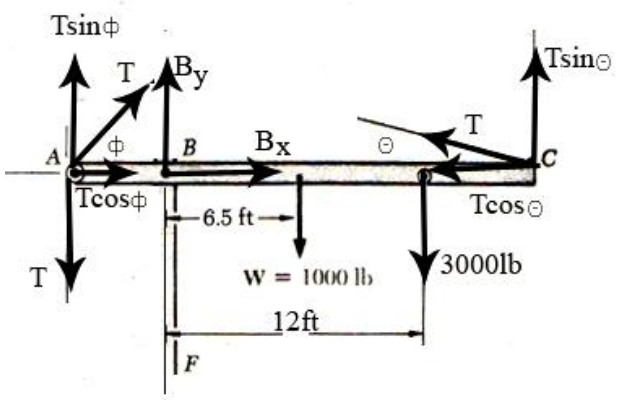
$$E_y = 44 kips \uparrow$$



$$\sum F_x = 0 \qquad E_x + F_x = 0$$

$$Ex = -180 \ \leftarrow$$

$$\tan\theta = {}^{44}\!/_{18} = 2.44 \qquad \theta = 67.8^{\circ}$$



$$\tan\phi = \frac{5}{5} = 1 \qquad \phi = 45^\circ$$

$$\tan\theta = \frac{5}{18} \qquad \theta = 15.5^\circ$$

a) $\sum MB = 0$ ↵+

$$5T - T(5)(Sin\phi) - 1000\ (6.5) - 3000\ (12) + TSin\theta(18) - 0$$

$$5T - 5(T)(0.707) - 6500 - 36000 + T(\frac{5}{\sqrt{399}})(18) = 0$$

$$5T - 3.53T - 42500 + 4.81T = 0$$

$$T = \frac{42500}{6.282} = 6770 \Downarrow$$

$$T = 6.77 \quad kips$$

b) $\sum F_y = 0$

$$By + TSin\phi - T + T\ Sin\theta - 4 = 0$$

$$By = T\ (1 - 0.707 - 0.267) + 4$$

$$By = 6.77\ (0.0254) + 4 = 4.17 \uparrow$$

$$\sum F_x = 0$$

$$TCos\phi + Bx - TCos\theta = 0$$

$$Bx = (0.9635 - 0.707)\ T$$

$$Bx = 6.77\ (0.9635 - 0.707)$$

$$Bx = 1.734\ kips \rightarrow$$

$$R = \frac{18}{Cos\ 67.8} \qquad R = 47.5\ kips$$

b) $E_y = F_x = 0$

$$\sum F_y = 0 \qquad E_y - F_y - 20 = 0$$

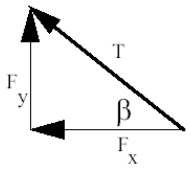
$$F_y = -20 kips$$

$$F_y = 20 kips \uparrow$$

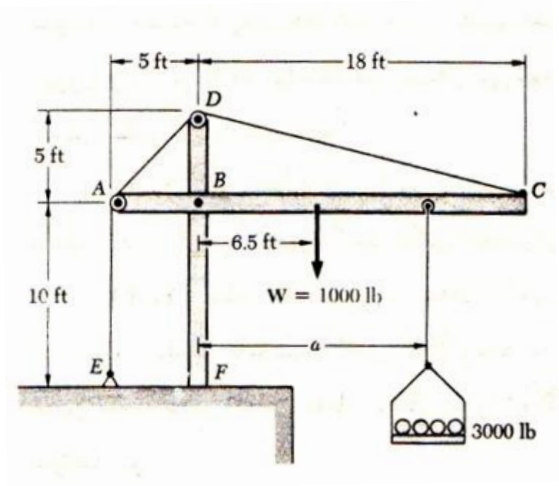
$$Sin\beta = \frac{20}{25} = \frac{F_y}{T} \qquad \beta = 53.2^\circ$$

$$T = F_y \times \frac{25}{20} = 20 \times {}^{25}\!/_{20}$$

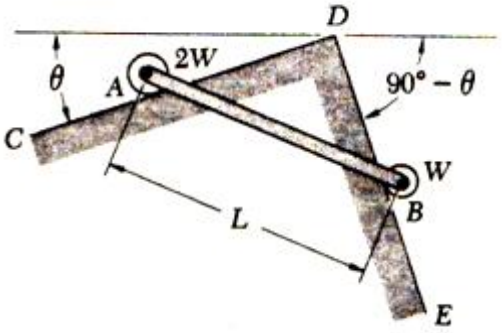
$$T = 25\ kips$$

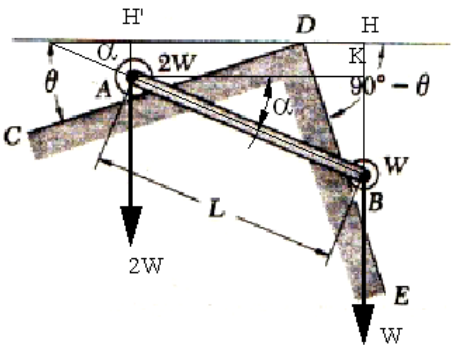


4-32 میله ABC مطابق شکل به وزن ۱۰۰۰ lb بواسطه پین A و D و کابل EADC نگاهداری می‌شود از آنجاییکه کابل از روی قرقره‌های A و D عبور می‌کند، می‌توان فرض نمود که کشش در تمام قسمتهای کابل ثابت است. هرگاه به میله ABC وزنه ۳۰۰۰ lb در فاصله a=12ftفوت از میله قائم آویزان کنند معین کنید (a) کشش در کابل (b) مؤلفه‌های عکس‌العمل افقی و قائم نقطه B را.



4-34 دو چرخ A و B بوزن ۲W و W بوسیله میله‌ای که از وزن آن صرفنظر می شود متصل شده و آزاد روی سطح مطابق شکل می‌چرخند. هر گاه $\theta = ۴۵$ باشد، معین کنید زاویه‌ای که میله با افق تشکیل می‌دهد وقتی سیستم در وضع تعادل است.





$\theta = 45^{\circ}$

$M_A = 2W$

$M_B = W$

$\sum MD = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$

$2w\ AD\ Cos\theta - WBD\ Cos\ (90-\theta) = 0$

$\tan\theta = 2\,{}^{AD}\!/_{DB} = 1$

$BH = DB\ Sin\ (45) \qquad 2AD = DB$

$AH' = AD\ Sin45$

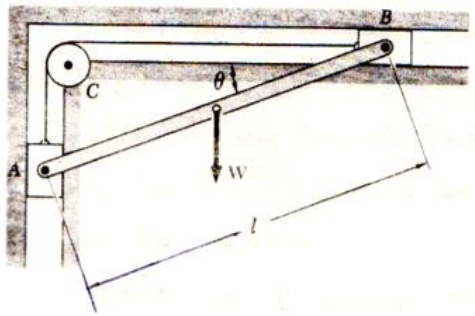
$\frac{BH}{AH'} = \frac{BD}{AD} = 2 \qquad BH = 2AH'$

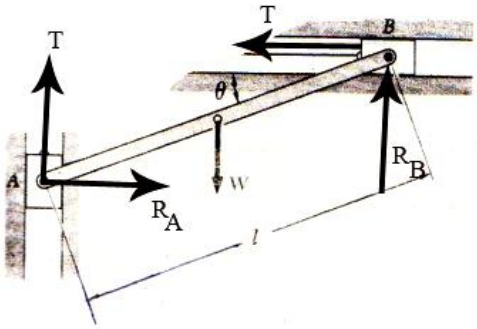
$\tan\alpha = \frac{BK}{AK} = \frac{BH - AH'}{DH + DH'}$

$\tan\alpha = \frac{2AH' - AH'}{\cos 45(DB + AD)} = \frac{AD\ Sin45}{Cos\ 45\ (3AD)}$

$\tan\alpha = ⅓ \qquad \alpha = 18.4^{\circ}$

4-36 میله نازک AB بوزن W از دو طرف به قطعات A و B متصل و می‌توانند آزادانه در ناودانک مطابق شکل حرکت نمایند وزنه‌ها بواسطه طناب قابل کششی که از روی قرقره عبور نموده به یکدیگر وصل شده (a) کشش طناب را بر حسب W و θ بدست آورید (b) مقدار زاویه θ را برای حالتی که کشش در طناب برابر ۲W باشد معین کنید.





$T \sim \theta\ ,\ W$

$\sum M_O = 0 \quad \curvearrowleft +$

$RA\ (½\ Sin\theta) - T\ ½\ Cos\theta$

$+ RB(½)\ Cos\theta + T(½\ Sin\theta) = 0$

$R_A\ Sin\theta - T\ Cos\theta + R_B\ Cos\theta + T\ Sin\theta = 0$

$\sum F_x = 0$

$-T + R_A = 0 \qquad R_A = T$

$\sum F_y = 0$

$T - W + R_B = 0 \qquad R_B = W - T$

$T\ Sin\theta - T\ Cos\theta + (W - T)\ Cos\theta + T\ Sin\theta = 0$

$T\ Sin\theta - T\ Cos\theta + W\ Cos\theta - TCos\theta + T\ Sin\theta = 0$

$$2T\,Sin\theta - T\,Cos\theta + W\,Cos\theta - T\,Cos\theta + T\,Sin\theta = 0$$

$$2T\,Sin\theta - 2T\,Cos\theta = -W\,Cos\theta$$

$$2T\,(\tan\theta - 1) = -w$$

$$T = \frac{W}{2}\ (\frac{1}{1-\tan\theta})$$

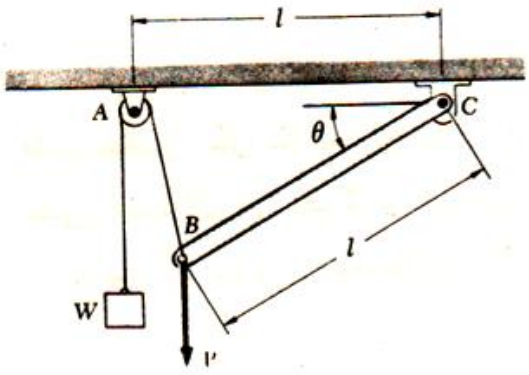
b) $T = 2w$

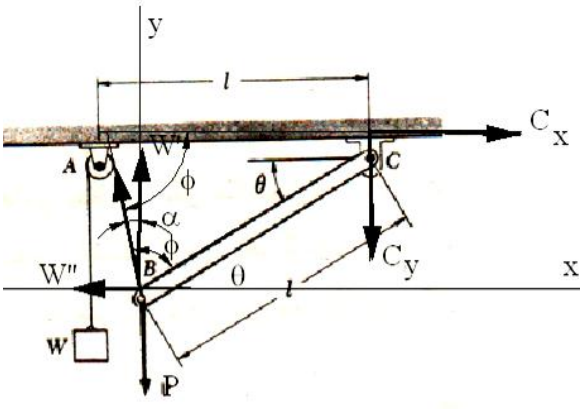
$$4w = w\ \frac{1}{1-\tan\theta}$$

$$1-\tan\theta = \tfrac{1}{4} \qquad \tan\theta = 1-\tfrac{1}{4}$$

$$\tan\theta = \tfrac{3}{4} \qquad \theta = 36.9^\circ$$

4-38 (a) رابطه‌ای برای زاویه θ نظیر حالت تعادل بدست آورده (b) معین کنید زاویه θ نظیر حالت تعادل را هر گاه P=2Wباشد





وزن بازو نا چیز است $W = 0$

$$2\phi + \theta = 180 \qquad \phi = 90 - \theta/2$$

$$\alpha + \phi = 90 \qquad 90 - \theta/2 + \alpha = 90$$

$$\alpha = \theta/2$$

a) $\overset{+}{\circlearrowleft} MC = 0$

$$W' L\,Sin - P\,L\,Cos + w'' L\,Sin\theta = 0$$

$$w' Cos\theta - p\,Cos\theta + w'' Sin\theta = 0$$

$$P\,Cos\theta = +W\,Cos\alpha\,Cos\theta + W\,Sin\alpha\,Sin\theta = 0$$

$$P\,Cos\theta = W\,Cos\frac{\theta}{2}Cos\theta + W\,Sin\frac{\theta}{2}Sin\theta$$

$$P\,Cos\theta = w\,Cos\,(\theta - \theta/2) = w\,Cos\,\theta/2$$

$$P\,(2Cos^2\,\theta/2 - 1) = w\,Cos\,\theta/2$$

$$2p\,Cos^2\,\theta/2 - w\,Cos\,\theta/2 - p = 0$$

$$Cos\,\theta/2 = \frac{w \mp \sqrt{w^2 + 8p^2}}{4p}$$

$$Cos\,\theta/2 = \frac{1}{4}\ (\frac{w}{p} + \sqrt{(\tfrac{w}{p})^2 + 8})$$

b) $p = 2w$

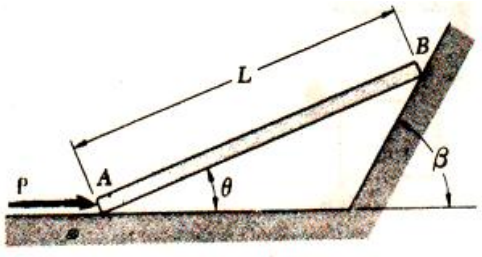
$$Cos\,\theta/2 = \frac{1}{4}\ (\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 8})$$

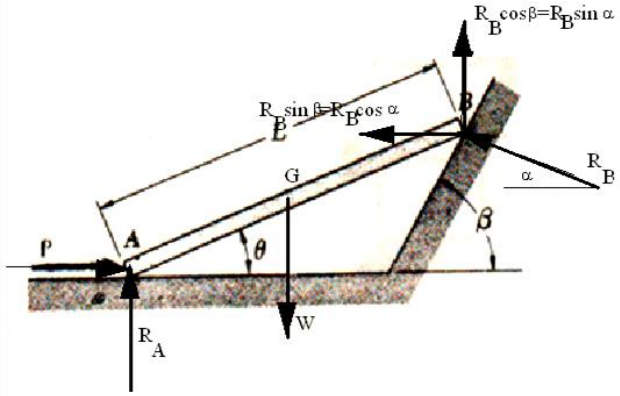
$$\theta/2 = 32.5$$

$$Cos\,\theta/2 = \frac{1}{4}\ (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}) = 0.843$$

$$\theta = 65^\circ$$

4-39 میله نازک یکنواخت بطول L و بوزن W در وضعی مطابق شکل بواسطه نیروی افقی P نگاهداری می‌شود. معین کنید زاویه θ نظیر تعادل را (a) بر حسب P، W، L و β. (b) هرگاه P برابر ۱۰ پوند، W=20lb و L=30in و $\beta = ۶۰$ باشد.





$$\alpha + \phi = 90^\circ$$

$AB = L$

$\theta \sim P, B, L, W$

$a)$ $\quad \sum MA = o \quad \curvearrowleft^{+}$

$$-RB\ Cos\beta\ (LCos\theta) - RB\ Sin\beta\ (LSin\theta) + w\ (\tfrac{L}{2} Cos\theta) = 0$$

$$RB\ (Cos\beta\ Cos\theta + Sin\beta\ Sin\theta) = \frac{w}{2}\ Cos\theta$$

$$R_B = \frac{w\ Cos\theta}{2(Cos\ (\beta - \theta))}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$p = RB\ Sin\beta = \frac{w\ Cos\theta}{2Cos(\beta - \theta)} = Sin\beta$$

$$p = \frac{w\ Cos\theta\ Sin\beta}{Cos\beta\ Cos\theta + Sin\theta\ Sin\beta}$$

$$\boxed{p = \frac{w}{2}\ (\frac{1}{\tan\beta + \tan\theta})}$$

$p = 10$

$w = 20$

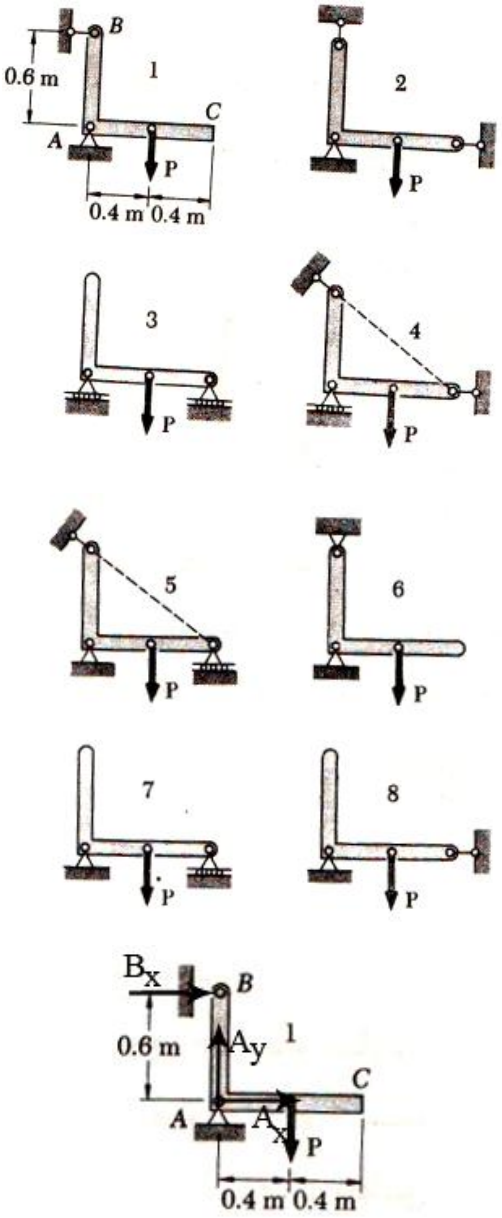
$\beta = 60 \qquad 10 = \frac{20}{2}\ (\frac{1}{\tan 60 + \tan\theta})$

$\tan\theta + \tan 60 = 1$

$\tan\theta = -0.7320$

$$\boxed{\theta = 36.2}$$

4-40گونیای ABC را به هشت طریق مطابق شکل نگاهداری می‌نمایند کلیه پین‌ها و کره‌های غلطان و اتصالهای کوتاه بدون اصطکاک فرض می‌شوند. در هر حالت معین کنید آیا – گونیا (a) کاملاً یا قسمتی از آن و یا بطور غیر مناسب در وضع قید شاری قرار گرفته (b) عکس‌العملها از نظر استاتیکی معین یا نامعین‌اند. (c) تعادل در وضع شکل موجود است. هم چنین در کدام حالت می‌توان عکس‌العمل‌ها را حساب کرد، فرض می‌شود مقدار نیروی P برابر ۴۰۰N باشد.



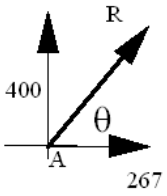
$1 \Rightarrow \quad {}^{+}\!\circlearrowleft MA = 0$

$p\ (0.4) + Bx\ (0.6) = 0$

$0.6\ Bx = -400\ (0.4)$

$Bx = -266.7\ N$

$Bx = 267N \Leftarrow$



$\sum Fy = 0$

$Ay - 400 = 0$

$Ay = 400 \uparrow$

۱) سازه پایدار و معین

$1 \Rightarrow \sum F_x = 0$

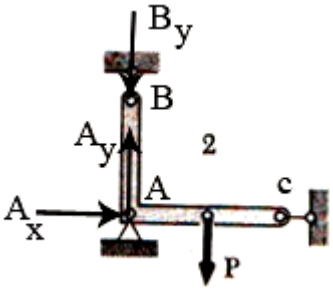
$Ax + Bx = 0 \qquad Ax = 267 \Rightarrow$

$Ax - 266.7 = 0$

$\tan\theta = \dfrac{400}{266.6} \qquad \theta = 56.3$

$R = \dfrac{266.6}{Cos56.3} = 481$

2)

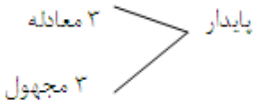


$2 \Rightarrow -By + Ay - p = 0$

$-By + Ay - 400 = 0$ غیرمعین

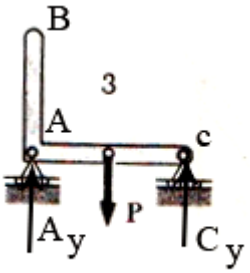
$\sum MC = o$

$(Ay - By)\ (0.8) - 400\ (0.4) = 0$



2) سازه پایدار و غیرمعین

3)



$3 \Rightarrow {}^{+}\!\circlearrowleft MA = 0$

$cy\ (0.8) - p\ (0.4) = 0$

$cy = \dfrac{4000.4}{0.8} = 200 \uparrow N$

$\sum Fy = 0 \qquad Ay - 400 + 200 = 0$

$Ay = 200 \uparrow$

سازه ناپایدار و معین

3) قید معین کامل

4)

$\tan\theta = \dfrac{0.6}{0.8} \quad \theta = 36.9$

$\cos\theta = 0.8$

$\sin\theta = 0.6$

${}^{+}\!\circlearrowleft MA = 0 \qquad p\ (0.4) + B\ Cos\theta(0.6) = 0$

$400\ (0.4) + B(0.6)\ (0.8) = 0$

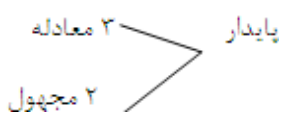
$B = -333.3\ N$

$Bx = B\ Cos\theta = -333.3 \times 0.8 = -266.7\ N$

$\sum Fx = 0 \qquad Bx - Cx = 0$

$Cx = Bx = -266.7$

$Cx = 266.7 \rightarrow$



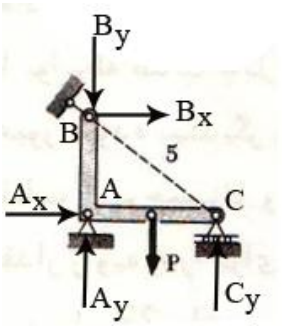
$\sum Fy = 0 \qquad Ay - 400 - (-333.3 \times 0.6) = 0$

$Ay = 400 - 200 = 200 \uparrow$

$B = 333.3 \qquad Cos = 0.8 \qquad \theta = 36.8^{\circ}$

4) قید معین کامل (سازه پایدار معین)

5)



$5 \Rightarrow p\ (0.4) - cy\ (0.8) + B(0.8)\ (0.6) = 0$

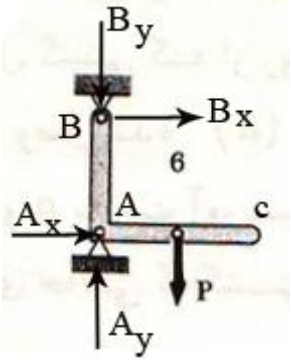
$Ay - 400 + cy - B\ (0.6) = 0$

$(Ay)(0.8) - p(0.4) = 0 \qquad Ay = \dfrac{400 \times 0.4}{0.8}$

$Ay = 200\ \uparrow$

2 معادله و سه مجهول / قید نامعین کامل (سازه ناپایدار و معین) چون B از نقطه C گذشته است.

6)



$6 \Rightarrow B \times (0.6) + p\ (0.4) = 0$

$Bx = -\dfrac{400 \times 0.4}{0.6} = -266.7\ N$

$Bx = 266.7\ \leftarrow$

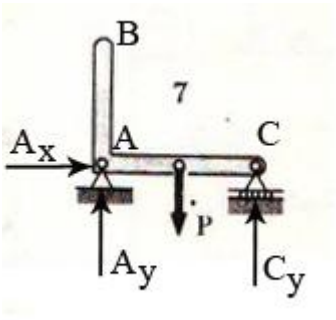
$Ax + Bx = 0 \qquad Ax = -Bx = 266.7\ \rightarrow$

$-p + Ay + By = 0$

سه معادله دو مجهول و سازه ناپایدار نامعین

قید نامعین کامل

7)



$7 \Rightarrow (Cy)(0.8) - 400\ (0.4) = 0$

$Cy = 200\ \uparrow$

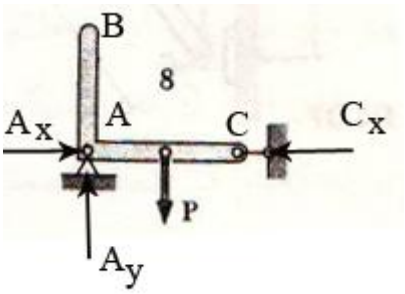
$Ay + Cy = 400 \qquad Ay = 200\ \uparrow$

$\sum Fx = 0$ ندارد قید معین کامل

$Ax = 0$

سه معادله و سه مجهول سازه، پایدار معین

8)



$400\ (0.4) = 0$

$+ Ax - Cx = 0$

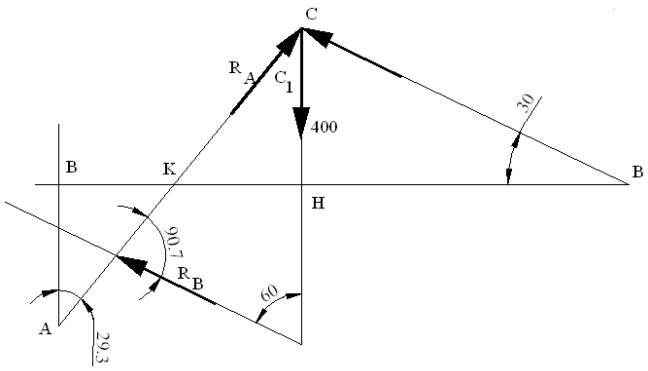
$Ag = 400$

$Ax - Cx = 0$

قید نامعین غیرمتناسب و غیر متعادل ۳معادله و ۳ مجهول

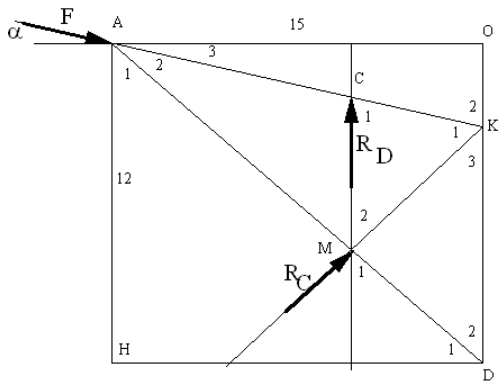
سازه پایدار و غیرمعین

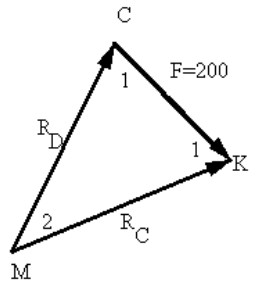
4-42 با استفاده از قانون سه نیرو مسئله ۱۰-۴ را حل کنید.



$$\tan 30 = \frac{CH}{HB}$$
$$CH = 0.25\tan 30$$
$$CH = 0.145 \ \ m$$
$$ABK \sim KCH$$
$$\frac{BK}{KH} = \frac{AB}{CH} = \frac{0.3}{0.145}$$
$$BK = 2.069KH$$
$$0.25 - KH = \frac{KH}{CH} = \frac{0.0814}{0.145}$$
$$KH = 0.0814$$
$$\tan C_1 = \frac{KH}{CH} = \frac{0.0814}{0.145} \qquad C_1 = 29.3$$
$$C_1 = 29.3$$
$$A = C_1 = 29.3$$
$$\frac{RA}{Sin60} = \frac{RB}{Sin29.3} = \frac{400}{Sin90.7}$$
$$RA = Sin60 \ \ \frac{400}{Sin90.1}$$
$$RA = 346.4 \ \ N$$
$$\alpha = 90 - 29.3 = 60.7$$

4-44 در مسئله ۱۳-۴ معین کنید (a) مقدار زاویه α را برای وقتی که کره‌های غلطان ۱ و ۲ و ۳ بتوانند به سهولت حرکت کنند. (b) عکس‌العملهای نظیر را در نقاط C و D بدست آورید.





$$F = 200$$
$$MD = 5''$$
$$Sin D_1 = \frac{12}{15}$$
$$D_1 = 53.13^\circ$$
$$D_2 = 36.87$$
$$K_3 = 53.13$$
$$\frac{5}{SinK_3} = \frac{KD}{Sin90} = \frac{MK}{Sin36.87}$$
$$KD = \frac{5}{Sin53.13} = 6.25$$
$$OK = 12 - 6.25 = 5.75$$
$$HD = 9 \qquad \tan A_3 = \frac{5.75}{9}$$
$$A_3 = 32.6^\circ \qquad A_3 = \beta$$
$$B = 32.6^\circ$$
$$M_1 = 90 - D_1 = 36.9$$
$$\alpha = 36.9$$

$M_2 = 53.13$

$K_2 = 90 - 32.6 = 57.4^\circ$

$K_1 = 180 - 57.4 - 53.13 = 69.47$

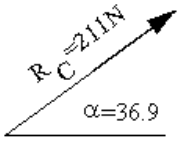
$C_1 = 180 - 69.47 - 53.13 = 57.4$

$$\frac{200}{Sin53.13} = \frac{R_D}{Sin69.47} = \frac{R_C}{Sin57.4}$$

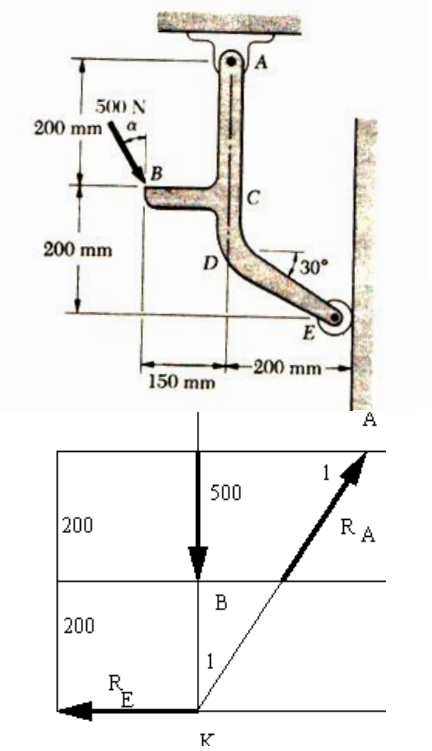
$$R_D = \frac{200}{Sin53.13} \times Sin69.47 = 234 \ \ N \ \uparrow$$

$$R_C = \frac{200}{Sin53.13} \times Sin57.4 = 210.6 \ \ N$$

$\alpha = 90 - D_1 \quad \Rightarrow \quad R_C = 211 \ \ N$



4-46 عکس‌العملهای نقاط A و E را بدست آورید وقتی $\alpha = 0^\circ$ است.



$$\tan A_1 = \frac{0.4}{0.15}$$

$A_1 = 69.45$

$K_1 = 20.55$

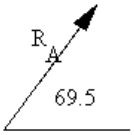
$$\frac{R_A}{Sin90} = \frac{R_E}{Sin20.55} = \frac{500}{Sin69.45}$$

$$R_E = \frac{500}{Sin69.45} \ \ Sin20.55$$

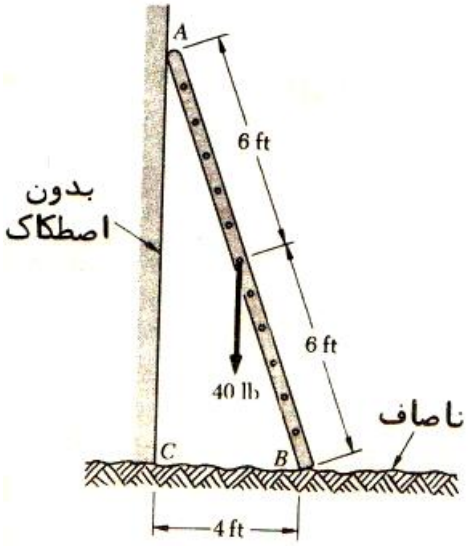
$R_E = 187.5 \ \ N \ \Leftarrow$

$$R_A = \frac{500}{Sin69.5} \times Sin90 = 534 \ \ //$$

$R_A = 534 \ \ N$



4-48 نردبانی بطول ۱۲ft و بوزن ۴۰ lb در مقابل دیوار قائم بدون اصطکاکی قرار داده شده. قسمت انتهایی آن در روی سطح ناصاف زمین در حالت سکون می‌باشد فاصله پای آن از دیوار قائم ۴ft می‌باشد. معین کنید عکس‌العملهای دو نقطه A و B را.



$AB = 12'$

$W = 40 \ \ lb$

$HB = 4'$

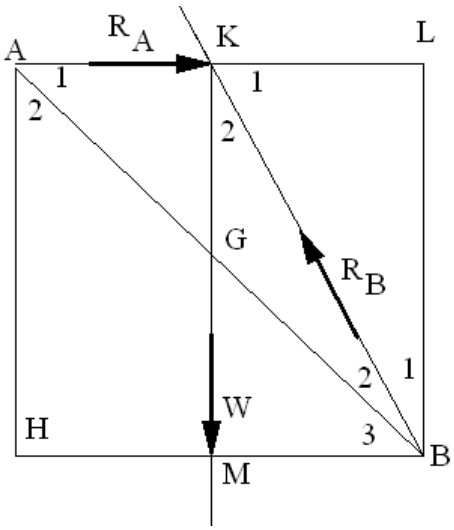
$$SinA_2 = \frac{HB}{AB} = 4/12$$

$A_2 = 19.5^\circ$

$A_1 = 70.5$

$AH = 12\ Cos\ A_2$

$AH = 11.31\ \ ft$



$\tan k_1 = \dfrac{11.31}{2}$

$k_1 = 80^\circ$

$B_1 = 10^\circ$

$\widehat{B}_2 = 90 - A_2 = 90 - 19.5$

$\widehat{B}_2 = 70.5^\circ$

$\widehat{B}_3 = 90 - 70.5 - 10$

$\widehat{B}_3 = 9.5^\circ$

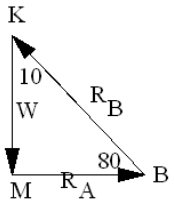
$K_2 = 10^\circ$

$\dfrac{R_A}{Sin10} = \dfrac{R_B}{Sin90} = \dfrac{W}{Sin80}$

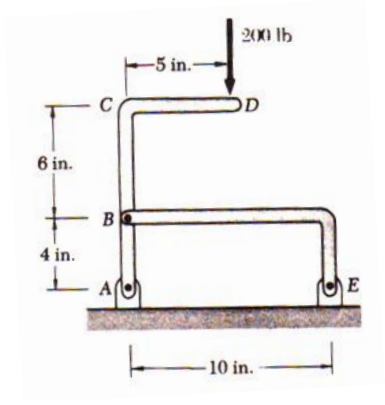
$R_A = \dfrac{40}{Sin80}\ \ Sin10 = 7.05\ \ \ lb \Rightarrow$

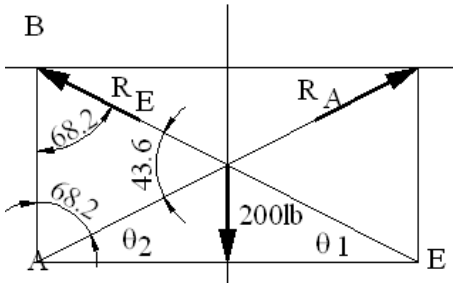
$R_B = \dfrac{40}{Sin80}\ \ Sin90 = 40.6\ \ lb$

$R_B = 40.6\ \ lb$



4-52 معین کنید عکس‌العمل‌های نقطه A و E را.





باید سه نیرو R_A وR_Bو200lb در (مستطیل) قاب BAEF ، همدیگر را در مرکز قطع کنند:(اقطار مستطیل)

$\tan\theta_1 = 4/10 = 0.9$

$\theta_1 = 21.8$

$\theta_2 = \theta_1 = 21.8^\circ$

$\dfrac{RE}{Sin68.2} = \dfrac{200}{Sin43.6} = \dfrac{RA}{Sin68.2}$

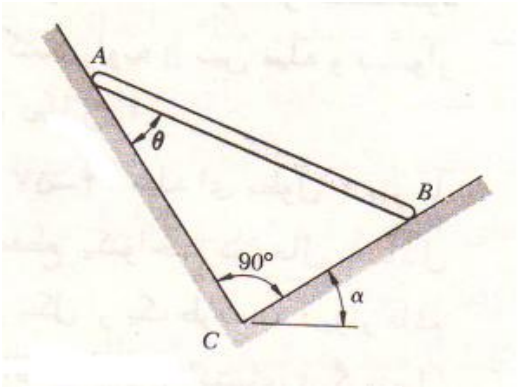
$RA = \dfrac{200}{Sin43.6} \times Sin68.2$

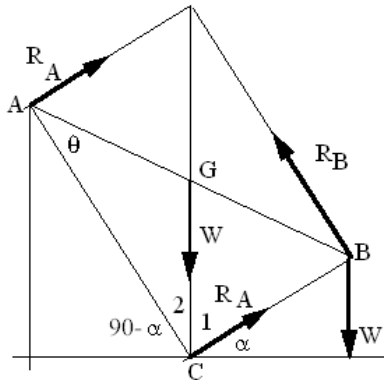
$RA = 269.3\ \ lb\ \ in\ \ direction\ of \rightarrow \theta_2$

$R_E = 269.3\ \ lb\ \ in\ \ direction\ of \rightarrow \theta_1$

$RB = RE = 269.3$

4-54 میله یکنواخت AB در صفحه قائم بطوریکه دو انتهای آن مقابل سطوح بدون اصطکاک AB و BC باشد قرار گرفته. معـین کنید زاویه θ نظیر حالت تعـادل را وقتـی (a) $\alpha = ۳۰^\circ$ (b) $\alpha = ۴۰^\circ$ و (c) $\alpha = ۶۰^\circ$ باشد.





$$\frac{R_A}{\sin 90} = \frac{W}{\sin\alpha}$$

$$\frac{R_B}{\sin 90} = \frac{W}{\sin(90-\alpha)}$$

$$\frac{R_B}{\sin 90} = \frac{W}{\cos\alpha}$$

$$R_A = W\sin\alpha$$

$$R_B = W\cos\alpha$$

مثلث BCA $\quad \frac{R_A}{\sin\theta} = \frac{R_B}{\sin(90-\theta)}$

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{R_A}{R_B} = \frac{W\sin\alpha}{W\cos\alpha}$$

$$\tan\alpha = \tan\theta$$

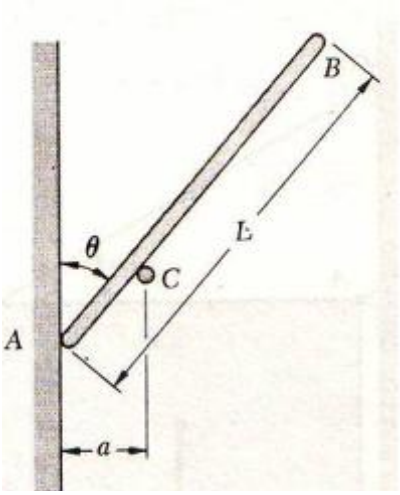
$$\theta = \alpha$$

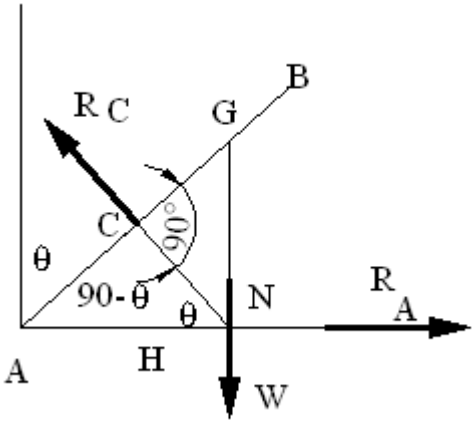
$$\alpha = 30 \quad \rightarrow \theta = 30$$

$$\alpha = 40 \quad \rightarrow \theta = 40$$

$$\alpha = 60 \quad \rightarrow \theta = 60$$

4-56 میله نازک بطول L و وزن W بین دیوار و گل میخ C قرار گرفته. از اصطکاک صرفنظر می‌شود. معین کنیـد زاویـه θ بـین میله و دیوار حالت تعادل را.





$\tan\ (90-\theta) = {}^{CH}\!/_{a}$

$CH = a\ cat\ \theta$

$\tan\theta = \dfrac{CH}{NH}$

$NH = \dfrac{CH}{\tan\theta}$

$NH = CH\ Cat\ \theta$

$AN = AH + NH$

$AN = a + a\ Cat^2\theta$

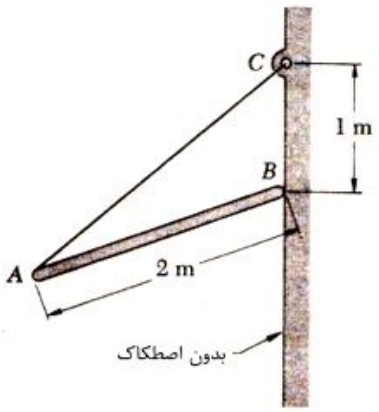
$AN = {}^{1}\!/_{2} Cos\ (90-\theta) = {}^{1}\!/_{2}\ Sin\theta$

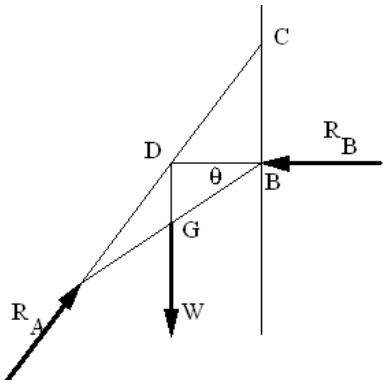
$a + a\ \cot^2\theta = {}^{1}\!/_{2}\ Sin\theta$

$a\ (\dfrac{1}{Sin^2\theta}) = {}^{1}\!/_{2}\ Sin\theta$

$\sin^3\theta = \dfrac{2a}{L}$

4-57 میله‌ای بطول ۲ متر با سطح مقطع یکنواخت در حال تعادل مطابق شکل از یک طرف به دیوار قائم بدون اصطکاک و از انتهای دیگر متصل به طناب نگاهداری می‌شود. معین کنید طول طناب را.





از راه قانون سه نیروئی

$BC = 1^m$

$AB = 2^m$

$AC = ?$

$\dfrac{DG}{BC} = \dfrac{AG}{AB}$

$\dfrac{DG}{1} = \dfrac{1}{2}$

$DG = {}^{1}\!/_{2}\ m$

$Sin\theta = \dfrac{DG}{BG} = {}^{1}\!/_{1} \qquad \theta = 30^\circ$

قانون کسینوس ها و در مثلث ABC داریم

$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\overline{AB}.\overline{BC}\ Cos\ (\theta + 90)$

$\overline{AC}^2 = 1 + 4 + 2(1)\ (2)({}^{1}\!/_{2})$

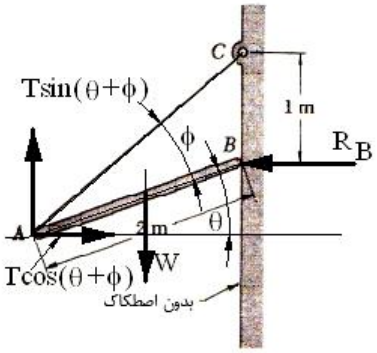
$\overline{AC}^2 = 1 + 4 + 2 = 7$

$AC = \sqrt{7}$

$AB = 2^m$

$BC = 2^m$ حل از راه دیگر

$AC = ?$



$\sum MB = 0\ \curvearrowleft^{+}$

$-w\ Cos\theta + 2\ Cos\theta\ T\ Sin\ (\theta + \varphi)$

$-2Sin\theta\ T\ Cos\ (\theta + \phi) = 0$

$\sum Fx = 0$

$RB = TCos\ (\theta + \varphi)$

$\sum Fy = 0$

$w = T\ Sin\ (\theta + \varphi)$

$$-w\ Cos\theta + 2\ Cos\theta\ (w) - 2\ Sin\theta\ Cos\ (\theta+\varphi)\ \frac{W}{Sin(\theta+\varphi)} = 0$$

$$w\ Cos\theta = 2\ wSin\theta\ Cot\ (\theta+\varphi)$$

$$\frac{1}{Cot\ (\theta+\varphi)} = 2\tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}\ \tan\ (\theta+\varphi)$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{1}{2}\ (\frac{CD}{AD})$$

$$BD = \frac{1}{2}\ CD = \frac{1}{2}\ (1+BD)$$

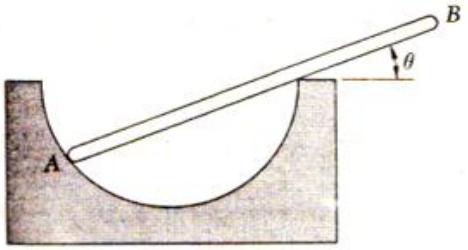
$$BD = 1$$

$$AD = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{3+4}$$

$$AC = \sqrt{7}$$

4-58 میلـــه متجـــانس AB طـــول ۳R در داخـــل طشـــت. نیمکره‌ای بشعاع R مطابق شکل قرار گرفته. از اصـطکاک صـرف نظر می‌شود. معین کنید زاویه θ نظیر حالت تعادل را.



$$AB = 3R$$

$$\theta = ?$$

$$AD\ Cos2\theta = AH$$

$$AG\ Cos\theta = AH$$

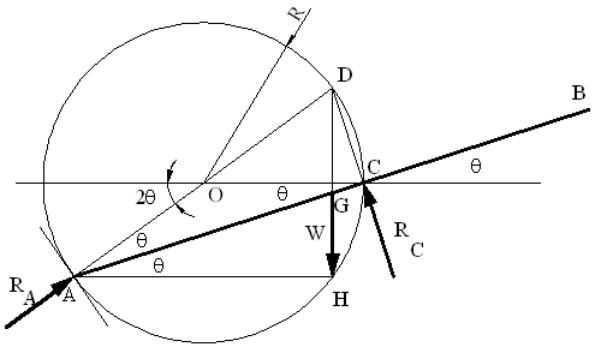
$$2R\ Cos2\theta = \frac{3R}{2}\ Cos\theta$$

$$Cos2\theta = \frac{3}{4}\ Cos\theta$$

$$4\ (2Cos^2\ \theta - 1) = 3\ Cos\theta$$

$$8\ Cos^2\ \theta - 4 = 3\ Cos\theta$$

$$8\ Cos^2\ \theta - 3\ Cos\theta - 4 = 0$$



$$Cos\theta = \frac{3 \mp \sqrt{9+128}}{16} = \frac{3 \mp 11.7}{16}$$

$Cos\theta = -0.544$ $\quad$ $Cos\theta = +0.91875$

$\theta = 123$ غیر قابل قبول $\quad$ $\boxed{\theta = 23.2^\circ}$

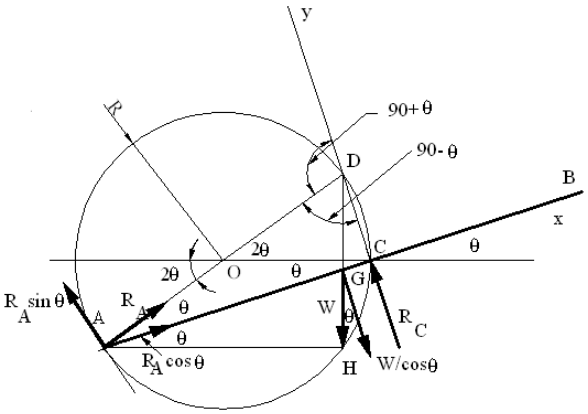
از راه دیگر

$$AB = 3R$$

$$\theta = ?$$

اصطکاک صرف نظر شود.

از راه دیگر (طولانی)



$$GDC = \hat{\theta}$$

$$OCD = 90 - \theta$$

$$\sum M_A = 0$$

$$(W/Cos\theta)\ (3\ R/2) = R_C\ (\overline{AC})$$

$$\sum Fy = 0$$

$$R_A\ Sin\theta + R_C - W/Cos\theta = 0$$

$(3\ R/2)\ (R_A\ Sin\theta + R_C) = R_C\ \overline{AC}$

$(3\ R/2)\ (RA/RC\ \ Sin\theta + 1) = \overline{AC}$

$$\frac{R_A}{Sin(\theta)} = \frac{R_C}{Sin\ (90-2\theta)}$$

$$RA/RC = \frac{\sin\theta}{\cos 2\theta}$$

$$(\frac{Sin^2\theta}{Cos2\theta} + 1)\ (3\ R/2) = \overline{AC}$$

$$AC = R\cos\theta + R\cos\theta = 2R\ \cos\theta$$

$$(\frac{Sin^2\theta}{Cos2\theta} + 1)\ (3\ R/2) = 2R\ Cos\theta$$

$$Sin^2\theta + Cos2\theta = \tfrac{4}{3} Cos\theta\ Cos2\theta$$

$$1 - Cos^2\theta + 2Cos^2\theta - 1 = \tfrac{4}{3} Cos\theta\ (2Cos^2\theta - 1)$$

$$Cos^2\theta = \tfrac{8}{3}\ \ Cos^3\theta - \tfrac{4}{3}\ \ Cos\theta$$

$$\tfrac{8}{3}\ \ Cos^2\theta - Cos\theta - \tfrac{4}{3} = 0$$

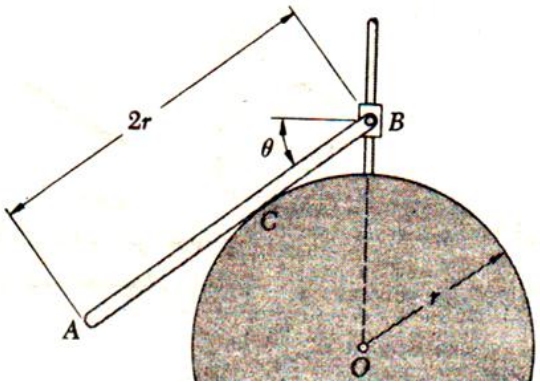
$$Cos\theta = \frac{1 \mp \sqrt{1 + \frac{4}{3}(4)(\frac{8}{3})}}{2\ (\frac{8}{3})}$$

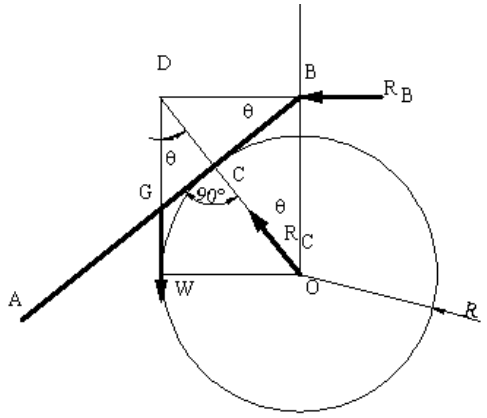
$$Cos\theta = \frac{1 \mp \sqrt{1 + 14.22}}{\frac{16}{3}} = \frac{1 \mp 3.9}{5.33}$$

$$Cos\theta = 0.9193$$

$$\boxed{\theta = 23.2^\circ}$$

4-59 میله نازک بطول ۲r و وزن W از یک طرف به طوقه B متصل و روی استوانه مدوری به شعاع r در حال سکون قرار دارد. می‌دانیم که طوقه می‌تواند به آزادی روی میلهٔ قائم بدون اصطکاک بلغزد. معین کنید مقدار زاویه θ نظیر حالت تعادل را.





طبق قانون سه نیرم بایدّ W , R_B, R_c در D متقاطع باشند

$AB = 2r$

$\theta = ?$

GDB قائم الزاویه

DBO //

پس $\hat{O} = \theta$ و $\hat{CDG} = \theta$

BCO در مثلث قائم الزاویه

$$\tan\theta = \frac{DC}{BC}$$

$$DC = r\tan^2\theta$$

GCD در مثلث قائم الزاویه

$$\tan\theta = \frac{GC}{DC} \qquad GC = r\tan^2\theta$$

$$\overline{GB} = \overline{GC} + \overline{CB} = r$$

$$r\tan^3\theta + r\tan\theta = r$$

$$\tan\theta + \tan^3\theta = 1$$

$$x^3 + x = 1$$

$$x < 1$$

بوسیله سعی و خطاء

$$\begin{cases} X = 0.5 \\ 0.5625 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 0.6 \\ 0.816 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 0.7 \\ 1.043 = 1 \end{cases} \qquad \text{پس} \quad \Rightarrow \quad 0.6 < x < 0.7$$

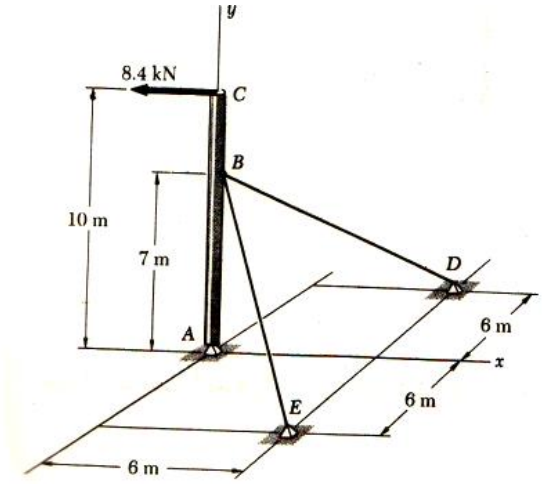
$$\begin{cases} X = 0.65 \\ 0.9246 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 0.67 \\ 0.96 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 0.68 \\ 0.9944 = \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 0.69 \\ 1.01 = 1 \end{cases} \qquad 0.68 < x < 0.69$$

$$\begin{cases} X = 0.683 \\ 1.001 = 1 \end{cases} \qquad \tan\theta = 0.683$$

$$\boxed{\theta = 34.3^{\circ}}$$

4-60 بر دیرکی بطول ۱۰ متر نیرویی برابر با ۸/۴ کیلو نیوتن مطابق شکل وارد می‌شود. آن را بوسیله کاسه ساچمه در نقطه A و دو کابل BD و BE نگاه داشته‌اند. از وزن دیرک صرفنظر می‌شود، معین کنید کشش در هر کابل و عکس‌العمل در نقطه A را.



$A\ (0/0/0)$ $B\ (0,7/0)$

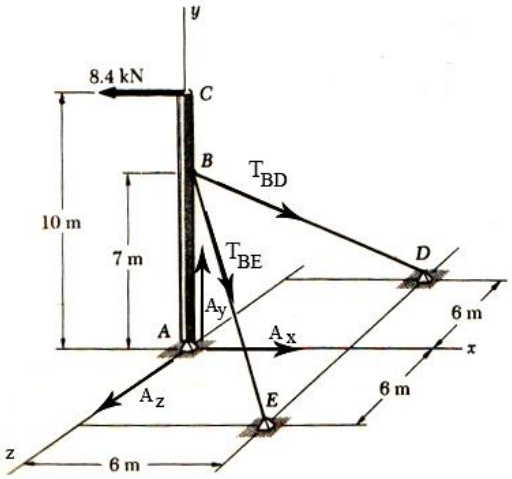
$C\ (0,10/0)$ $E\ (6,0,6)$ $D\ (6,0,-6)$

$$\vec{BD} = 6i - 7j - 6k$$

$$\vec{T_{BD}} = \lambda\, T_{BD} = \frac{T_{BD}}{11}\ (6i - 7j - 6k)$$

$$\vec{BE} = 6i - 7j + 6k$$

$$\vec{T_{BE}} = \frac{TBE}{11}\ (6i - 7j + 6k)$$



$$\vec{AB} = 7j$$

$$\sum MA = 0 \qquad = (8.4)\ (10)\ (K)$$

$$7j \times \frac{T_{BE}}{11}\ (6i - 7j + 6k) + 7j \times \frac{T_{BD}}{11}\ (6i - 7j - 6k)$$

$$0 = 84K + \frac{42}{11}\ T_{BE}(-K) + \frac{42}{11}\ T_{BE} i + \frac{42}{11}\ T_{BD}\ (-K)$$

$$-\frac{42}{11}\ T_{BD}(i)$$

$$\begin{cases} 84 - \frac{42}{11}\ T_{BE} - \frac{42}{11}\ T_{BD} = 0 \\ \frac{42}{11}\ T_{BE} - \frac{42}{11}\ T_{BD} = 0 \end{cases}$$

$$T_{BE} = T_{BD}$$

$$84 = \tfrac{2}{11} \times 42\ T_{BE} \qquad T_{BE} = 11\ KN$$

$$T_{BD} = 11\ //$$

$$\sum Fx = 0$$

$$-8.4 + Ax + \tfrac{6}{11} T_{BD} + \frac{6}{11}\ T_{BE} = 0$$

$$-8.4 + Ax + \frac{6}{11}\ (11) + \frac{6}{11}\ (11) = 0$$

$$Ax = -3.6\ KN$$

$$\sum Fy = 0$$

$$Ay - \frac{7}{11}\ T_{BD} - \tfrac{7}{11}\ T_{BE} = 0$$

$$Ay=\frac{2}{11}\times 7\times 11=14\ KN$$

$$\sum Fx=0$$

$$Az=0$$

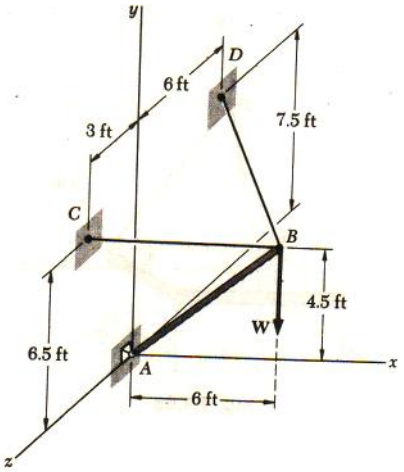
$$\overrightarrow{R_A}=-3.6i+14j$$

$$\tan\theta=\frac{14}{3.1}$$

$$R=\frac{3.6}{Cos75.5}=14.45\ KN$$

$$\begin{cases}R=14.45\ KN\\ \theta=75.5^{\circ}\end{cases}$$

4-62 میلـه AB بـاری بـه وزن W=820 lb را نگاهـداری می‌نماید. میله بوسیله کاسه ساچمه در نقطه A و دو کابل BC و BD در وضعی مطابق شـکل قـرار گرفتـه و از وزن آن صـرفنظر می‌شود. معین کنید کشش در هر کابل و عکس‌العمل در نقطه A را.



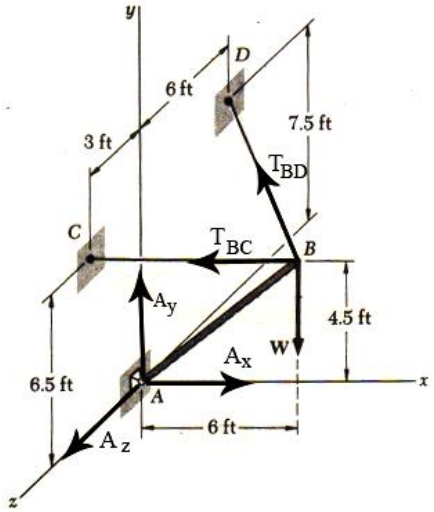
$$w=820\ lb$$

$$\vec{BC}\ ,\ \vec{BD}$$

$$A\ (0/0/0)\quad D\ (0,7.5,-6)$$

$$C\ (0,6.5,3)\quad B\ (6,4.5,0)$$

$$\vec{BD}=-6i+3j-6k$$



$$\vec{T}_{BD}=\frac{T_{BC}}{7}\ (-6i+2j+3k)$$

$$\sum MA=0$$

$$r\times w+r_{AD}\times F_{BD}+r_{AC}\times F_{BC}=M_A=0$$

$$(6i)\ (-wj)+(7.5j-6k)\ \frac{T_{BD}}{9}\ (-6i+3j-6k)$$

$$+(6.5j+3k)\times\frac{T_{BC}}{7}(-6i+2j+3k)=0$$

$$M_A=-4920\ K+\frac{TBD}{9}\begin{vmatrix}i & j & k\\ 0 & 7.5 & -6\\ -6 & 3 & -6\end{vmatrix}\begin{matrix}i & j\\ 0 & 7.5\\ -6 & 3\end{matrix}$$

$$+\frac{T_{BC}}{7}\begin{vmatrix}i & j & k\\ 0 & 6.5 & 3\\ -6 & 2 & 3\end{vmatrix}\begin{matrix}i & o\\ 0 & 6.5\\ -6 & 2\end{matrix}$$

$$M_A=-4920\ k+\frac{T_{BD}}{9}(-45i+36j+45k+18i)$$

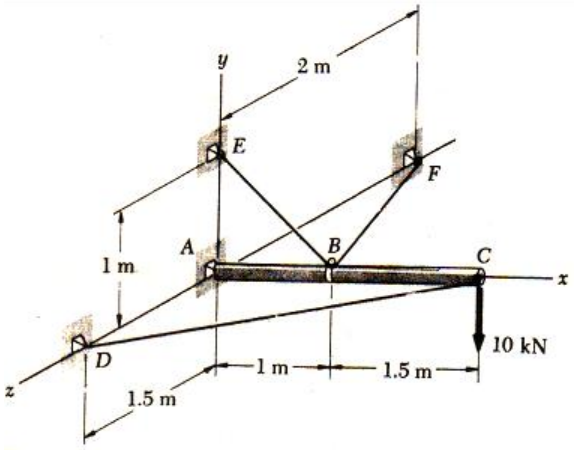
$$+\frac{T_{BC}}{7}\ (19.5i-18j+39k-6i)=0$$

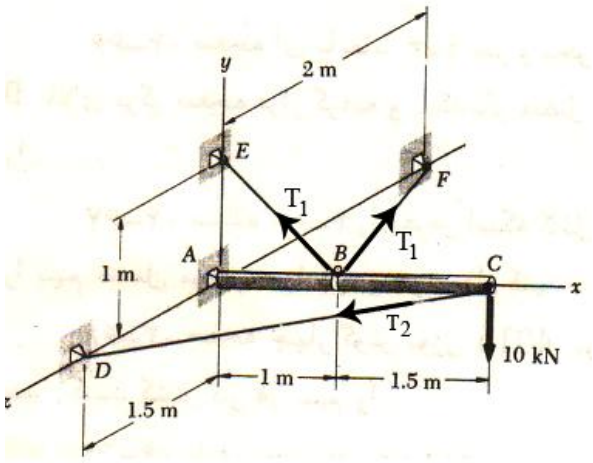
$$\bar{R} = \frac{720}{Cos36.9} = 900\ lb$$

$$\tan\varphi = \frac{4.5}{6} \qquad \varphi = 36.9^\circ$$

R=900lb در راستای خط AB

4-64 میله‌ای بطول ۲/۵ متر بواسطه کاسه ساچمه در نقطه A و دو کابل EBF و DC نگاهداری می‌شود. کابل EBF از روی قرقره بدون اصطکاک B عبور می‌نماید. معین کنید کشش در هر کابل را.





چون در قرقره B، $T_{BF} = T_{BE} = T_1$

$E\ (0,1,0)$ $B\ (1,0,0)$

$F\ (0,0,-2)$ $C\ (2.5,0,0)$ $D\ (0,0,1.5)$

$$\vec{BF} = -i - 2k$$

$$T_{BF} = \frac{T_1}{\sqrt{5}}\ (-i - 2k)$$

$$\begin{cases} k \rightarrow & -4920 + \frac{45}{9}\ T_{BD} + \frac{39}{7}\ T_{BC} = 0 \\ i \rightarrow & \frac{T_{BD}}{9}(-45+18) + \frac{T_{BC}}{7}(19.5-6) = 0 \\ j \rightarrow & \frac{T_{BD}}{9}\ (+36) + \frac{T_{BC}}{7}\ (-18) = 0 \end{cases}$$

$$+4\ T_{BD} = \frac{18}{7}\ T_{BC} \qquad T_{BD} = 0.643\ T_{BC}$$

$$-4920 + \frac{45}{9}\ (0.643\ T_{BC}) + \frac{39}{7}\ T_{BC} = 0$$

$$-4920 + 3.215\ T_{BC} + 5.5714\ T_{BC} = 0$$

$$T_{BC} = 560\ lb$$

$$T_{BD} = 360\ lb$$

$$\sum Fx = 0$$

$$Ax - \frac{6}{9}\ T_{BD} - \frac{T_{BC}}{7} \times 6$$

$$Ax = \frac{6}{9}\ (360) + \frac{6}{7}\ (560)$$

$$Ax = 240 + 480$$

$$Ax = 720$$

$$\sum Fy = 0$$

$$Ay - 820 + \frac{3T_{BD}}{9} + \frac{T_{BC}}{7} \times 2 = 0$$

$$Ay - 820 + \frac{1}{3}\ (360) + \frac{2}{7}\ (560) = 0$$

$$Ay - 820 + 120 + 160 = 0$$

$$Ay = 540\ lb$$

$$\sum Fz = 0$$

$$Az - \frac{6}{9}\ T_{BD} + \frac{T_{BC}}{7}\ (3) = 0$$

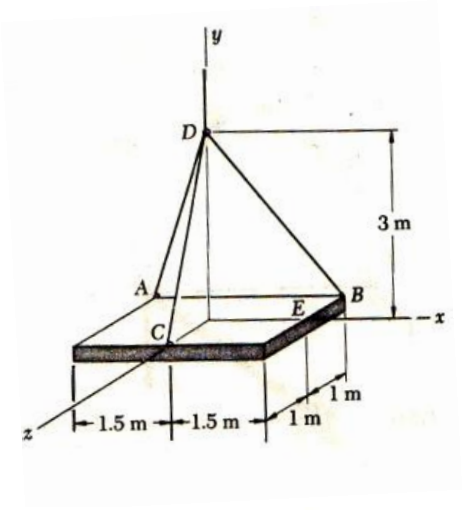
$$Az - \frac{6}{9}\ (360) + \frac{3}{7}\ (560) = 0$$

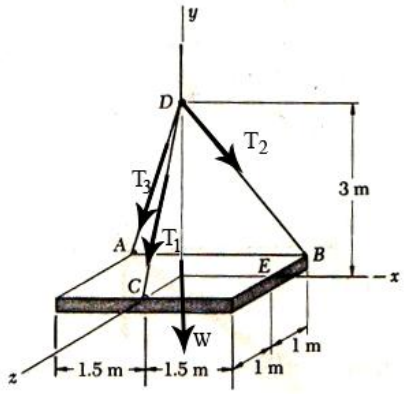
$$Az - 240 + 240 = 0$$

$$AZ = 0$$

$$\vec{R} = 720i + 540j$$

$$\tan\theta = \frac{540}{720} \qquad \theta = 36.9^\circ$$





2×3

$W = 600\ kg$

$C\ (0,0,1)\quad B\ (1.5,0,-1.5)$

$A\ (-1.5,0,-1.5)\quad D\ (0,3,0)$

$\vec{DC} = -3j + k$

$\vec{T}_{DC} = \frac{T_1}{\sqrt{10}}\ (-3j + k)$

$\vec{DB} = 1.5i - 3j - 1.5k$

$T_{DB} = \frac{T_2}{\sqrt{13.5}}\ (+1.5i - 3j - 1.5k)$

$\vec{DA} = 1.5i - 3j - 1.5k$

$\vec{T}_{DA} = \frac{T_3}{\sqrt{13.5}}\ (-1.5i - 3j - 1.5k)$

$\vec{DO} = 3j$

$\vec{BE} = -i + j \qquad T_{BF} = \frac{T_1}{\sqrt{2}}\ (-i + j)$

$\vec{CD} = -2.5i + 1.5k$

$T_{DC} = \frac{T_2}{\sqrt{8.5}}\ (-2.5i + 1.5k)$

$\sum MA = 0$

$M_A = 2.5\ i\ (-10\ j) + i \times T_{BF} + i \times T_{BE}$

$+ 2.5\ i \times T_{DC} = 0$

$2.5\ i \times (-10\ j) + i \times\ (\frac{T_1}{\sqrt{5}}(-i - 2k))$

$+ i \times \frac{T_1}{\sqrt{2}}(-i + j) + 2.5 \times \frac{T2}{\sqrt{8.3}}\ (-2.5i + 1.5k) = 0$

$M_A = -25K + \frac{T_1}{\sqrt{5}}(-2)(j) + \frac{T_1}{\sqrt{2}}K$

$+ 2.5\frac{T_2}{\sqrt{8.5}}(1.5)\ (-j) = 0$

$K \quad \rightarrow -25 + T_1/\sqrt{2} = 0$

$j \quad \rightarrow \frac{2T_1}{\sqrt{5}} - \frac{2.5(1.5)\ T_2}{\sqrt{8.5}} = 0$

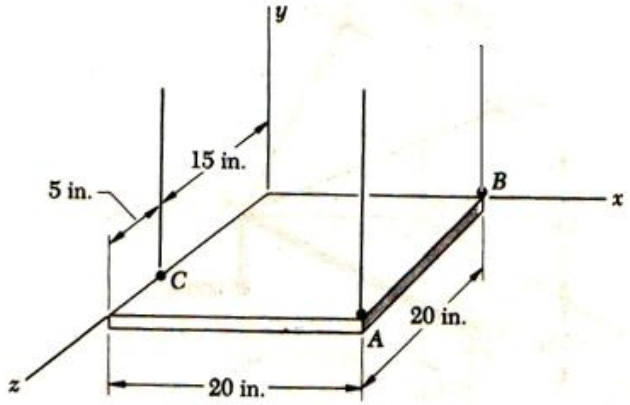
$\frac{T_1}{\sqrt{2}} = 25 \qquad T_1 = 25\ \sqrt{2} \qquad T_1 = 35.4\ KN$

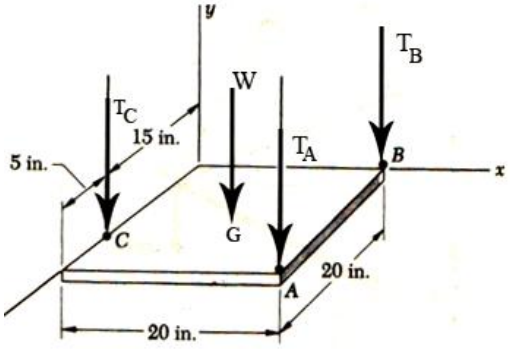
$T_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{8.5}}{2.5 \times 1.5} \times 35.4$

$T_2 = 24.6\ KN$

4-66 صفحه‌ای به ابعاد ۳×۲ متر و به جرم ۶۰۰ کیلوگرم را بوسیله سه کابل که در نقطه D بالای مرکز صفحه قرار گرفته و به یکدیگر متصل شده بالا می‌برند. معین کنید کشش در هر کابل را.

4-68 صفحه چهارگوش بوزن ۴۰lb بوسیله سه سیم مطابق شکل نگاهداری می‌شود. معین کنید کشش در هر سیم را.





$W = 40lb$

$\sum M_O = 0$

$M_O = 20i \times T_B j + (20i + 20\ \ k) \times TA_j$

$(10\ \ i + 10\ \ k) \times 40\ j + (15\ \ k) \times T_C j +$

$20\ T_B\ K + 20\ T_A\ K + 20\ (-i) + 400\ K$

$+ 400\ (-i) + 15\ T_C\ (-i) = 0$

$k \rightarrow 20T_B + 20T_A + 400 = 0$

$i \rightarrow -20T_A - 400 - 15T_C = 0$

$\sum Fy = 0 \qquad T_B + T_A + T_C + 40 = 0$

$T_B = -20 - T_A$

$15T_C = -20T_A - 400$

$15T_B = 15T_A + 15T_C + 600 = 0$

$-300 - 15T_A - 20T_A - 400 + 600 = 0$

$20T_A = -100 \qquad T_A = -5$

$\sum M_O = 0$

$M_O = 3j \times \frac{T_1}{\sqrt{10}}\ (-3j + k) + 3j \times \frac{T_2}{\sqrt{13.5}}\ (1.5i - 3j - 1.5k)$

$+ 3j \times \frac{T_3}{\sqrt{13.5}}\ (-1.5i - 3j - 1.5k)$

$M_O = \frac{3T_1}{\sqrt{10}}\ (i) + \frac{3T_2(1.5)}{\sqrt{13.5}}(-k) + \frac{3T_2(-1.5)}{\sqrt{13.5}}\ (i)$

$+ \frac{3T_3(-1.5)(-k)}{\sqrt{13.5}} + \frac{3T_3(-1.5)}{\sqrt{13.5}}\ (i)$

$i \rightarrow \frac{3T_1}{\sqrt{10}} - \frac{3(1.5)T_2}{\sqrt{13.5}} - \frac{3T_3(-1.5)}{\sqrt{13.5}} = 0$

$k \rightarrow \frac{-3T_2(1.5)}{\sqrt{13.5}} + \frac{3T_3(-1.5)}{\sqrt{13.5}} = 0 \ \Rightarrow\ T_2 = T_3$

$\frac{3T_1}{\sqrt{10}} = \frac{6\ (1.5)\ T_2}{\sqrt{13.5}}$

$T_1 = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13.5}} \times 2 \times 1.5\ T_2$

$T_1 = 2.58\ T_2$

$\sum Fy = 0$

$j \rightarrow -600 - \frac{3T_1}{\sqrt{10}} - \frac{-3T_2}{\sqrt{13.5}} - \frac{-3T_3}{\sqrt{13.5}} = 0$

$-600 = \frac{3}{\sqrt{10}}\ (2.58\ T_2) + \frac{6}{\sqrt{13.5}}\ T_2$

$-600 = 2.44\ T_2 + 1.632\ T_2$

$T_2 = -147.34\ kg$

$T_3 = T_2 = 1.44\ KN\ \vec{BD}$

$T_1 = 2.58\ (1.44)$

$T_1 = 3.71\ KN\ \vec{CD}$

$\sum Fy = 0 \qquad 3T + 40 + w = 0$

$3T = -40 - w$

$-40\ (\frac{40+w}{3}) + 400 + wx = 0$

$wx - 13.33w - 133.33 = 0$

$wz + 400 - 35\ (\frac{w+40}{3}) = 0$

$wz - 11.66 - 66.66 = 0$

$z = 11.66 + \frac{66.66}{w}$

$z \geq 11.66$

$Z = 13 \quad in$

$13w = 11.66w + 66.66 \qquad w = 50 \quad lb$

جواب $\begin{cases} w = 50 \quad lb \\ x = 16 \quad in \\ z = 13 \ in \end{cases}$

$50x = 13.33\ (50) + 133.33$

$50x = 800$

$at \begin{cases} x = 16'' \\ z = 13'' \end{cases} \qquad w = 50$

$z = 15^{1n}$

$15w = 11.66w + 66.66$

$20x = 13.33\ (20) + 133.33 \qquad x = 20 \quad in$

جواب $\begin{cases} x = 20^{1n} \\ z = 15 \ in \quad w = 20 \\ w = 20lb \end{cases}$

$z = 20$

$20w = 11.66w + 66.66 \qquad w = 8 \ lb$

$8x = 13.33\ (8) + 133.33$

$x = 30$

خارج از کادر است،پس قبول نیست

$T_B = -20 + 5 \qquad T_B = -15$

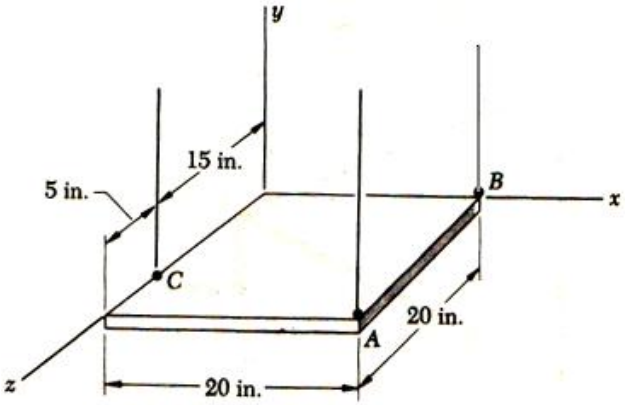
$15\ T_C = -20\ (-5) - 400 = -300$

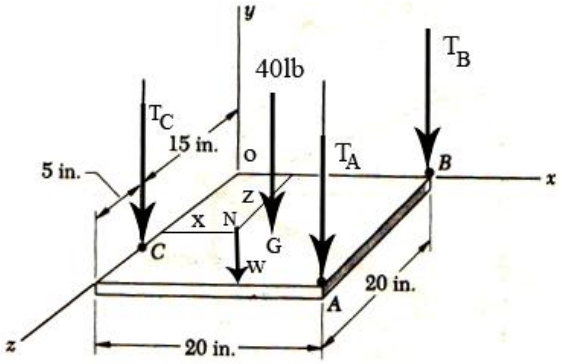
$T_C = -20$

$T_C = 20 \ lb \uparrow$

$T_B = 15 \ lb \uparrow \qquad T_A = 5 \ lb \uparrow$

4-70 معین کنید مقدار و محل کوچکترین باری که بتوان روی صفحه بوزن ۴۰ پوند قرار داد هر گاه کشش در هر سه سیم برابر باشند.





$T_A = T_B = T_C = T$

$M_O = 20i \times Tj + (20i + 20\ \ k) \times T_j + (10\ \ i + 10\ \ k) \times 40\ j$

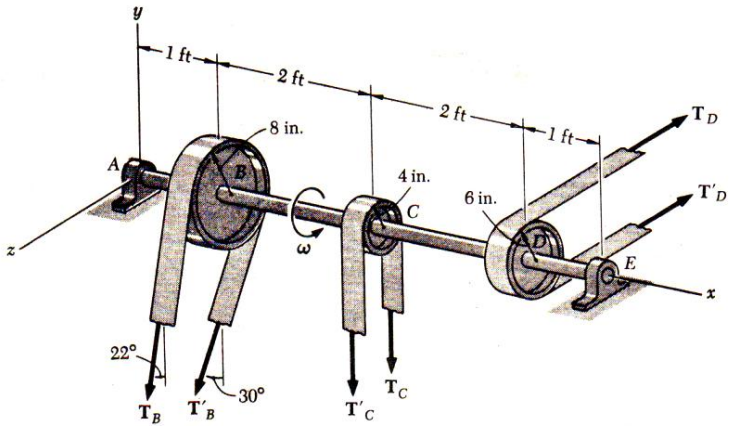
$+15\ \ k \times T\ \ j + (xi + 7k) \times wj = 0$

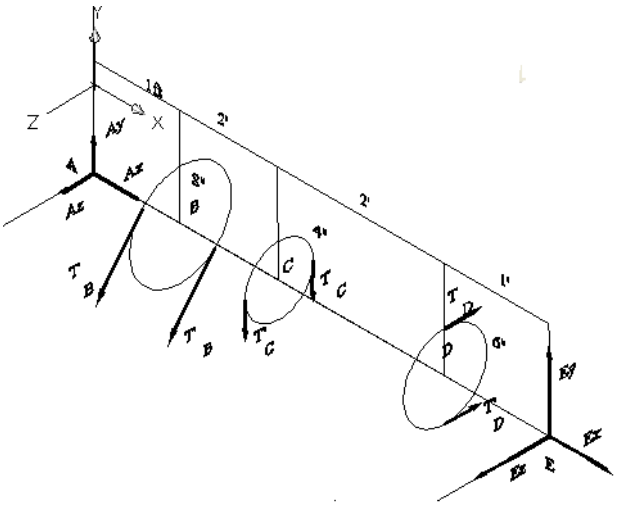
$M_O = 20T(k) + 20T(k) + 400K + 400(-i) +$

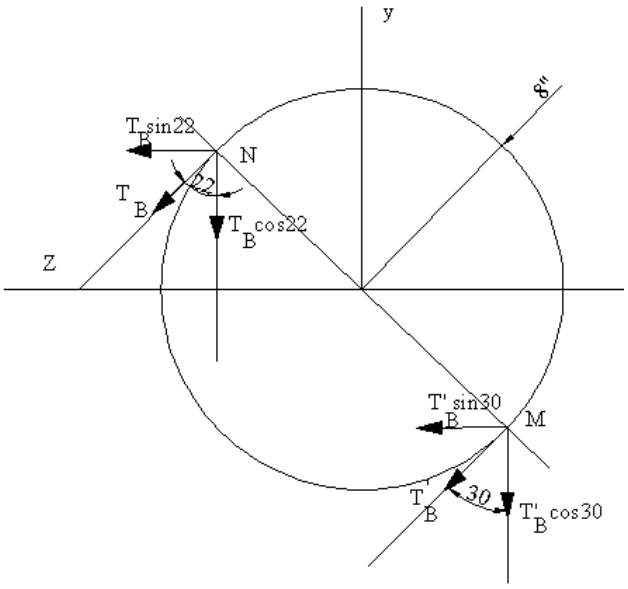
$15T(-i) + wx(k) + wz(-i) = 0$

$\begin{cases} 20T + 20T + 400 + wx = 0 \\ \\ -20T - 400 - 15T - wz = 0 \end{cases}$

4-72 محور انتقال AE بواسطه موتور الکتریکی که بواسطه تسمه مسطحی به قرقره B متصل شده با سرعت یکنواخت دوران می‌کند. قرقره C را می‌توان برای حرکت دادن ماشینی که مستقیماً در زیر نقطه C قرار داده شده بکار برد در حالیکه قرقره D محور دیگری را که موازی محور AE می‌باشد و درست به ارتفاعی برابر با AE که بالای زمین قرار گرفته قرار داده شده می‌چرخاند، به فرض اینکه $T_D = ۳۶lb, T'_C = ۰, T_C = ۰, T_B + T'_B = ۳۶lb$ و $T'_D = ۱۲lb$ باشد (a)کشش در هر قسمت از تسمه گردان قرقره B را ، (b) عکس‌العمل در یاطاقانهای A و E را که در اثر کشش تسمه‌ها ایجاد می‌شود را معین کنید







$$TB + T'B = 36\ \ lb$$
$$TC = T'C = 0$$
$$TD = 36\ \ lb = 36k$$
$$T'D = 12\ \ lb = 12k$$
$$T_B = T_B Sin22k - TBCos22\, j$$
$$T'B = T'BSin30k - T'BCos30\, j$$
$$N\ \ (0, {}^{8}/_{12}\, Sin22, {}^{8}/_{12}\, Cos22)$$
$$N\ \ (0,\ 0.25,\ \ 0.62)$$
$$M\ \ (0, -{}^{8}/_{12}\, Sin30 - {}^{8}/_{12}\, Cos30)$$
$$M\ \ (0, -0.33, -0.577)$$
$$\sum MA = 0$$
$$M_A = (Ey)(6)(k) + 6EZ(-j) + T_D(5)\, j +$$
$$T'_D(5)\, j + TD\ ({}^{6}/_{12})(-i)$$
$$+ T'D\ ({}^{6}/_{12})(i) + (i + {}^{8}/_{12}\, Sin2\, j + {}^{8}/_{12}\, Cos22\ \ K)$$
$$\times (TB\ Sin22\ \ k - TB\ Cos22\ \ j)$$
$$+ (i - {}^{8}/_{12}\ \ Sin30\, j - {}^{8}/_{12}\ \ Cos30k) \times$$
$$(T'B\ Sin30\ \ k - T'B\ Cos30\ \ j)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0.25 & 0.62 \\ 0 & -T_B \cos 22 & T_B \sin 22 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 1 & 0.25 \\ 0 & -T_B \cos 22 \end{matrix}$$

$$= 0.25\ TB\ Sin22\ \ i\ \ - TB\ \ Cos22\ \ \ K$$

$$+0.62\ TB\ Cos22\ i - TB\ Sin22\ j$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -0.33 & -0.577 \\ 0 & -T'_B \cos 30 & T'_B \sin 30 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} i & j \\ 1 & -0.33 \\ 0 & -T'_B \cos 30 \end{vmatrix}$$

$$= -0.33T'B\ Sin30\ i - T'_B\ Cos30\ K$$

$$-0.577\ T'_B\ Cos30\ i - T'_B\ Sin30\ j$$

$$k \quad \rightarrow 6Ey - TB\ Cos22 - T'B\ Cos30 = 0$$

$$j$$

$$\rightarrow -6EZ + 180 + 60 - TB \sin 22 \rightarrow -T'B\ Sin30 = 0$$

$$i \quad \rightarrow -18 + 6 + 0.25\ TB\ Sin22 + 0.62\ Cos22$$

$$-0.33\ T'B\ Sin30i - 0.577\ T'B\ Cos30 = 0$$

$$-12 + 0.25\ T_B\ Sin22 + 0.62\ (T_B)\ Cos22$$

$$-0.33\ (36 - TB)\ Sin30 - 0.577\ (36 - T_B)\ Cos30 = 0$$

$$-12 + 0.094T_B + 0.579T_B - 5.94 + 0.166T_B$$

$$-18 + 0.5T_B = 0$$

$$-35.94 + 1.334T_B = 0 \qquad T_B = 27\ lb$$

$$T'B = 36 - 27 = 9 \qquad T'B = 9\ lb$$

$$6Ey = TB\ Cos22 + T'B Cos30$$

$$6Ey = 27\ Cos22 + 9Cos30$$

$$Ey = 5.47\ lb$$

$$\sum Fy = 0$$

$$Ay + Ey - TB\ Cos22 - T^1BCos30 = 0$$

$$Ay + 5.47 - 27Cos22 - 9Cos30 = 0$$

$$Ay = 27.4\ lb$$

$$\sum Fz = 0$$

$$Az + Ez + TB\ Sin22 + T^1BSin30 - TD - T'D = 0$$

$$-6Ez + 180 + 60 - TB\ Sin22 - T'B\ Sin30 = 0$$

$$6Ez = 240 - 27\ Sin22 - 9\ Sin30$$

$$6Ez = 240 - 10.1 - 4.5 = 225.4\ lb$$

$$Ez = 37.6\ lb \uparrow$$

$$Az + 37.6 + 27Sin22 - 9\ Sin30 - 36 - 12 = 0$$

$$Az + 37.6 + 10.1 + 4.5 - 36 - 12 = 0$$

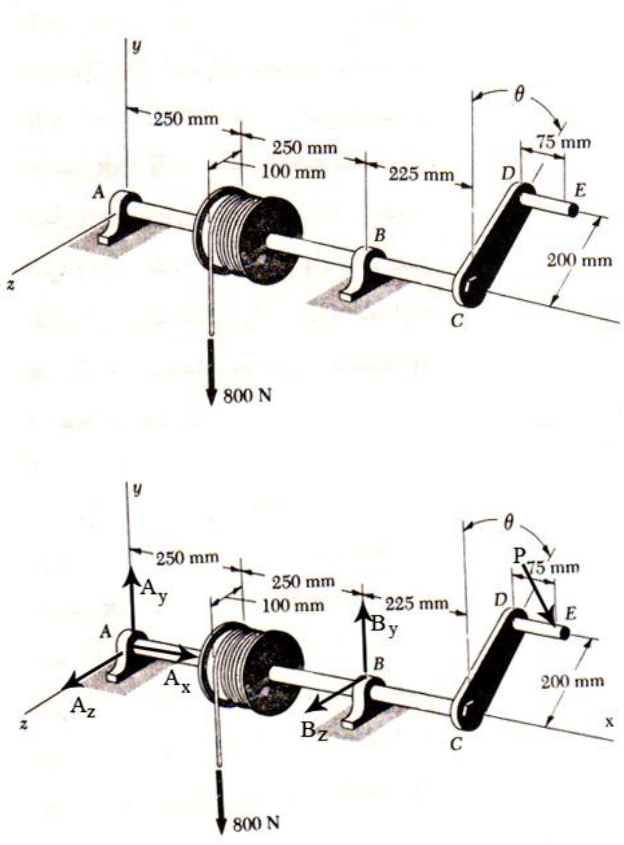
$$Az = -4.2\ lb$$

$$\vec{A} = 27.4j - 4.2\ k$$

$$\vec{E} = 5.47j + 37.6\ k$$

$$Ax + Ex = 0 \qquad \text{نا معین}$$

4-74 بالا بری مطابق شکل بوسیله نیروی قائمP وارد بـر نقطـه Eدر وضع تعادل است.میدانیم که $\theta = 60^\circ$ ،معین کنید مقدارP را و عکس العمل نقاطA,B را، بـه فـرض اینکـه محـور در وضـع تعادل بوسیله نیرویی مانند P که بـه نقطـه E وارد مـی‌شـود در امتدادی عمود بر صحفه CDE قرار گیرد حل کنید.



$0.5\ BZ = 0.8\ (400)(0.5)$

$Bz = 320\ \ N$

$\vec{B} = 954j + 320k$

$\sum Fy = 0$

$Ay - 800 + 954 - 400Sin60 = 0$

$Ay - 800 + 954 - 346 = 0 \qquad Ay = 192\ \ N$

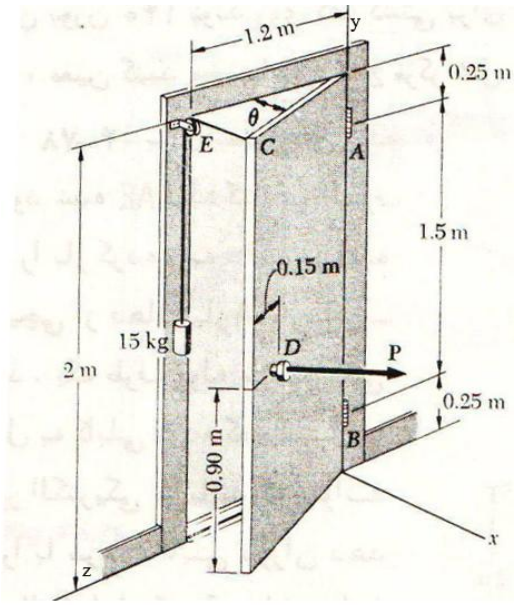
$\sum Fz = 0$

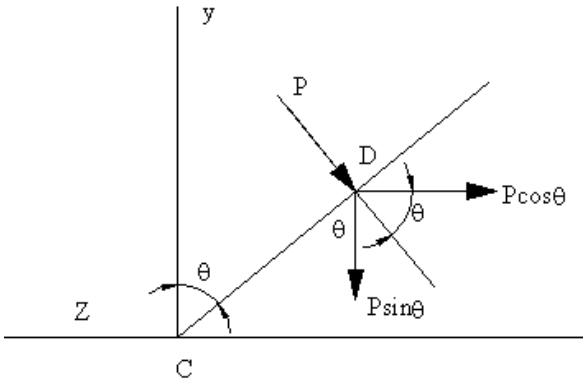
$Az + Bz - p\ Cos60 = 0$

$Az + 320 - 400\ \ (0.5) = 0 \qquad Az = -120\ \ N$

$\vec{A} = 192\ \ j - 120\ \ k$

4-80 دربی ۲۰kg بطور خودکار بواسطه آویزان کردن وزنه مقاوم ۱۵ کیلوگرم به کابلی که متصل به نقطه C می‌باشد بسته می‌شود و با نیروی P وارد بر دستگیره D در امتداد عمود بر درب باز می‌شود. معین کنید مقدار P و مؤلفه‌های عکس‌العملها را در نقاط A و B و وقتی $\theta = ۹۰^{\circ}$ است. فرض می‌شود که بر لولای A هیچ نیروی فشار محوری وارد نشود.





$p = -p\ Cos\theta\ k - p\ Sin\theta\ j$

$p = -p\ Cos60\ \ k - p\ Sin60\ \ j$

$E\ (0.8\ ,\ 0.2\ Cos60, -0.2\ Sin60)$

$E\ (0.8\ ,\ 0.1, -0.173)$

$\vec{AB} = 0.8\ i + 0.2\ Cos60\ \ j - 0.2\ \ Sin60\ \ k$

$\sum MA = 0$

$rAE \times p + (By)\ \ (0.5)\ \ (k) + Bz(0.5)\ \ (-j)$

$+ 800\ \ (0.1)i + 800\ \ (0.25)\ \ (-k) = 0$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.8 & 0.1 & -0.173 \\ 0 & -P\sin 60 & -P\cos 60 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 0.8 & 0.1 \\ 0 & -P\sin 60 \end{matrix}$$

$= -p\ \ (0.1)\ \ Cos60\ \ i - 0.8p\ \ Sin60\ \ k$

$\qquad - 0.173\ p\ \ Sin60\ \ i + 0.8p\ \ Cos60\ \ \ j$

$M_A = (By)\ \ (0.5)\ \ (k) - Bz(0.5)\ \ (j)$

$+ 80i - 200\ \ \ k\ \ \ - p\ \ (0.1)\ \ Cos60\ \ i$

$- 0.8p\ \ Sin60\ \ k$

$\ - 0.173\ p\ \ Sin60\ \ i + 0.8p\ \ Cos60\ \ \ j$

$i \quad \rightarrow 80 - 0.10\ p\ \ Cos60 - 0.173\ p\ \ Sin60 = 0$

$j \quad \rightarrow -0.5\ \ Bz + 0.8p\ \ Cos60 = 0$

$k \quad \rightarrow -0.5By - 200 - 0.8pSin60 = 0$

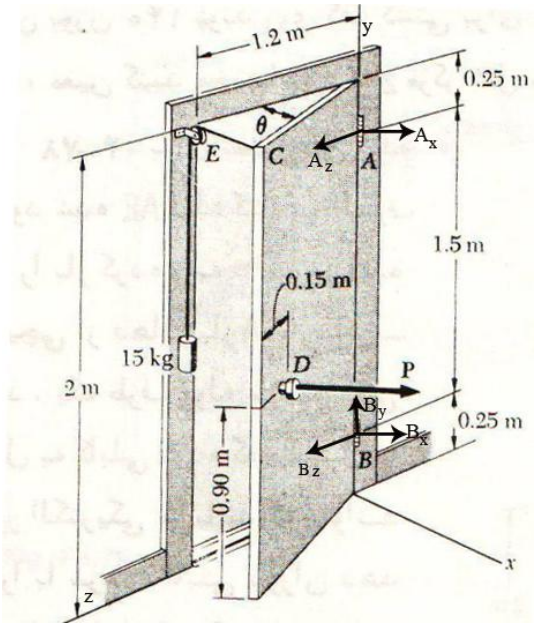
$80 - 0.05p - 0.15p = 0$

$80 = 0.2p$

$p = 400\ \ N$

$0.5By = 200 + 0.8\ \ (400)\ \ Sin60 = 200 + 277.12$

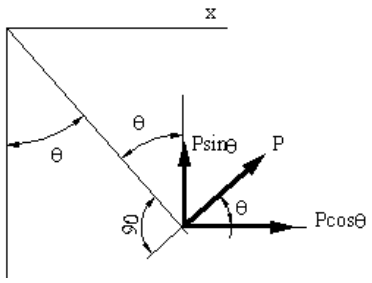
$By = 954\ \ N$



بر لولای A هیچ نیروی فشار محوری وارد نمی شود.$A_y=0$

وزن درب $w = 20\ \ kg$

$\theta = 90^{\circ}$



$w' = 15\ \ kg$

$\vec{p} = Cos\theta\ i - pSin\theta\ k$

$\theta = 90$

$\overrightarrow{p} = -\ pk$

$A\ (0\ ,\ 1.75\ 0)$

$B\ (0,\ 0.25\ ,\ 0)$

$D\ (1.05\ Sin\theta\ ,\ 0.9,\ 1.05\ Cos\theta)$

$\theta = 90$

$E\ (0,2,1.2)$ $\qquad$ $D\ (1.05\ ,\ 09\ ,\ 0)$

$\sum MA = 0$

$$M_A = r_{AD} \times P + (r_{AC} \times F_{CE}) + r_{AB} \times F_B + (\frac{1.2}{2} i \times wj) = 0$$

$\vec{CE} = -1.2i + 1.2k$

$\vec{AC} = 1.2i + 0.25j$

$r_{AD} = 1.05i - 0.85\ j$

$$F_{CE} = \frac{15\ \ (-1.2i + 1.2k)}{\sqrt{1.44 + 1.44}}$$

$F_{CE} = -10.6i + 10.6k$

$M_A = (1.05i - 0.85\ j) \times (-pk) +$

$(1.2i + 0.25\ j) \times (-10.6 + 10.6k)$

$+ (-1.5\ j) \times (Bx\ i + By\ \ j + BZ\ \vec{K})$

$+ 0.6i \times -20\ j = 0$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1.2 & 0.25 & 0 \\ -10.6 & 0 & 10.6 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 1.2 & 0.25 \\ -10.6 & 0 \end{matrix}$$

$= 2.65i + 2.65k - 12.72\ j$

$M_A = (1.05)(-p)(-j) + 0.82\ p(i) +$

$2.65i + 2.65k - 12.72\ j$

$-1.5Bx\ \ (-k) - 1.5BZ\ \ i - 12k = 0$

$i \ \rightarrow 0.85\ \ P + 2.65 - 1.2\ \ BZ = 0$

$j \rightarrow 1.05\ \ P - 12.72 = 0$

$\Rightarrow P = 12.11\ \ kg = 12.11x9.81 = 118.9\ \ N$

$1.5\ \ Bx + 2.65 - 12 = 0$

$\Rightarrow Bx = 6.23\ \ kg = 6.23x9.81 = 61.1\ \ N$

$0.85\ \ (12.1) + 2.65 = 1.5Bz$

$Bz = 8.63\ \ kg = 8.63x9.81 = 84.7\ \ N$

$\sum Fy = 0$

$By - 20 = 0$

$By = 20\ \ kg = 20x9.81 = 196.2\ \ N$

$\sum Fx = 0$

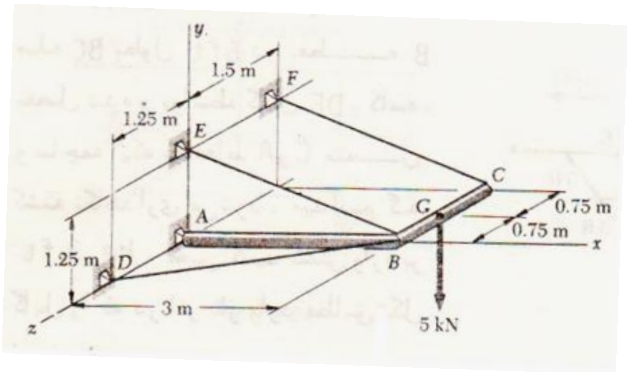
$Ax + Bx - 10.6 = 0$

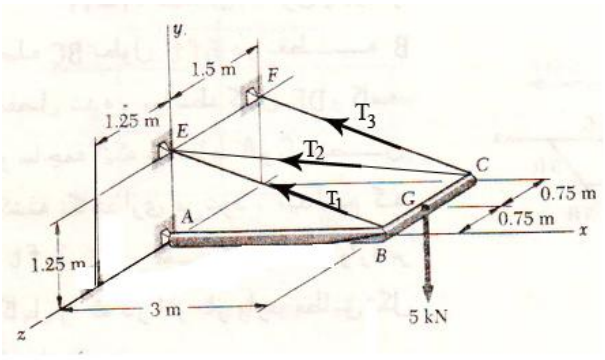
$Ax = 4.37\ \ Kg = 4.37x9.81 = 42.8\ \ N$

$\sum Fz = 0$

$$Az + Bz + 10.6 - p = 0$$
$$Az + 8.63 + 10.6 - 12.11 = 0$$
$$Az = -7.12 \ \ kg = -7.12 x 9.81 = -69.8 \ N$$
$$\vec{A} = 42.8i - 69.8k$$
$$\vec{B} = 61.1i + 196.2j + 84.7k$$

4-88 میله‌ای به شکل L، ABC غیر قابل تغییر شکل بواسطه کاسه ساچمه در نقطه A و سه کابل نگاهداری می‌شود. به فرض اینکه کابل BD را برداشته و بجای آن کابلی که دو نقطه E و C را بهم وصل می‌کند جایگزین نماییم معین کنید کشش در هر کابل و عکس‌العمل در نقطه A که بواسطه نیروی ۵ KN بر نقطه G وارد می‌شود بدست آورید.





$A\ (0,0,0)$, $B\ (3,0,0)$ $G\ (3,0,-0.75)$

$F\ (0,1.25,-1.5)$ $E\ (0,1.25,0)$

$C\ (3,0,-1.5)$

$T_1 = T_{BE}$ $T_2 = T_{CE}$ $T_3 = T_{CF}$

$$\vec{BE} = -3i + 1.25j$$

$$\vec{CE} = -3i + 1.25j + 1.5k$$
$$\vec{CF} = -3i + 1.25j$$
$$F_{\vec{BE}} = \frac{T_1\ (-3i + 1.25j)}{\sqrt{10.56}} = T_1\ (-0.923i + 0.384\ j)$$
$$F_{CE} = \frac{T_2\ (-3i + 1.25j + 1.5)}{\sqrt{12.81}} =$$
$$T_2\ (-0.838i + 0.354j + 0.42k)$$
$$T_{CF} = T_3\ (-0.923i + 0.384j)$$
$$\vec{BA} = -3i$$
$$\vec{CA} = -3i + 1.5k$$
$$GA = -3i + 0.75k$$
$$\sum MA = 0$$
$$M_A = r_{BA} \times F_{BE} + r_{CA} \times F_{CE} + r_{CA} \times F_{CF}$$
$$+ r_{GA} \times wj = 0$$

$$r_{CA} \times F_{CE} = T_2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & 1.5 \\ -0.838 & 0.35 & 0.42 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ -3 & 0 \\ -0.83 & 0.35 \end{matrix}$$

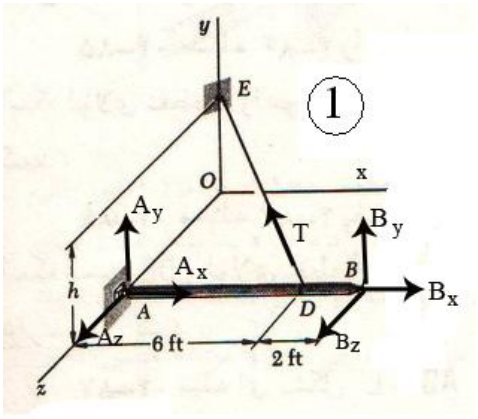
$$= T_2\ \left[-1.26j - 1.05k - 0.525i + 1.26j\right] =$$
$$T_2(-1.05k - 0.525i)$$
$$r_{BA} \times F_{BE} = -3i \times (-0.923i + 0.384j)$$
$$T_1 = -1.152T_1 k$$
$$r_{GA} \times w_j = (-3i + 0.75k) \times -5j$$
$$= 15k - 3.75\ (-i) = 15k + 3.75i$$

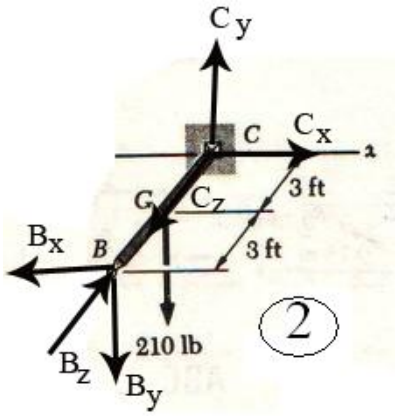
$$r_{CA} \times F_{CF} = T_3 \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & 1.5 \\ -0.923 & 0.584 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ -3 & 0 \\ -0.923 & 0.384 \end{matrix}$$

$$= T_3\ (-1.384j - 1.152k + 0.576i)$$

$$M_A = -1.384\ T_3\ j - 1.152\ T_3 + 0.576\ T_3\ i - 1.05\ T_2\ k - 0.525\ T_2\ i$$
$$-1.125T_1\ k + 15k + 3.75i = 0$$

$$i \quad 0.576T_3 - 0.525T_2 + 3.75 = 0$$
$$k \quad -1.152T_3 - 1.05T_2 - 1.152T_1 + 15 = 0$$





$\vec{DE} = -6i + 3j - 6k$

$F_{DE} = \frac{T}{\sqrt{81}}(-6i+3j-6k) = \frac{T}{9}(-6i+3j-6k)$

شکل (۱) $\sum MA = 0$

$8B_Z\ (-j) + 8By\ k + 2T\ K - 4T\ (-j) = 0$

$j \quad -8B_Z + 4T = 0$

$k \quad 8By + 2T = 0$

شکل (۲) $\sum MC = 0$

$(Bx)(6)(-j) + By\ (6)(i) + 210\ (3)\ i = 0$

$j \quad 6Bx = 0$

$i \quad 6By = 210\ (3) = 0$

$8By + 2T = 0 \qquad By = -105\ lb$

$8\ (-105) + 2T = 0$

$T = 420\ lb$

$j \quad -1.384T_3 = 0$

$T_3 = 0$

$1.125T_1 = 15 - (1.05)(7.16)$

$T_1 = 6.5\ KN$

$\sum Fy = 0 \quad Ay - 5 + 0.384\ T_1 + 0.35\ T_2 = 0$

$Ay - 5 + 0.384(6.5) + 0.35(7.16) = 0$

$Ay = 0$

$\sum Fx = 0$

$Ax - 0.43T_1 - 0.838T_2 = 0$

$Ax = 0.423\ (6.5) + 0.838\ (7.16)$

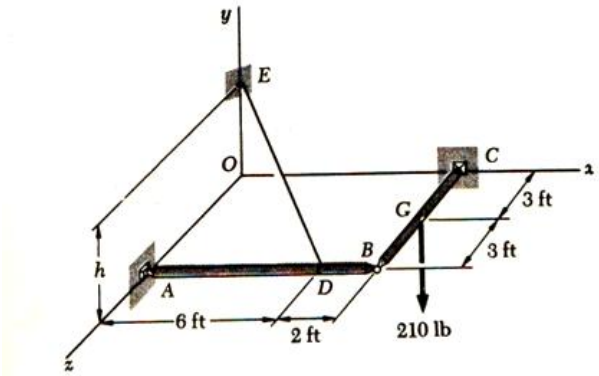
$Ax = 12\ KN$

$\sum Fz = 0$

$Az + 0.42T_2 = 0 \qquad Az = -3\ KN$

$\vec{A} = 12i - 3k$

4-92 میله AB بطول ۸ft و میله BS بطول ۶ ft در نقطه B مفصل شده و بواسطه کابل DE و کاسه و ساچمه‌ای که به نقـاط A وC متصل گشته نگاهداری می‌شود. می‌دانیم که h=3ftمعین کنید کشش وارد بر کابل را که در اثر بار وارد مطابق شکل ایجـاد می‌شود.

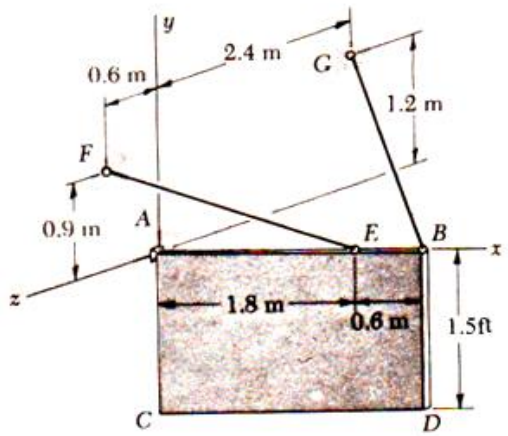


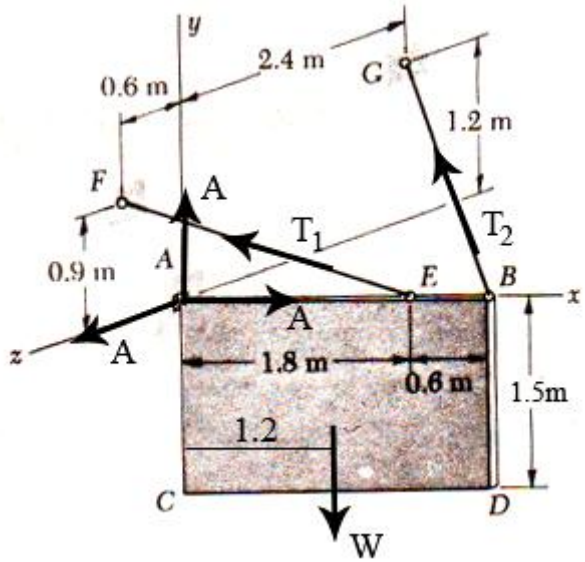
$E\ (0,3,0) \quad C\ (8,0,6)$

$D\ (6,0,6) \quad G\ (8,0,3)$

$AD = 6i$

4-106 صفحه‌ای همگن بابعاد 1.5x2.4 متر و به وزن ۱۲۰kg در نقطه A روی کاسه ساچمه متکی بوده و بـه وسـیله دو کابـل نگاهداری می‌شود. معین کنید کشش درهر کابل و عکـس‌العمـل در نقطه A را.





$w = 120\ kg \qquad w = 1177\ N$

$A\ (0,0,0) \qquad F\ (0,0.9,0.6) \quad E\ (1.8,0,0)$

$B\ (2.4,0,0) \quad G\ (0,1.2,-2.4)$

$T_{EF} = T_1$

$T_{BG} = T_2$

$\vec{EF} = 1.8i + 0.9j + 0.6k$

$$T_{EF} = \frac{T_1}{\sqrt{4.41}}(-1.8i + 0.9j + 0.6k)$$

$$T_{EF} = T_1(-0.857i + 0.43j + 0.286k)$$

$\vec{BG} = -2.4i + 1.2j - 2.4k$

$$T_{BG} = \frac{T_2}{\sqrt{12.96}}(-2.4i + 1.2j - 2.4k)$$

$$T_{BG} = T_2\ (-0.66i + 0.33j - 0.66k)$$

$\vec{EA} = -1.8\ i \qquad \vec{BA} = -2.4\ i \qquad \vec{A'A} = -1.2\ i$

$\sum MA = 0$

$M_A = r_{BA} \times F_{BG} + r_{EA} \times F_{EF} + r_{A'A} \times w_j = 0$

$-2.4i\ xT_2(-0.66i + 0.33j - 0.66k) - 1.8j\ xT_1(-0.857\ i)$

$+ 0.43j + 0.286k) - 1.2i \times -120j = 0$

$M_A = -0.8T_2\ k + 1.6T_2(-j) - 0.774T_1\ K$

$-0.515T_1\ (-j) + 144\ k = 0$

$k \quad \rightarrow -0.8T_2 - 0.774T_1 + 144 = 0$

$j \qquad\qquad\qquad \rightarrow -1.6T_2 = 0.515T_1 = 0$

$\Rightarrow\ T_1 = 3.1\ T_2$

$-0.8\ T_2 - 0.774\ (3.1\ T_2) + 144 = 0$

$-0.8T_2 - 2.4T_2 + 144 = 0 \quad T_2 = 45\ kg$

$T_2 = 45 \times 9.81 = 441\ N$

$T_1 = 3.1 \times 45 = 139.8 \times 9.81 = 1372\ N$

$\sum F_y = 0$

$Ay - 1177 + 0.43\ (T_1) + 0.33\ T_2 = 0$

$Ay - 1177 + 590 + 145.5 = 0 \qquad Ay = 441.5\ N$

$\sum F_x = 0 \qquad Ax - 0.857T_1 - 0.66T_2 = 0$

$Ax = 1176 + 291 = 1467\ N$

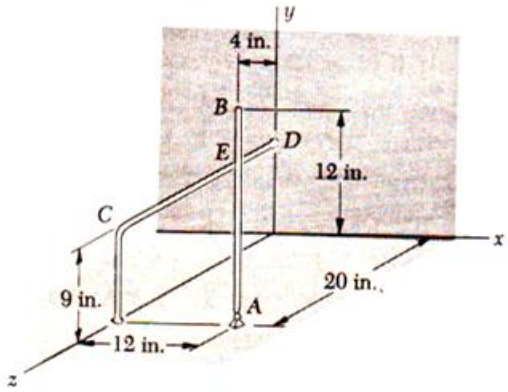
$\sum F_Z = 0 \qquad Az + T_1\ (0.286) - 0.66T_2 = 0$

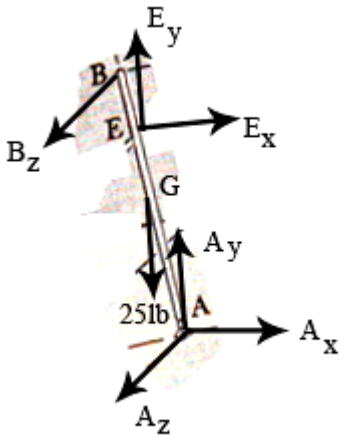
$Az + 392.4 - 294 = 0 \qquad Az = -98.4\ N$

$\vec{A} = 1467i + 441.5j - 98.4k$

$\bar{A} = 1535\ Nt$

4-108 میله یکنواخت AB به وزن ۲۵ پوند به واسطه کاسه ساچمه‌ای در نقطه A و به واسطه میله خمیده CD و دیوار قائم نگاهداری می‌شود، فرض می‌شود دیوار و میله‌ها بدون اصطکاک باشند، معین کنید (a) نیرویی که میله CD بر میله AB وارد می‌کند. (b) عکس‌العمل‌های نقاط A و B را. (راهنمایی نیروی وارد از میله CD بر AB باید عمود بر هر دو میله باشد).





$E\ (0,9,7)\quad A\ (12,0,20)\quad B\ (-4,12,0)\quad G\ (4,6,10)$

$$\vec{BE} = +4i - 3j + 7k$$

$$\vec{EA} = +12i - 9j + (20-7)\ k$$

$$\vec{BE}.\vec{EA} = \vec{BE}.\vec{EA}\ Cos\theta \qquad \theta = 0$$

$$Cos\theta = 1$$

$$4\ (12) - 3\ (-9) + 7\ (20 - Z) =$$

$$(\sqrt{Z^2 + 25})(\sqrt{225 + (20-Z)^2}$$

$$Z = 5$$

$$\sum M_Z = 0$$

$$M_Z = r_{AE} \times A + r_{GE} \times w_j + r_{BE} \times r_B = 0$$

$$\vec{AE} = -12i + 9j - 12k$$

$$\vec{GE} = -4i + 3j - 5k$$

$$\vec{BE} = 4i - 3j + 5k$$

$$M_Z = (-12i + 9j - 15k)x(Axi + Ay\ j + Az\ k)$$

$$+(-4i + 3j - 5k) \times -25j$$

$$+(4i - 3j + 5k) \times B_z\ k = 0$$

$$M_A = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ -12 & 9 & -15 & -12 & 9 \\ Ax & Ay & Az & Ax & Ay \end{vmatrix}$$

$$+100k + 125(-i) + 4B_Z(-j) - 3B_Z(i)$$

$$M_A = 9A_z\ i - 15A_x\ j - 12A_y\ k$$

$$-9Ax\ k + 15Ay\ i + 12Az\ j$$

$$+100k + 125(-i) + 4B_Z(-j) - 3B_Z(i)$$

$$i \quad \rightarrow 9Az + 15Ay - 125 - 3Bz = 0$$

$$j \quad \rightarrow -15Ax + 12Az - 4Bz = 0$$

$$k \quad \rightarrow -12Ay - 9Ax + 100 = 0$$

$$\sum Fz = 0 \quad Bz + Az = 0 \qquad BZ = -AZ$$

چهار معادله چهار مجهول

1)

$$9Az + 15Ay - 125 + 3Az = 15Ay + 12Az - 125 = 0$$

$$-15Ax + 12Az + 4Az = 0$$

2) $\quad -15Ax + 16Az = 0$

3) $\quad -12Ay - 9Ax + 100 = 0$

$$\begin{cases} +15Ay + 12(\frac{15}{16})Ax - 125 = 0 \rightarrow \\ 15Ay + 11.25Ax - 125 = 0 \\ 15Ay + 12Az - 125 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15Ay + 125 - 11.25 + 12Az - 125 = 0 \\ 12Az = 11.25Ax \\ 16Az - 15Ax = 0 \end{cases}$$

$Az = 0.9375Ax$ جواب بی شمار دارد.پس

$Ax = -8\ lb \qquad Az = -7.5\ lb$

$Bz = +7.5\ lb$

$9\ (-7.5) + 15Ay - 125 - 3\ (+7.5) = 0$

$-67.5 + 15Ay - 125 - 22.5 = 0$

$Ay = 14.33\ lb$

$15Ay = 215$

$\sum F_y = 0 \qquad Ey - 25 + Ay = 0$

$Ey = 25 - 14.33 = 10.66\ lb$

$\sum F_x = 0$

$Ex + Ax = 0 \qquad Ex = 8\ lb$

$\vec{E} = 8i + 10.66j$

$\vec{A} = -8i + 14.33j - 7.5\ k$

$Ax = 10\ lb$

$Az = 9.4\ lb \qquad BZ = -9.4$

$9\ (9.4) + 15Ay - 125 - 3\ (-9.9) = 0$

$84.6 + 15Ay - 125 + 28.2 = 0$

$Ay = 0.813 \Downarrow$

$Ey = 25 - 0.813 = 24.18$

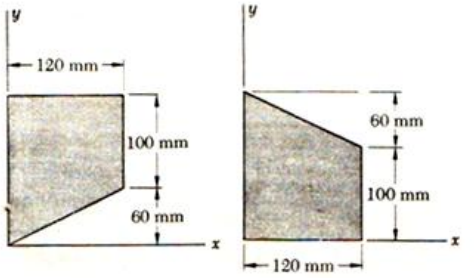
جواب دیگر $Ex = -10$

$\vec{E} = -10i + 0.813j$

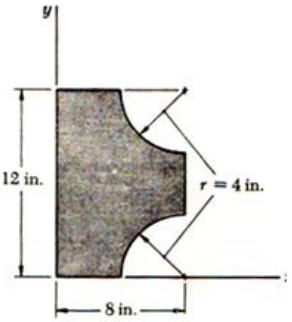
$\vec{A} = 10i + 0.13j + 9.4k$

فصل ۵

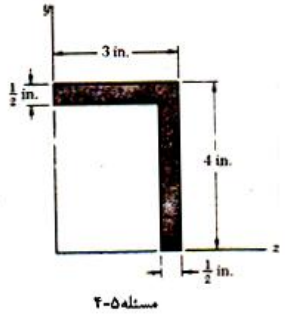
5-1 تا 5-12 مختصات مرکز سطحی صفحات زیر را تعیین کنید.



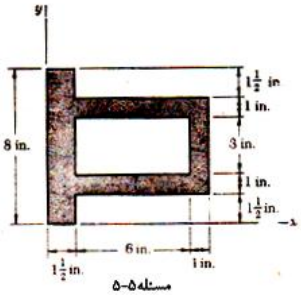
مسئله ۵-۱ مسئله ۵-۲



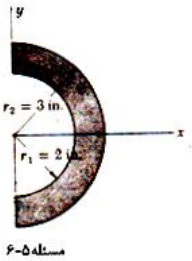
مسئله ۵-۳



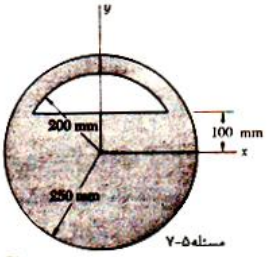
مسئله ۵-۴



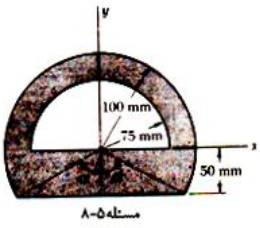
مسئله ۵-۵



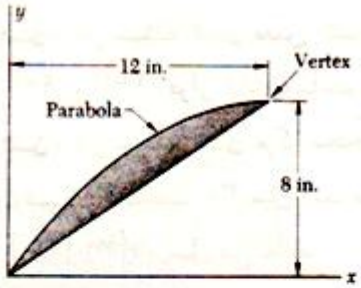
مسئله ۵-۶



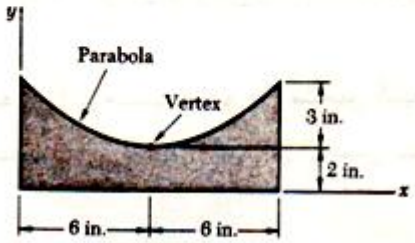
مسئله ۵-۷



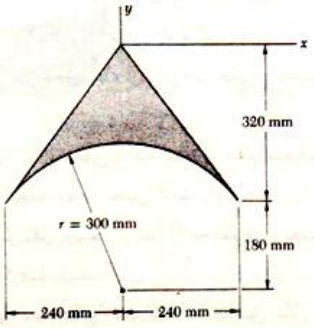
مسئله ۵-۸



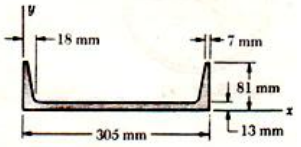
مسئله ۵-۹



مسئله ۵-۱۰

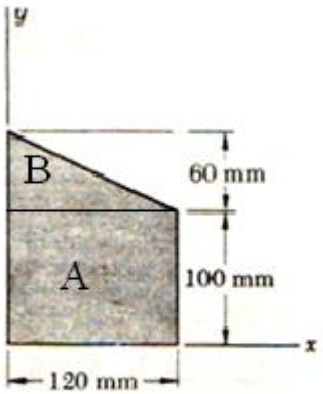


مسئله ۵-۱۱



مسئله ۵-۱۲

5-2



مسئله ۵-۲

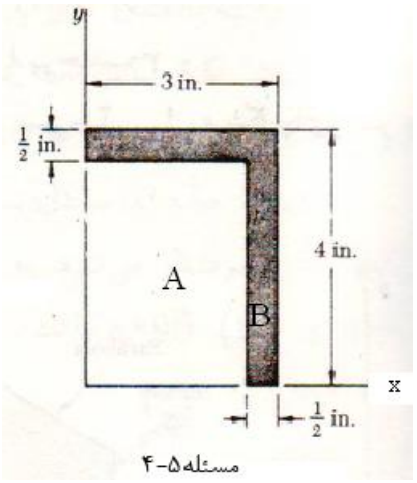
کل	مساحت mm^2	xc^{mm}	Ax_c	y_c	Ay_c
A	12000	60	72,0000	50	60,0000
B	3600	40	144000	120	432000
Total	15600	--	864000	--	1032000

$$\bar{yc} = \frac{Ayc}{A} \qquad \bar{x}_c = \frac{AxC}{A}$$

$$\bar{x}_c = \frac{864000}{15600} = 55.38\ ^{mm}$$

$$\bar{yc} = \frac{1032000}{15600} = 66.15\ ^{mm}$$

5-4



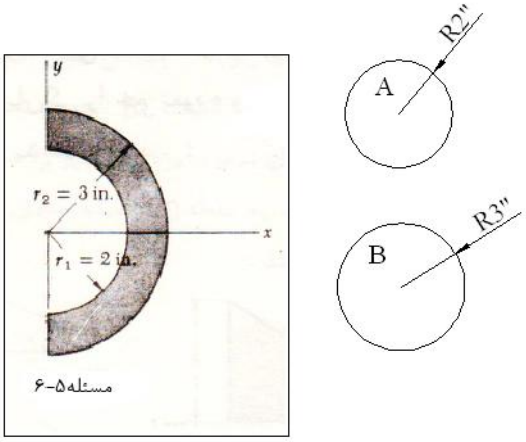
$A \rightarrow 2.5'' \times 3.5''$ $\quad B = 3'' \times 4''$

شکل	مساحت $1n^2$	xc^{1n}	Ax_c	y_c	Ay_c
A	-8.75	2.5/2	-10.44	3.5/2	-15.31
B	12	1.5	18	2	24
Total	3.25	--	7.06	--	8.69

$$\bar{x}_c = \frac{7.06}{3.25} = 2.17\ ^{1n}$$

$$\bar{yc} = \frac{8.69}{3.25} = 2.67\ ^{1n}$$

5-6



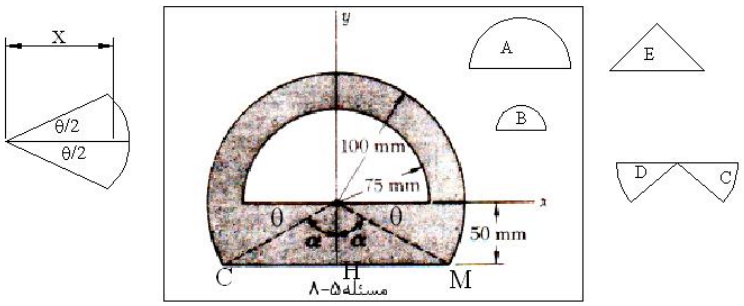
$$X_G = \frac{4R}{3\pi}$$

شکل	مساحت	xc^{mm}	Ax_c	X_G	Ay_c
A	-2π	0	0	$\frac{4(2)}{3\pi}$	$-16/3$
B	4.5π	0	0	$\frac{4(3)}{3\pi}$	18
Total	2.5π	--	0	--	$38/3$

$$\bar{y}_c = \frac{0}{2.5\pi} = 0$$

$$\bar{X}_C = \frac{\frac{38}{3}}{2.5\pi} = 1.16\ in$$

5-8



$$\overline{X} = \frac{2r\sin\theta/2}{3\theta/2}$$

$$\cos\alpha = \frac{50}{100} = 0.5$$

$$\alpha = 60 \qquad \theta = 30$$

$$HM = 100Sin60 = 86.6$$

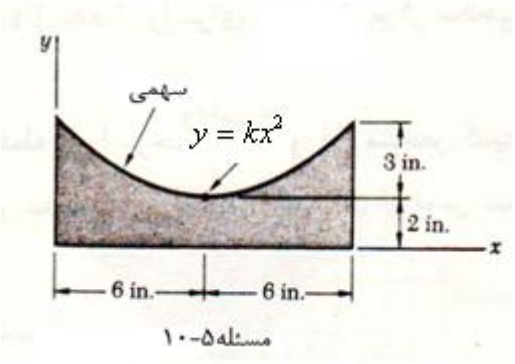
$$CM = 173.2$$

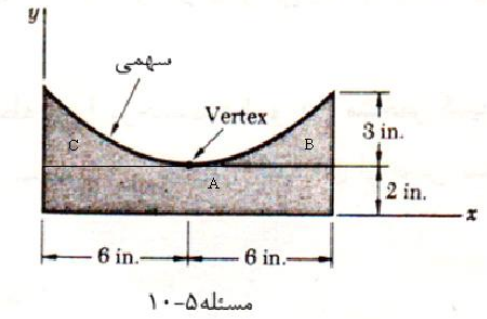
شکل	مساحت	x_c
A	5000π	0
B	$-\frac{5625\pi}{2}$	0
C	$\frac{1}{2}\theta\ r^2$ 2618	$\overline{x}\ Cos15$ 63.65
D	$\frac{1}{2}\theta\ r^2$ 2618	-63.65
E	$OH \times {}^{CM}/_{2}$ 4330	0
Total	16438	0

Axc	y_c	Ayc
0	$\frac{4(100)}{3\pi}$	666666.66
0	$\frac{4(75)}{3\pi}$	-281250
166647	$\overline{x}\ Sin15$ -17.06	-44653
-166647	-17.06	-44653
0	$^{2}/_{3}(50)$ -33.33	-144333.33
0	—	151777.33

$$\overline{yc} = \frac{151777.33}{16438} = 9.26 \quad in$$

5-10



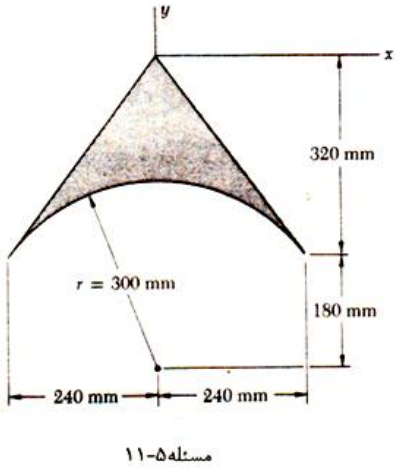


شکل	مساحت	x_c	Axc	y_c	Ayc
A	24	6	144	1	24
B	$6\times{}^{3}\!/_{3}$	$6+4.5$ (10.5)	63	2+0.9 (2.9)	17.4
C	6	$6-4.5$ 1.5	9	2.9	17.4
Total	36		216		58.8

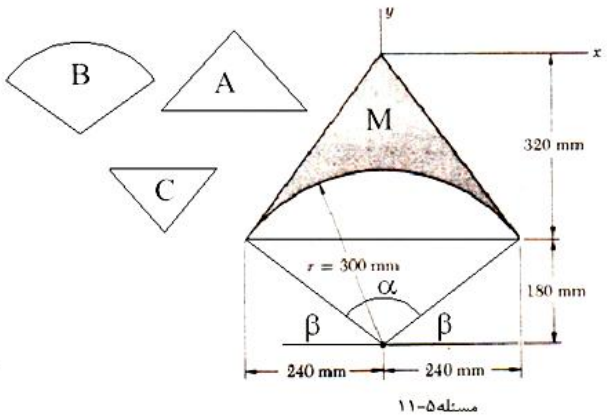
$$\bar{yc}=\frac{58.8}{36}=1.633\ in$$

$$x_c=\frac{216}{36}=6\ in$$

5-11



مسئله۵-۱۱



مسئله۵-۱۱

$$M=A-(B-C)=A-B+C$$

$$Cos\beta=\frac{240}{300}$$

$$Area\ of\ B=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}(\pi)(\frac{106.28}{180})(300)^2=83472\ mm^2$$

$$\beta=36.86^\circ \qquad \alpha=106.3$$

$$\bar{y}=\frac{2rSin\alpha/2}{3\alpha/2}=\frac{(2)(300)\ Sin53.14}{3(53.14)(\pi/180)}=172.53$$

$$\bar{x}_c=0$$

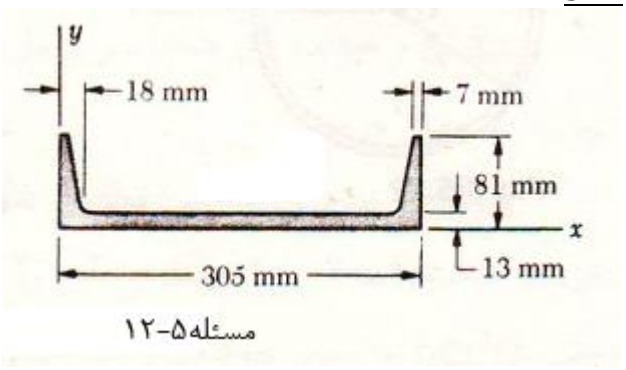
شکل	مساحت	x_c	Axc
A	76800	0	0
-B	$-\frac{1}{2}\alpha r^2$ -83472	0	0
C	$AB\times{}^{180}\!/_{2}$ 43200	0	0
Total	36528		

y_c	Ayc
$^{2}\!/_{3}(320)$ -213.33	-16383744
$500-172.53$ -327.47	$+27334608.6$
$320+60$ -380	-16416000
	-5465136

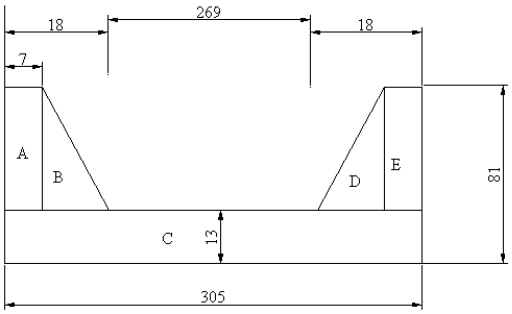
$$\bar{y}_c=\frac{-5465136}{36528}=-149.6\ \ mm$$

$$\bar{x}_c=0$$

5-12



مسئله۵-۱۲



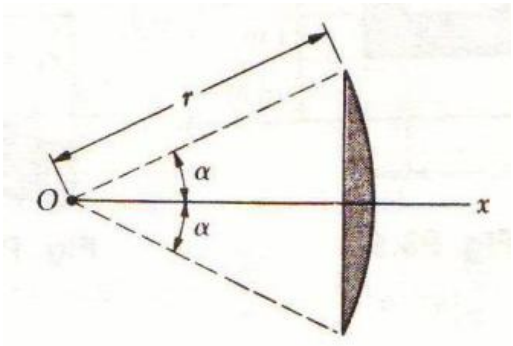
شکل	مساحت	x_c
C	305×13 (3965)	$305/2$
B	$11\times68/2$ (374)	$7+11/3$ 10.666
A	68×7 (476)	$7/12$
D	$11\times68/2$ 374	$18+269+6$ (293)
E	68×7 (476)	$18+269+11+\frac{7}{2}$ (301.5)
total	5665	–

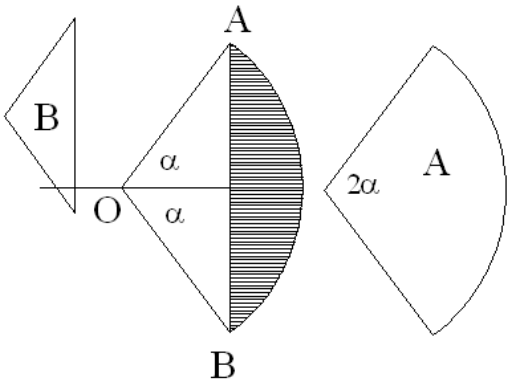
Axc	y_c	Ayc
604662.5	$13/2$	25772.5
3989.3	$13+68/3$ 35.666	13339.1
1666	$13+68/2$ 47	22372
109582	35.666	13339.1
143514	47	22372
863414	–	96195

$$\bar{x}_c = \frac{863414}{5665} = 125.5 \quad mm$$

$$\bar{y}_c = \frac{97195}{5665} = 17.2 \quad mm$$

5-14





$$S_{AOB} = \frac{r^2}{2} Sin2\alpha$$

شکل	مساحت	x_c
A	$\frac{1}{2}(2\alpha r^2)$	$\frac{2rSin\alpha}{3\alpha}$
-B	$\frac{-r2}{2}Sin2\alpha$	$\frac{2rCos\alpha}{3}$

Axc	y_c	Ayc
$\frac{2r^3Sin\alpha}{3}$	0	0
$\frac{-r^3Sin2\alpha\ Cos\alpha}{3}$	0	0

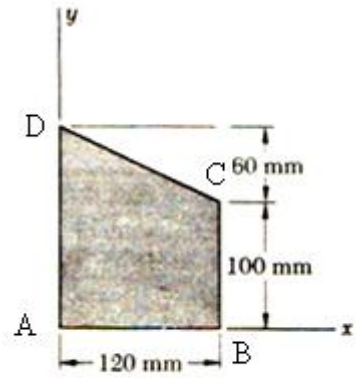
$$X_C=\frac{2r^3\!/_3\,Sin\alpha-r^3\!/_3\,Sin2\alpha\ Cos\alpha}{\alpha r^2-r^2\!/_2\,Sin2\alpha}$$

$$X_C=\frac{r\!/_3(2Sin\alpha-Sin2\alpha\ Cos\alpha)}{\frac{1}{2}\ (\alpha-Sin2\alpha)}=\frac{4r}{3}\left(\frac{2Sin\alpha-2Sin\alpha\ \cos^2\alpha}{(\alpha-Sin2\alpha)}\right)$$

$$X_C=\frac{4r}{3}\left(\frac{2Sin\alpha-2Sin\alpha\ \cos^2\alpha}{(\alpha-Sin2\alpha)}\right)$$

$$X_C=\frac{4r}{3}\left(\frac{\sin^3\alpha}{(\alpha-Sin2\alpha)}\right)$$

5-16سیم یکنواخت باریکی را خم نموده و محیط آن را به شکل زیر در آورده مرکز ثقل سیمها را بدست آورید.



مسئله ۲-۵

$$DC=\sqrt{(60)^2+(120)^2}$$

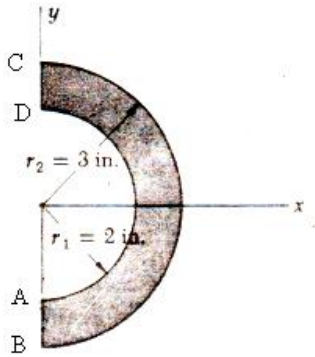
$DC=134.16$

شکل	mm طول	x_c	Lx_c	y_c	Ay_c
AB	120	60	7200	0	0
BC	100	120	12000	50	5000
DC	134.16	60	8050	130	17441
AD	160	0	0	80	12800
Total	514.16		27250		35241

$$\bar{x}_c=\frac{L\ x_c}{L}=\frac{27250}{514.16}=53\ \ mm$$

$$\bar{y}_c=\frac{L\ y_c}{L}=\frac{35241}{514.16}=68.6\ \ mm$$

5-18 سیم یکنواخت باریکی را خم نموده و محیط آن را به شکل زیر در آورده مرکز ثقل سیمها را بدست آورید.



مسئله۵-۶

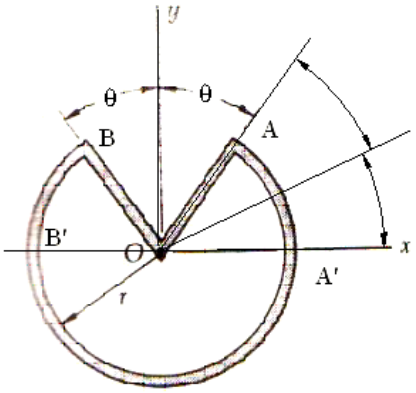
شکل	طول	x_c	$L\ x_c$	y_c	$L\ y_c$
AB	1	0	0	-2.5	-2.5
قوس $\overset{\frown}{BC}$	$r\pi$ (3π)	$\frac{2(3)}{\pi}$	18	0	0
قوس $\overset{\frown}{AD}$	$r\pi$ (2π)	$\frac{2(2)}{\pi}$	8	0	0
CD	1	0	0	+2.5	+2.5
total	$2+5\pi$		26	0	0

$$\bar{x}_c=\frac{L\ x_c}{L}=\frac{26}{2+5\pi}=\frac{26}{17.7}$$

$$\bar{x}_c=1.498\ \ in$$

$$\bar{y}_c=0$$

5-22 . شکل نشان داده شده از سیم متجانس و یکنواخت ساخته شده، معین کنید زاویه θ را در حالتی که مرکز ثقل جسم در مبدأ مختصات، یعنی نقطه o قرار گرفته باشد.



$$\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}=0$$

$$\alpha = AOA' = \frac{\pi}{2}-\theta$$

شکل	طول سیم	x_c
OA	r	$\frac{r}{2}Sin\theta$
OB	r	$-\frac{r}{2}Sin\theta$
قوس AA'	$r(\frac{\pi}{2}-\theta)$	K_1
قوس BB'	$r(\frac{\pi}{2}-\theta)$	K_1
قوس B'A'	$\pi\ r$	0

$L\ x_c$	y_c	$L\ y_c$
$-\frac{r^2}{2}Sin\theta$	$\frac{r}{2}Cos\theta$	$\frac{r^2}{2}Cos\theta$
$-\frac{r^2}{2}Sin\theta$	$\frac{r}{2}Cos\theta$	$\frac{r^2}{2}Cos\theta$
$rk_1(\pi/2-\theta)$	k_2	$k_2r(\pi/2-\theta)$
$rk_1(\pi/2-\theta)$	k_2	$k_2r(\pi/2-\theta)$
0	$-2r/\pi$	$-2r^2$

$$k_2 = k_1 = (\frac{r\ Sin\alpha}{\alpha})\ \ Sin\alpha$$

$$r^2Cos\theta + \frac{2rSin^2\alpha}{}\ r\ (\frac{\pi}{2}-\theta) - 2r^2 = 0$$

$$Cos\theta + \frac{4Sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}(\frac{\pi}{2}-\theta) - 2 = 0$$

$$2Sin^2\theta = 1 - Cos\theta$$

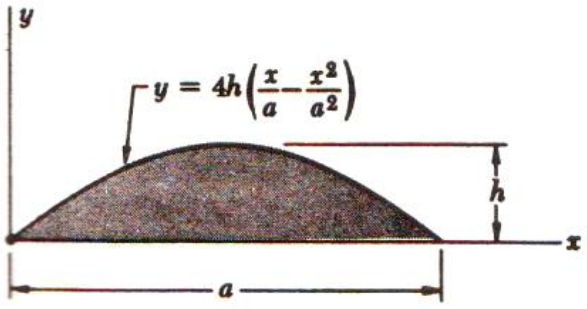
$$Cos\theta + 2\ \ (1 - Cos\ \ (\frac{\pi}{2}-\theta)) - 2 = 0$$

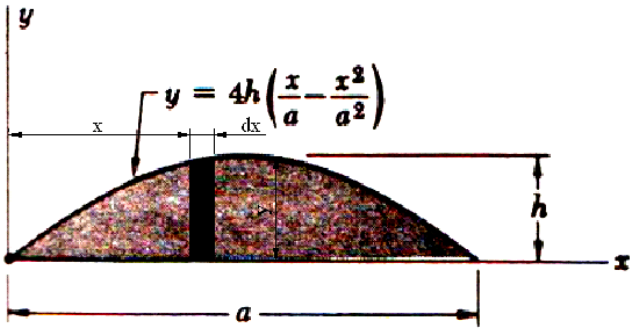
$$Cos\theta + 2 - 2Sin\theta - 2 = 0$$

$$Cos\theta = 2Sin\theta \qquad \tan\theta = 0.5$$

$$\theta = 26.6^\circ$$

5-32 مرکز سطحی اشکال زیر را به طریقه تابع اولیه تعیین کنید.





$$y = 4h\ (\frac{x}{a} - {}^{x^2}\!/_{a^2})$$

$$\bar{x}_{el} = x$$

$$dA = y dx$$

$$\bar{x}A = \int xeL\ dA$$

$$\bar{x}A = \int x\ dA$$

$$A = \int_0^a y dx = \int_0^a 4h\ ({}^{x}\!/_{a} - {}^{x^2}\!/_{a^2})\ dx$$

$$A = 4h\left[\frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 4h\ (\frac{a^2}{2a} - {}^{a^3}\!/_{3a^2})$$

$$A = 2a\frac{h}{3}$$

$$\bar{x}\ (2{}^{ah}\!/_{3}) = \int_0^a yx dx = \int_0^a 4h\ (\frac{x^2}{a} - {}^{x^3}\!/_{a^2})\ dx$$

$$\bar{x}\ (2{}^{ah}\!/_{3}) == 4h\left[\frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{4a^2}\right]_0^a$$

$$\bar{x}\ (2{}^{ah}\!/_{3}) = 4h\left[\frac{a^3}{3a} - {}^{a4}\!/_{4a^2}\right]$$

$$\bar{x}\ (2{}^{ah}\!/_{3}) = 4h\ (\frac{a^2}{12})$$

$$\bar{x} = \frac{a}{2}$$

$$yel = {}^{y}\!/_{2}$$

$$\bar{y}(A) = \int yel\ dA = \int_0^a {}^{y}\!/_{2}\ \ y\ dx$$

$$\bar{y}(A) = \frac{1}{2}\int_0^a y^2\ dx = \frac{1}{2}\int_0^a 16h^2(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{2x^3}{a^3})\ dx$$

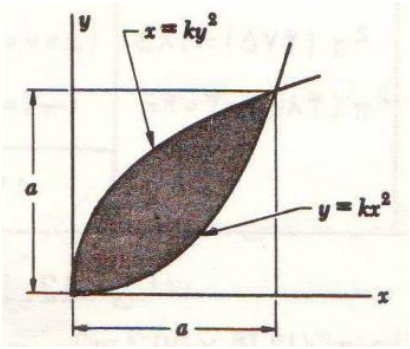
$$\bar{y}(A) = 8h^2\left[\frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{2x^4}{4a^3}\right]_0^a$$

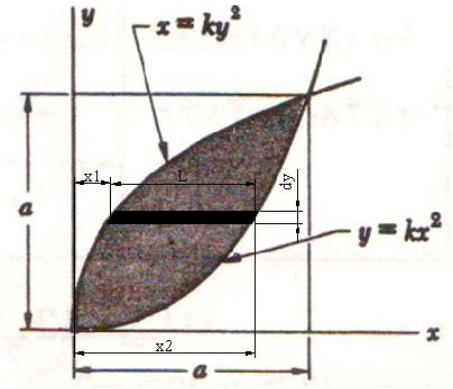
$$\bar{y}(A) = 8h^2\ (\frac{a}{3} + {}^{\%}\!/_{5} - {}^{\%}\!/_{2})$$

$$\bar{y}\ (\frac{2ah}{3}) = 8h^2\ (\frac{10+6-15}{30})\ a$$

$$\bar{y} = \frac{4h}{5} \qquad \bar{y} = {}^{2h}\!/_{5}$$

5-34 مرکز سطحی اشکال زیر را به طریقه تابع اولیه تعیین کنید.





$$k = {}^{1}\!/_{a} \qquad yel = x_1 + {}^{L}\!/_{2} \qquad h = y_2 - x_1$$

$$dA = L\ dy \qquad a = Ka^2$$

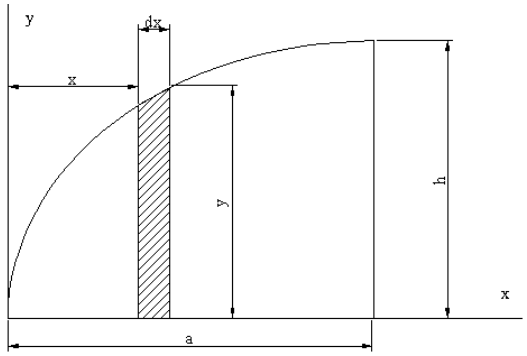
$$xel = \frac{1}{2}\ ({}^{y^2}\!/_{a} + \sqrt{ay})$$

$$\bar{x}A = \int xel\ dA$$

$$A = \int_0^a L\ dy = \int_0^a (\sqrt{ay} - \frac{y^2}{a})\ dy$$

$$A = \int_0^a (\sqrt{a}\ y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{a}y^2)\ dy$$

5-36 مختصات $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ مرکز سطحی . برای سطح زیر منحنی $(Y = KX^n)$ را به روش تابع اولیه بدست آورید.



$K\ a^n = h \qquad dA = y\ dx$

$x_{el} = x$

$\bar{x}A = \int x_{el}\ dA = \int x\ dA$

$A = \int_0^a y\ dx = \int_0^a k\ x^n\ dx = \frac{k}{n+1}\ \left[x^{n+1}\right]_0^a$

$A = \frac{k}{n+1} a^{n+1} = \frac{k}{n+1} a^n.a = ah/n+1$

$\bar{x}A = \int\ K\ x^{n+1} dx = \frac{k}{n+1} x^{n+2}\Big]_0^a$

$\bar{x}\ (\frac{ah}{n+1}) = \frac{k}{n+2}\ \ a^{n+2} = \frac{ka^n.a^2}{n+2}$

$\bar{x}\ (\frac{ah}{n+1}) = \frac{h\ a^2}{n+2}$

$\bar{x} = \frac{n+1}{n+2}\ \ a$

$y_{el} = y/2 \qquad \bar{y}A = \int_0^a \frac{y}{2}\ dA = \frac{1}{2}\int_0^a y^2\ dx$

$\bar{y}A = \frac{1}{2}\int_0^a k^2 x^{2n}\ dx = \frac{k^2}{2}\ \ \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\Big]_0^a$

$\bar{y}\ (A) = \frac{k^2}{2}\ \ \frac{1}{2n+1} a^{2n}.a = \frac{a}{2}\ \ h^2/2n+1$

$\bar{y}\ (\frac{a\ h}{n+1}) = \frac{a}{2}\ \ h^2/2n+1$

$\bar{y} = \frac{(n+1)\ h}{2\ (2n+1)}$

$A = \left[a^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3a} y^3 \right]_0^a$

$A = a^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3a} a^3 = \frac{2}{3} a^2 - a^2/3$

$A = a^2/3$

$\bar{x}\ (a^2/3) = \int (L)\ (\frac{x_1 + y_2}{2})\ dy$

$\bar{x}A = \int_0^a \frac{1}{2}\ (\sqrt{ay} + \frac{1}{a} y^2)(\sqrt{ay} - \frac{1}{a} y^2)\ dy$

$\bar{x}A = \frac{1}{2}\ \int_0^a\ (ay - \frac{y^4}{a^2})\ dy$

$\bar{x}A = \frac{1}{2}\ \left[\frac{a}{2} y^2 - \frac{y^5}{5a^2} \right]_0^9 y = kx^n = \frac{1}{2}\ (\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{5})$

$\bar{x}\ (a^2/3) = \frac{1}{2}\ \ (\frac{3a^3}{10})$

$\bar{x} = \frac{9}{20} a$

$\bar{y}A = \int yel\ dA = \int y\ (L)\ dy = \int y(\sqrt{ay} - \frac{1}{a} y^2)\ dy$

$\bar{x}\ (a^2/3) = \int_0^a (a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{a} y^3)\ dy$

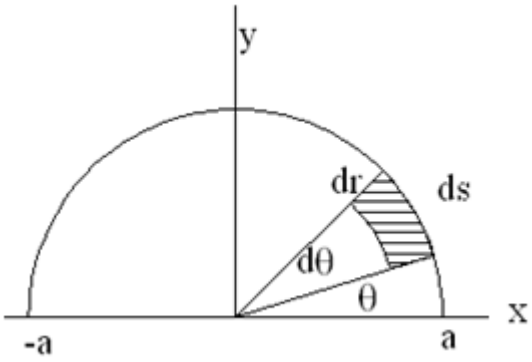
$\bar{y}\ (a^2/3) = \left[a^{\frac{1}{2}} \frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{y^4}{4a} \right]_0^a$

$\bar{y}\ (a^2/3) = \frac{2}{5} a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}} - \frac{a^4}{4a}$

$\bar{y}\ (a^2/3) = \frac{2}{5} a^3 - a^3/4 = \frac{3a^3}{20}$

$\bar{y} = \frac{9a}{20}$

5-38 مختصات $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ مرکز سطحی . برای سطح نیم دایره را به روش تابع اولیه بدست آورید.



$dA = ds.dr$

$ds = r\,d\,\theta$

$dA = r\,d\,\theta\,dr$

$X_{el} = r\,Cos\theta \qquad y_{el} = r\,Sin\theta$

$\bar{X}A = \int X_{el}\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{r} r\,Cos\theta\,r\,d\,\theta\,dr$

$\bar{X}(A) = \int_0^{\pi}\int_0^{r} r^2\,Cos\theta\,d\theta\,dr$

$\bar{X}(A) = \int_0^{\pi} Cos\theta\,d\theta\,(\frac{1}{3}r^3)$

$\bar{X}(A) = \frac{1}{3}r^3\int_0^{\pi} Cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}r^3\,[Sin\theta]_0^{\pi}$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y}\,(A) = \int y_{el}\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{r} rSin\theta rd\theta dr$

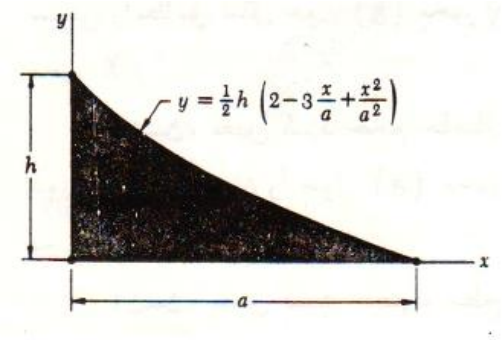
$\bar{y}\,(A) = \int_0^{\pi} Sin\theta\,d\theta\,(\frac{1}{3}\,r^3)$

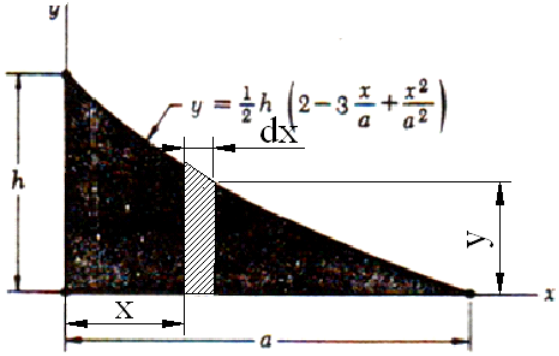
$\bar{y}\,(A) = \frac{1}{3}r^3\,[-Cos\theta]_0^{\pi} = \frac{1}{3}r^3\,(1+1)$

$\bar{y}\,(\frac{\pi r^2}{2}) = \frac{2}{3}\,r^3$

$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

5-42 بروش انتگرال گیری.طول مرکز سطحی شکل زیر را بدست آورید..





$y = \frac{1}{2}h\,(2-\frac{3x}{a}+x^2/a^2)$

$X_{el} = x \qquad \bar{x} = ?$

$dA = y\,dx$

$\bar{X}A = \int Xel\,dA$

$A = \int_0^a y\,dx = \int_0^a \frac{h}{2}\,(2-\frac{3x}{a}+x^2/a^2)\,dx$

$A = \frac{1}{2}h\left[2x-\frac{3x^2}{2a}+\frac{x3}{3a^2}\right]_0^a$

$A = \frac{1}{2}h\left[2a-\frac{3a^2}{2a}+\frac{a^3}{3a^2}\right] = \frac{1}{2}h\,(\frac{1.2-9+2}{6})\,a$

$A = \frac{5ah}{12}$

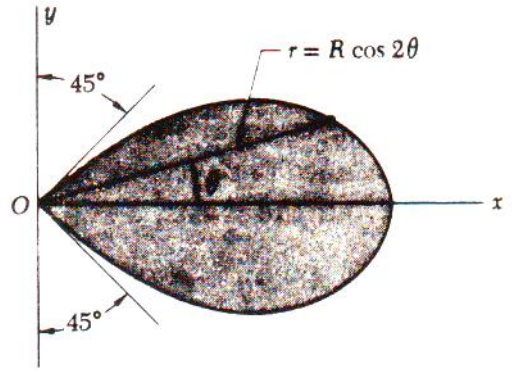
$\bar{X}A = \int_0^a xy\,dx = \int_0^a \frac{1}{2}h\,2x-\frac{3x^2}{2a}+x^3/a^2)\,dx$

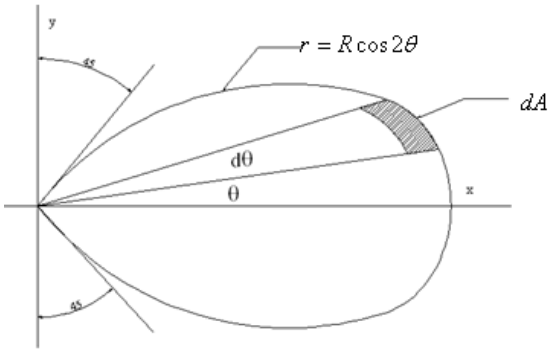
$\frac{5ah}{12}(\bar{x}) = \frac{1}{2}h\left[x^2-\frac{x3}{a}+\frac{x4}{4a^2}\right]_0^a$

$$\bar{x}\,(\frac{5ah}{12}) = \frac{1}{2}h\,[a^2 - a^2 + {}^{a^2}\!/_{4}) = {}^{a^2h}\!/_{8}$$

$$\bar{x} = \frac{a2h}{8} \times \frac{12}{5ah}$$

5-44 بروش انتگرال گیری مرکز سطحی شکل را بدست آورید.





$$dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta \qquad \overline{X}_{el} = \frac{2r}{3}\,Cos\theta$$

$$\begin{cases} r = 0 \\ Cos\theta = 0 = \mp\ Cos\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \theta = \mp\frac{\pi}{4}$$

$$\bar{y}el = {}^{2r}\!/_{3}\,Sin\theta$$

$$\bar{x}\,(A) = \int xel\,dA$$

$$A = \int_{\pi_{\frac{-}{4}}}^{\frac{\pi}{4}} \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tfrac{1}{2}\,R^2Cos^2 2\theta\,d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}R^2\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+Cos4\theta)\,d\theta\right.$$

$$A = \frac{1}{14}R^2\left[\theta + \frac{1}{4}\,Sin4\theta\right]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$A = \frac{1}{14}R^2\left[{}^{\pi}\!/_{4} + \frac{1}{4}Sin\pi\right] (2)$$

$$A = \frac{\pi}{8}\,R^2$$

$$\overline{x}\,(A) = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2r}{3}\,Cos\theta\,(\frac{1}{2}\,r^2 d\theta)$$

$$\overline{x}\,(A) = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^3}{3}\,Cos\theta\,d\theta$$

$$\overline{x}\,(A) = \frac{R^3}{3}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} Cos^3 2\theta\,Cos\theta\,d\theta$$

$$Cos2\theta = 1 - 2\,Sin^2\theta$$

$$\overline{x}\,(A) = \frac{R^3}{3}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1-2Sin^2\theta)3\,Cos\theta\,d\theta$$

$$\overline{x}\,(A) = {}^{R^3}\!/_{3}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1-8Sin^6\theta - 6Sin^2\theta + 12Sin^4\theta)\,Cos\theta\,d\theta$$

$$\overline{x}\,(A) = {}^{R^3}\!/_{3}\left[Sin\theta - \frac{8}{7}Sin^7\theta - 2Sin^3\theta + \frac{12}{5}Sin^5\theta\right]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\overline{x}\,(A) = {}^{R^3}\!/_{3}\left[Sin\frac{\pi}{4} - {}^{8}\!/_{7}\left[Sin(\frac{\pi}{4})\right]^7\right.$$

$$\left. - 2\left[Sin(\frac{\pi}{4})\right]^3 + \frac{12}{5}\left[Sin(\frac{\pi}{4})\right]^5\right] \times (2)$$

$$\overline{x}\,(A) = {}^{R^3}\!/_{3}\,(0.707 - 0.101 - 0.707 + 0.424)\,(2)$$

$$\overline{x}\,(A) = \frac{R^3}{3}\,(0.646)$$

$$\bar{x}\,({}^{\pi\,R^3}\!/_{8}) = \frac{R^3}{3}(0.646)$$

$$\bar{x} = R\,(0.548)$$

$$\overline{y}\,(A) = \frac{R^3}{3}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (Cos^3 2\theta)\,Sin\theta\,d\theta$$

$$Cos2\theta = 2\ Cos^2\theta - 1$$

$$\overline{y}\ (A) = R^3/3 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (8Cos^6\theta - 1 - 12Cos^4\theta + 6Cos^2\theta)\ Sin\theta\ d\theta$$

$$\overline{y}\ (A) = R^3/3\ \left[(\frac{8}{7}Cos^7\theta - Cos\theta - \frac{12}{5}Cos^5\theta + 3Cos^3\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

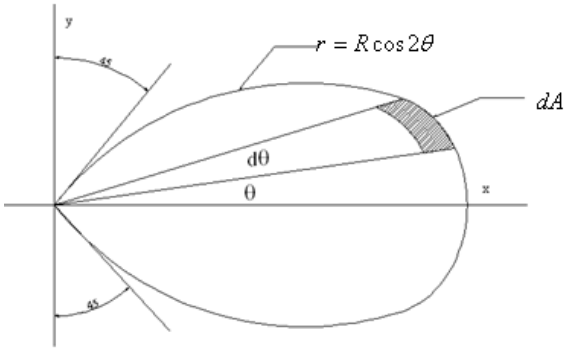
چون $Cos\ (-\pi) = Cos\pi$

$$Cos\alpha - Cos\ (-\alpha) = Cos\alpha - Cos\alpha = 0$$

$$\overline{y}\ (A) = 0$$

$$\overline{y} = 0$$

5-45 اولاً مرکز ثقل جسم زیر را پیدا کنید، ثانیاً حجم دوران حاصل حول محور x ها را بدست آورید.



از مسئله 44-5 داریم $\boxed{\overline{x} = 0.5483\ R}$

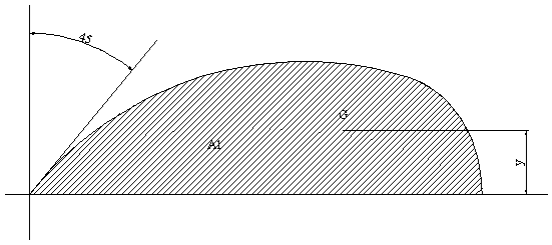
بخاطر قرینه بودن $\overline{y} = 0$

پس مرکز ثقل $(0.5483R\ ,\ 0)$ است.

طبق قانون پاپیوس

$$\overline{V} = 2\pi\ \overline{y}\ A_1$$

$$A_1\overline{y} = \int y_{el}\ dA = \int_0^{\pi/4} \frac{2r}{3}\ Sin\theta\ \frac{1}{2}r^2\ d\theta$$



$$A_1\overline{y} = \frac{1}{3}R^3 \int_0^{\pi/4} Cos^3 2\theta\ Sin\theta\ d\theta$$

$$A_1\overline{y} = \frac{1}{3}R^3 \int_0^{\pi/4} (2Cos^2\theta - 1)^3\ Sin\theta\ d\theta$$

$$A_1\overline{y} = \frac{1}{3}R^3 \int_0^{\pi/4} (8Cos^6\theta - 1 - 12Cos^4\theta = 6Cos^2\theta)\ Sin\theta\ d\theta$$

$$A_1\overline{y} = \frac{1}{3}R^3 \left[-\frac{8}{7}Cos^7\theta + Cos\theta + \frac{12}{5}Cos^5\theta - 2Cos^3\theta \right]_0^{\pi/4}$$

$$A_1\overline{y} = \frac{1}{3}R^3 \left[-0.101 + 0.656 + 0.424 - 0.757 + 8/7 - 1 - 12/5 + 2 \right]$$

$$A_1\overline{y} = \frac{1}{3}R^3\ (0.065)$$

$$\overline{y} = 0.11\ R$$

$$From\ \ problem\ 5-44\ \ A = \frac{\pi}{8}R^2$$

$$A_1 = \frac{1}{2}A = \frac{\pi}{16}R^2$$

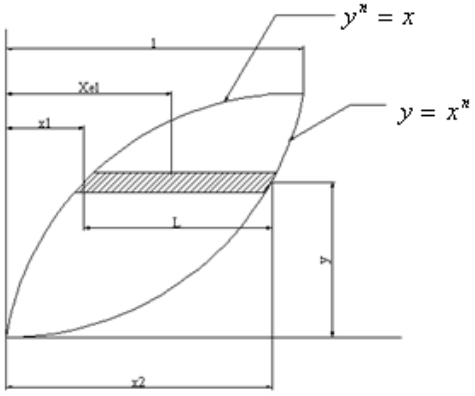
$$\frac{\pi}{16}\ R^2\overline{y} = \frac{1}{3}R^3\ (0.065)$$

$$\overline{V} = 2\pi\ \overline{y}\ A_1$$

$$\overline{V} = 2\pi\ (0.11R)\ (\pi/16\ R^2)$$

$$\boxed{\overline{V} = 0.138\ R^3}$$

5-46 بروش انتگرال گیری مرکز سطحی سطح محصور بین منحنی‌های $Y = X^n$ و $X = Y^n$ را وقتی x=1باشد بدست آورید.



$$L = y^{\frac{1}{n}} - y^n \quad Y_{el} = y \qquad X_{el} = x_1 + \frac{L}{2}$$

$$dA = L\ dy \qquad L = x_2 - x_1$$

$$x_{el} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad x_{el} = \frac{y^{\frac{1}{n}} + y^n}{2}$$

$$A = \int_0^1 (y^{\frac{1}{n}} + y^n)\ dy = \left[\frac{n}{n+1} y^{\frac{n}{n+1}} - \frac{n}{n+1} y^{n+1}\right]_0^1$$

$$A = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

$$\overline{X}A = \int X_{el}\ dA = \frac{1}{2} \int_0^1 (y^{\frac{1}{n}} + y^n)\ (y^{\frac{1}{n}} - y^n)\ dy$$

$$\overline{X}A = \frac{1}{2}\int_0^1 (y^{\frac{2}{n}} - y^{2n})\ dy$$

$$\overline{X}A = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{n+2} y^{\frac{2+n}{n}} - \frac{1}{2n+1} y^{2n+1}\right]_0^1$$

$$\overline{X}A = \frac{1}{2}\left[\frac{2n^2 + n - 2 - n}{(2n+1)(n+2)}\right] = \frac{n^2 - 1}{(2n+1)(n+2)}$$

$$\bar{x} = \frac{n^2 - 1}{(2n+1)\ (2+n)} \times \frac{n+1}{n-1}$$

$$\bar{x} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)\ (n+2)}$$

$$\bar{y}A = \int_0^1 y dA = \int_0^1 (y^{\frac{1+n}{n}} - y^{n+1})\ dy$$

$$\bar{y}A = \left[\frac{n}{1+2n} y^{\frac{1+2n}{n}} - \frac{1}{n+2} y^{n+2}\right]_0^1$$

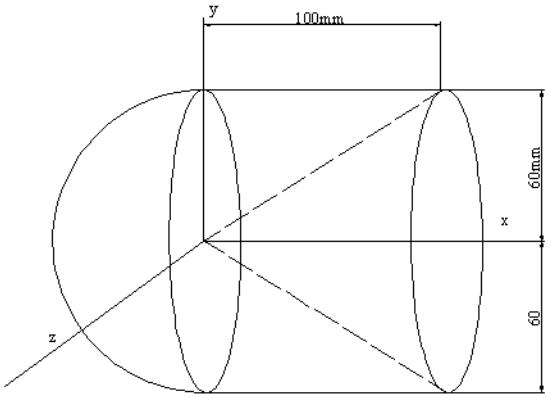
$$\bar{y}A = \left[\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{n+2}\right]$$

$$\bar{y}A = \frac{n^2 + 2n - 1 - 2n}{(n+2)(1+2n)}$$

$$\bar{y} = \frac{n^2 - 1}{(n+2)\ (2n+1)} \times \frac{n+1}{n-1}$$

$$\bar{y} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)\ (2n+1)}$$

5-47 مطلوبست تعیین مرکز ثقل جسم مرکب زیر یک نیم کره و یک استوانه که باندازه یک مخروط از آن جدا شده است.



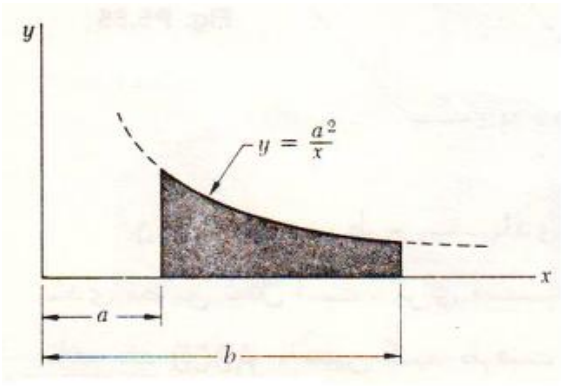
شکل	V حجم Cm^3	x Cm	Vx $Cm3$
نیم کره	$2\pi/3\ R^3 = \frac{2\pi}{3}(6)^3 = 452$	$\frac{3}{8}\ r = \frac{3}{8}\ (6) = 2.25$	-1017
استوانه	$\pi r^2 h = \pi(6)^2(10) = 1131$	5	5655
مخروط	$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(6)^2(10) = -377$	$\frac{3}{4}h = 3/4(b) = 7.5$	-2828
	$\sum V = 1206$		$\sum xv = 1810$

چون قرینه است پس $\bar{y} = 0$

$$X = \frac{\sum XV}{\sum V}$$

$$X = \frac{1810}{1206} \quad X = 1.5\ Cm$$

5-48 میدانیم که$b=3a$ معین کنید مرکز سطحی شکل را.



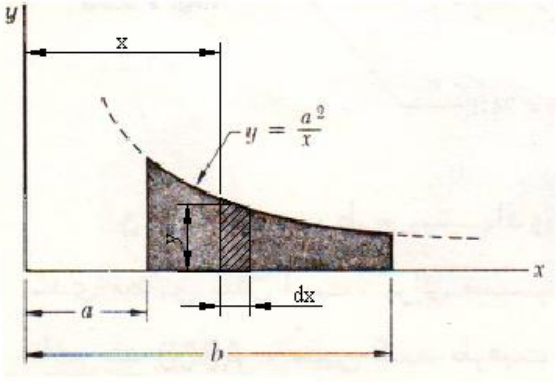
$b = 3a$

$dA = y\ dx \qquad X_{el} = x \qquad Y_{el} = \frac{y}{2}$

$\bar{x}A = \int xel\ dA$

$$A = \int_a^{3a} y dx = \int_a^{3a} \frac{a2}{x} dx = a^2 \left[\ln x\right]_a^{3a}$$

$$A = a^2 \ln \frac{3a}{a} = a^2 \ln 3$$



$\bar{x}\ (A)\ \int_a^{3a}\ (a^2/x)\ (x)dx = \int_a^{3a} a^2 dx = a^2\ [3a - a]$

$$\overline{X} = \frac{2a^3}{a^2 \ln 3} = 1.82a$$

$\bar{y}\ A = \int yel\ dA = \int_a^{3a} \frac{y}{2} dA = \int_a^{3a} \frac{y^2}{2}\ dx$

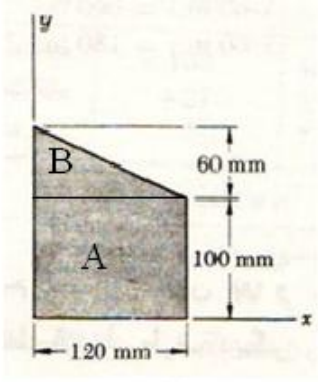
$$\bar{y}A = \frac{1}{2}\ \int_a^{3a} a^4/x^2\ dx = \frac{a^4}{2}\ \int_a^{3a} \frac{dx}{x^2}$$

$$\bar{y}A = \frac{a^4}{2}\ \left[-\frac{1}{x}\right]_a^{3a} = \frac{-a^4}{2}\ \left[\frac{1}{3a} - \frac{1}{a}\right]$$

$$\bar{y}A = -\frac{a^4}{2}\ \left[\frac{-2}{3a}\right]$$

$$\bar{y} = 0.303\ a$$

5-50 معین کنید حجم حاصل از دوران ذوزنقه مسئله 5-2 را حول (a) محور x، (b) حول محور y.



مسئله ۵-۲

$\bar{x}_G = 55.4\ mm$

$A = 15600 \quad mm^2$

طبق قضیه پاپی یوس، داریم

$\bar{V}x = 2\pi\ \bar{y}_G\ A$

$\bar{V}x = 2\pi\ (15600)\ (66.2)$

$\bar{V}x = 6.488\times10^6 \quad mm^3$

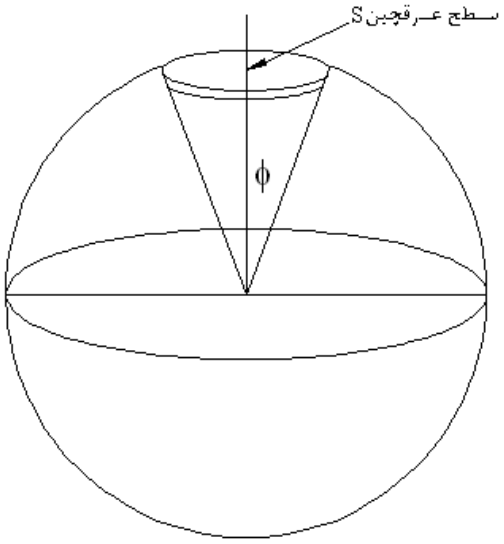
طبق قضیه پاپی یوس، داریم

$\bar{V}y = 2\pi\ \bar{x}_G\ A$

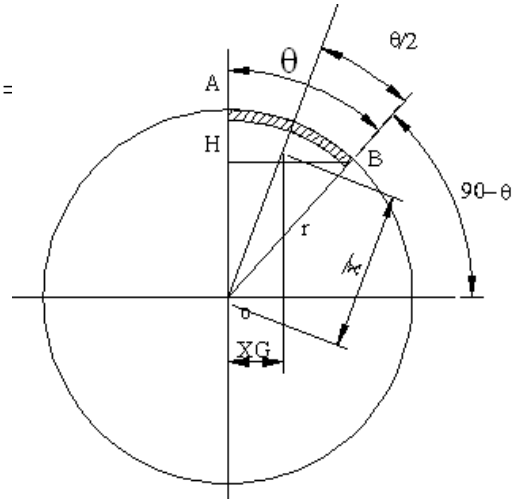
$\bar{V}y = 2\pi\ (15600)\ (55.4)$

$\bar{V}y = 5.42\times10^6\ mm^3$

5-52 عرقچین کروی از عبور صفحه افقی از کره میان تهی بشعاع r مطابق شکل تشکیل شده. معین کنید سطح خارجی آن را بر حسب R, θ.



$\bar{y}_G =$



$\overline{AB} = r\,\theta$

$\bar{x} = \dfrac{r\ Sin\theta/2}{\theta/2}$

$\bar{x}_G = \bar{x}\ Cos\ (\dfrac{\theta}{2} + 90 - \theta)$

$\bar{x}_G = \bar{x}\ Cos\ (90 - \dfrac{\theta}{2})$

$\bar{x}_G = \bar{x}\ Sin\dfrac{\theta}{2}$

$\bar{x}_G = \dfrac{r\ Sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}\ Sin\dfrac{\theta}{2}$

$A = 2\pi\ L\ \bar{x}_G$

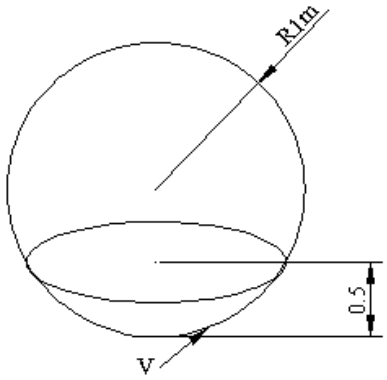
$A = 4\pi\ r^2\ Sin^2\dfrac{\theta}{2}$ قضیه پاپی یوس

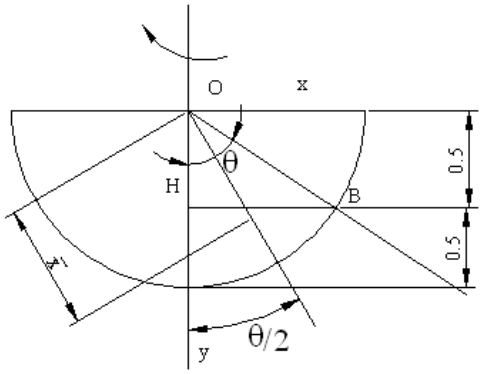
$A = 2\pi\ (r\theta)\ \dfrac{rSin^2\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}$

$\theta = 180$ سطح کره

$A = 4\pi\ r^2\ Sin^2\ 90 = 4\pi\ r^2$

5-54 قطر داخلی تانک کروی ۲ متر است، چه حجمی از آب لازم است که آن را به عمق ۰/۵ متر پر نمایند.





$$\bar{x} = \frac{2(1)\ Sin\,{}^{60}\!/_{2}}{3({}^{60}\!/_{2})({}^{\pi}\!/_{80})} = 0.636$$

$$\bar{x} = \frac{2rSin\frac{\theta}{2}}{3\ (\frac{\theta}{2})}$$

$$Cos\theta = \frac{OH}{OB} = \frac{0.5}{1} = 0.5 \qquad \theta = 60^{\circ}$$

$$HB = rSin\theta = 0.866 \quad mm$$

شکل	مساحت
قطاع $\Delta\ AOB$	$\frac{1}{2}r^2\theta = 0.523$
$\Delta\ BHO$	$\frac{OH \times HB}{2} = -\frac{0.5x0.866}{2} = -0.2165$
مجموع	0.3065

X_C	A_{xc}
$\overline{X}Sin\frac{\theta}{2} = 0.636\sin 30 = 0.16$	0.166
$\frac{1}{3}\ HB = 0.2886$	-0.0625
	0.1035

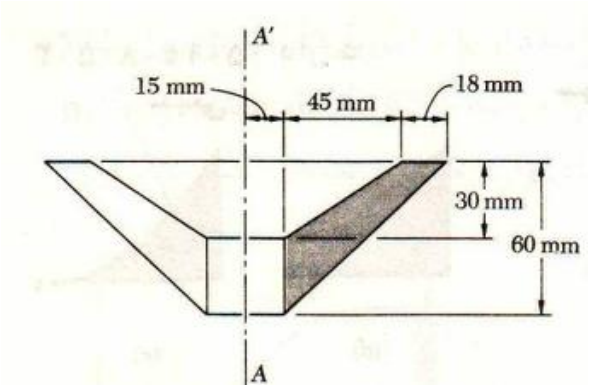
قضیه پاپی یوس

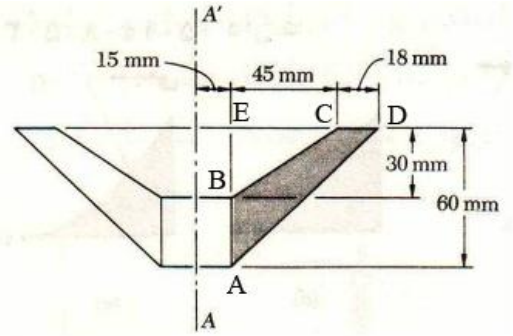
$$\overline{X} = \frac{0.1035}{0.3065} = 0.3377 \quad m$$

$$\overline{V}y = 2\pi\overline{X_G}\ A_{AA}$$

$$V_y = 2\pi\ (0.3066)\ (0.3377) = 0.655\ m^3$$

5-57 معین کنید حجم حاصل از طوقه فولادی را که از دوران سطح هاشور زده مطابق شکل حول محور 'AA بدست می‌آید.





شکل	مساحت	X_C	A_{xc}
AE D	$AE\times ED/2$ $60\times 63/2$ (1890)	$15+\frac{1}{3}ED$ $15+\frac{1}{3}(63)$ (36)	68040
-BEC	$EB\times EC/2$ $30\times 45/2$ $-(675)$	$15+\frac{1}{3}EC$ $15+\frac{1}{3}(45)$ (30)	-20250
total	1215	—	47790

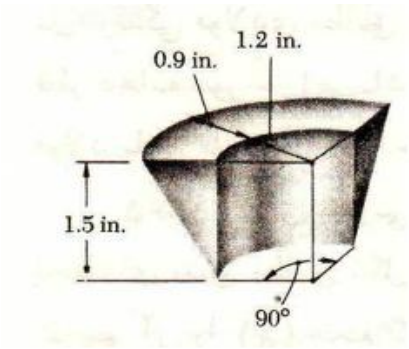
$$\bar{x}_G=\frac{47790}{1215}=39.33$$

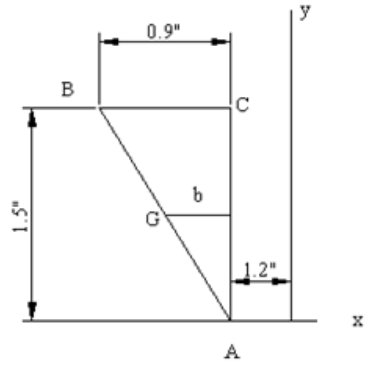
$$V_A=2\pi\bar{x}_G A=2\pi(39.33)\ (1215)$$

قضیه پاپی یوس

$$V_A=3\times10^5\ mm^3=0.3\ m^3$$

5-58 معین کنید حجم و سطح جانبی جسمی مطابق شکل زیررا.





$$\bar{x} = 4R/3\pi$$

شکل	مساحت	$\bar{X}_C$	$\bar{A}_{xc}$
ABL	$BC \times AC/2$ $1.5 \times 0.9/2$	$1.2 + \frac{1}{3}BC$ $1.2 + 0.3$	
	(0.675)	(1.5)	1.0125

$$\bar{x}_c = \frac{1.0125}{0.675} = 1.5$$

$$V_y = 2\pi \bar{x}_G \; A = (2\pi)\ (1.5)\ (0.675)$$

$$V_y = 6.3617\ 1n^3$$

$$\bar{V}y = \frac{\bar{V}y}{4} = \frac{6.3617}{4} = 1.59 \quad in^3$$

$$AB = \sqrt{(0.9)^2 + (1.5)^2} = 1.75\ ^{1n}$$

$$\frac{b}{0.9} = \frac{1.5/2}{1.5} = 1/2 \qquad b = 0.45$$

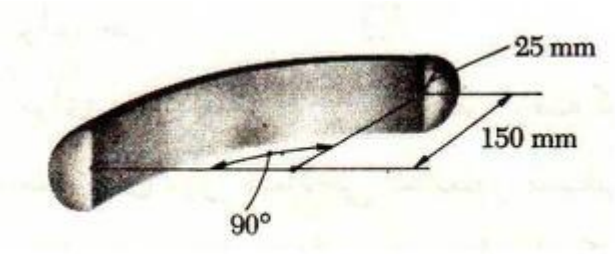
$$X_G = 0.45 + 1.2 = 1.65$$

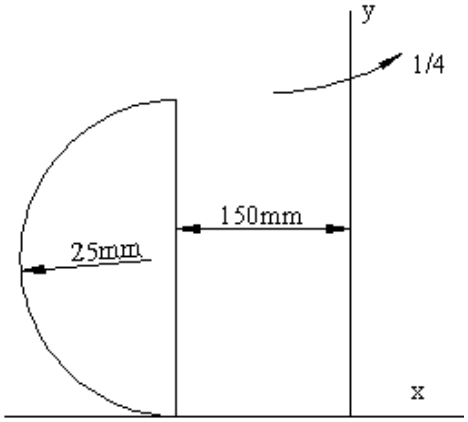
$$S = 2\pi\ x_G L = 2\pi(1.65)\ (1.75)$$

$$S = 18.14\ 1n^2$$

$$\bar{S} = \frac{1}{4}\ (18.14) = 4.535\ 1n^2$$

5-60 معین کنید حجم و سطح کل جانبی جزئی از حلقه مطابق شکل را. سطح مقطع آن به شکل نیم دایره.





$$\bar{x} = 4R/3\pi$$

$$\bar{X} = \frac{4(25)}{3\pi} = 10.61\ ^{mm}$$

$$V = 2\pi \bar{X}_G \qquad A = 2\pi\ (10.61) + (150)\ (\pi/2)\ (25)^2$$

$$V = 9.9 \times 10^5\ mm^3$$

$$\bar{V} = \frac{1}{4}\ (9.9 \times 10^5) = 2.48 \times 10^5\ ^{mm^3}$$

$$X = 2r/\pi = \frac{2(25)}{\pi} = 15.92\ ^{mm}$$

$$A = 2\pi \bar{X}_G\ L$$

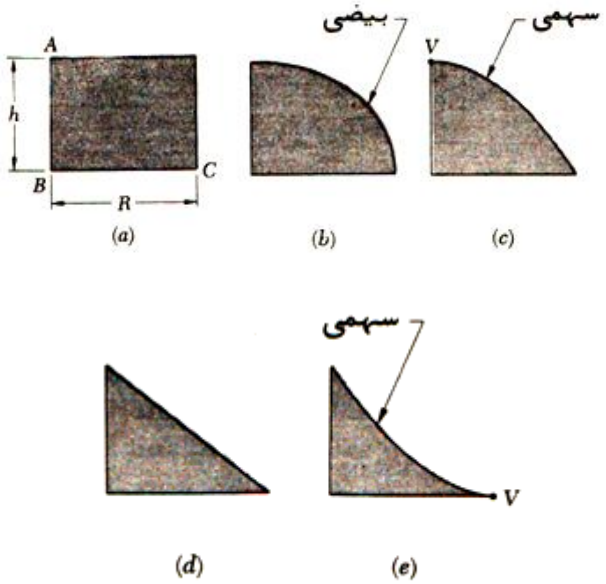
$$A = 2\pi(150 + 15.92)\ (\pi)\ (25)$$

$$A = 81876 \quad mm^2$$

$$\bar{A} = \frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\ (81876)$$

$$A = 20.5 \times 10^3 \quad mm^2$$

5-62 معین کنید حجم حاصل از دوران هر یک از سطوح مطابق شکل را حول لبه قائم AB. نشان دهید که احجام حاصله نسبت
۱: ۲: ۳: ۴: ۶ دارند.



a) $V = 2\pi\ \bar{x}A$

$V = (2\pi)\ (R/2)\ (Rh) = \pi\ R^2 h$

b) $V = 2\pi\ x_G A$

$V = (2\pi)\ (\frac{4a}{3\pi})\ (\frac{\pi ab}{4})$

$V = 2\pi\ (\frac{4R}{3\pi})\ (\pi Rh/4)$

$V = 2/3\ \pi\ R^2 h$

C) $V = 2\pi\ \bar{x}_G A$

$V = 2\pi\ (3a/8)\ (\frac{2ab}{3})$

$V = 2\pi\ (3R/8)\ (\frac{2Rh}{3})$

$V = \pi/2\ \ R^2 h$

d) $V = 2\pi\ \bar{x}_G A$

$V = 2\pi\ (\frac{1}{3}R)\ (\frac{Rh}{2})$

$V = \frac{1}{3}\ \pi R^2 h$

E) $X = 3a/4$

$A = ah/3$

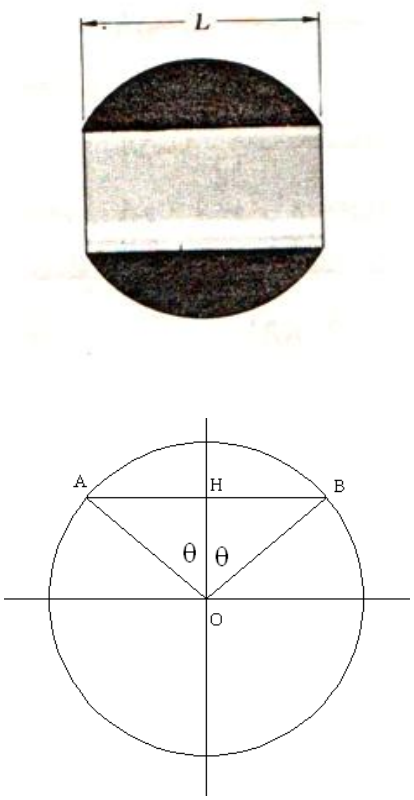
$V = 2\pi\ \bar{x}_G A$

$V = 2\pi\ (a - 3a/4)\ (ah/3)$

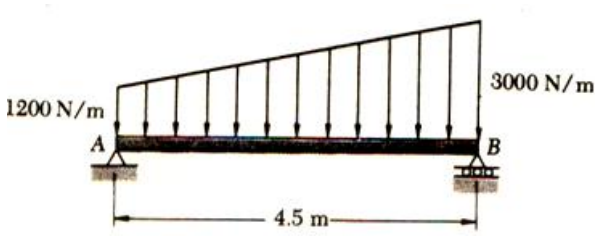
$V = 2\pi\ (R - 3R/4)\ (Rh/3)$

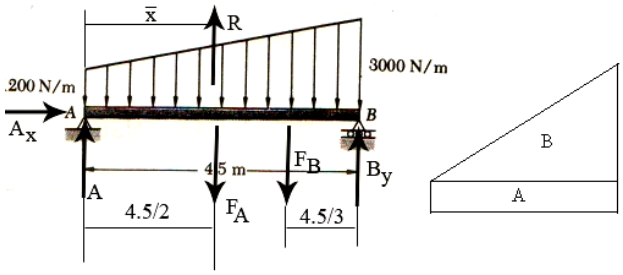
$V = 2\pi\ (R/4)\ (\frac{Rh}{3}) = \frac{\pi}{6}\ R^2 h$

5-64 سوراخ استوانه‌ای شکل در داخل بل برینگی فولادی مطابق شکل ایجاد کرده‌اند. قطر دهانه سوراخ L باشد. نشان دهید که حجم فولاد باقی مانده $\frac{1}{6}\pi l^3$ خواهد بود.



5-66 معین کنید مقدار و نقطه اثر برآیند بارهای وارد بر میله‌ای مطابق شکل را و عکس العمل‌های نقاط A و B را.





$FB = 4050 \quad N \qquad FB = (300-1200)(4.5)/2$

$FA = (1200)\ (4.5) \qquad FA = 5400 \quad N$

$\sum MA = 0 \ \curvearrowleft^{+}$

$(By)\ (4.5) - (4.5 - \frac{4.5}{3})\ FB - FA\ (\frac{4.5}{3}) = 0$

$4.5\ By = 3\ (4050) + 5400\ (2.25)$

$By = 5400 \quad N$

$By = 5.4 \ KN \ \uparrow$

$\sum Fy = 0 \qquad By + Ay - FA - FB = 0$

$Ay = -5.4 + 4.05 + 5.4 = 4.05$

$Ay = 4.05 \ KN \uparrow$

$R = FA + FB = 5.4 + 4.05$

$R = 9.45 \ KN$

$(R)\ (x) = 24.3 \qquad \bar{x} = \frac{24.3}{9.45}$

$\bar{x} = 2.57 \ m$

To The Right of A

$\sum Fx = 0$

$Ax = 0$

$OH = RCos\theta$

$HB = RSin\theta$

$AB = L \quad \sin\theta = \frac{\frac{L}{2}}{R} = \frac{L}{2R}$

شکل	مساحت
$\overset{\frown}{AOB}$	$\frac{1}{2}R^2(2\theta)$ $R^2\theta$
$\Delta\ AOB$	$OH \times HB$ $-\frac{R^2}{2}Sib2\theta$

$\overline{X}_C$	$\overline{A}_{xc}$
$\frac{2RSin\theta}{3\theta}$	$⅔\ R^3(Sin\theta)$
$⅔\ OH$ $⅔\ RCos\theta$	$-\frac{1}{3}R^3\ Sin2\theta\ Cos\theta$

$\overline{X}_G = \frac{⅔R^3Sin\theta - ⅓R^3Sin2\theta\ Cos\theta}{A}$

$V = 2\pi\ \bar{x}_G\ A$

$V = 2\pi \left[⅔R^3Sin\theta - \frac{1}{3}R^3Sin2\theta\ Cos\theta\right]$

$V = \frac{2\pi\ R^3}{3}\ \left[2Sin\theta - Sin2\theta\ Cos\theta\right]$

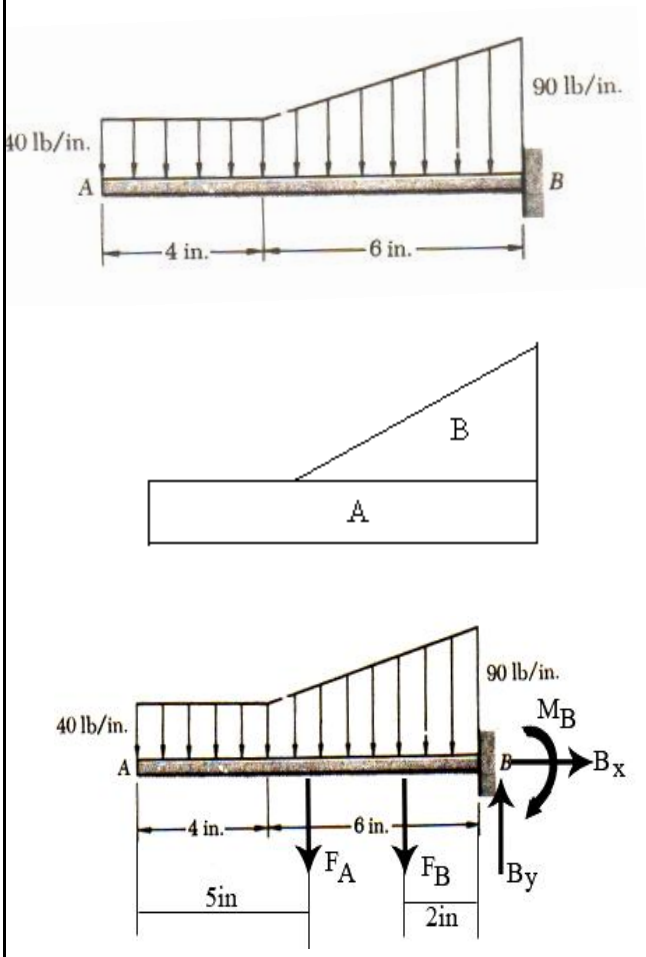
$V = \frac{2\pi\ R^3}{3}\ (2Sin\theta - 2Sin\theta\ Cos^2\theta)$

$V = \frac{2\pi\ R^3}{3}\ (1 - Cos^2\theta)\ Sin\theta = \frac{4\pi\ R^3}{3}Sin^3\theta$

$Sin\theta = \frac{L}{2R}$

$V = \frac{4\pi\ R^3}{3}\ (\frac{L^3}{8R^3}) = \frac{\pi}{6}L^3$

5-68 معین کنید عکس‌العملهای وارد بر نقاط اتکـاء میلـه را در شرایط بارهای واردر شکل زیررا.



$$FB=(90-40)\ {}^{(6)}\!/_{2}$$

$$FB=150\ \ lb$$

$$FA=40\times 10$$

$$FA=400\ \ lb$$

$$\sum MB=0\ \ \text{↵}^{-}$$

$$(FA)\ (5)+FB\ (2)-MB=0$$

$$MB=(400)\ (5)+150\ (2)$$

$$MB=2300\ \ lb-1n\ \ \text{↵}+$$

$$\sum Fy=0$$

$$FA+FB=By$$

$$By=400+150=550\ \ lb\ \uparrow$$

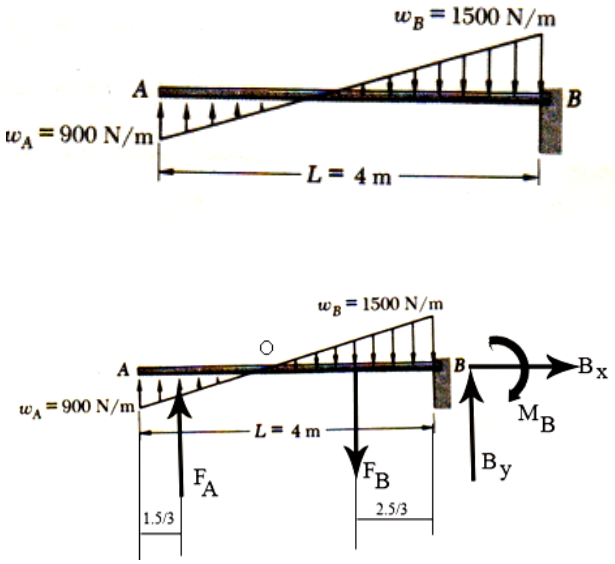
$$By=550\ \ lb\ \uparrow$$

$$M_B=2300\ \text{↵}^{-}$$

$$\sum Fx=0$$

$$Bx=0$$

5-70 معین کنید عکس‌العملهای وارد بر نقـاط اتکـاء میلـه را در شرایط بارهای واردر شکل زیررا



$$AO=a\quad OB=b$$

$$\frac{a}{900}=\frac{4-a}{1500}\quad a=\frac{9}{15}(4-a)$$

$$a=1.5$$

$$b=2-5$$

$$F_A=900\ \ ({}^{1.5}\!/_{2})$$

$$F_A=675\ \ N$$

$$F_B=\frac{1500\times 2.5}{2}$$

$$F_B=1875\quad N$$

$$\sum Fy=0$$

$$By+FA-FB=0$$

$$By=FB-FA=1815\ -675\ =1200\quad N$$

$$\sum MB=0\ \ \text{↵}^{-}$$

$$-F_A\ (\frac{2.5}{3}+{}^{8}\!/_{3})+F_B\ ({}^{2.5}\!/_{3})-M_B=0$$

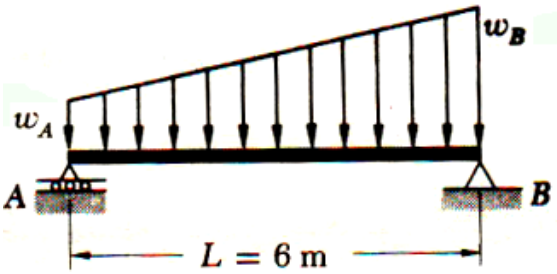
$$M_B=-675\ (\frac{10.5}{3})+1875\ ({}^{2.5}\!/_{3})$$

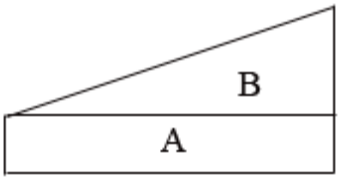
$$M_B=-2362.5+1562.5$$

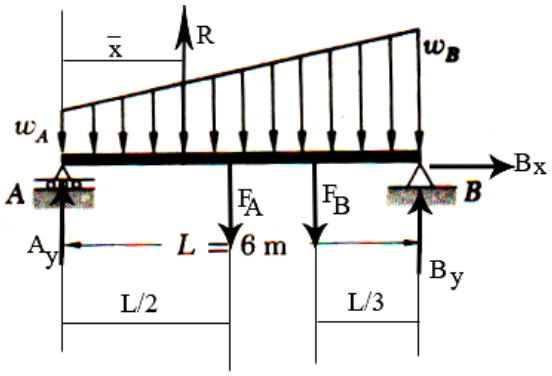
$$M_B=-800\ \ N-M$$

$$M_B=800\ \ N-M\ \text{↵}^{+}$$

5-72 بـر میلـه ای مطـابق شـکل بـار یکنواخـت وارد مـی شود.(a)معین کنید برآیند بار معـادل را.(b)عکـس العمـل هـای وارد بر نقاط تکیه گـاه را بـر حسـب مقـادیر w_A و w_B و L بدست آورید.







$$F_A=W_AL$$

$$F_B=\frac{1}{2}\ (W_B-W_A)$$

$$FA+FB=\frac{L}{2}\ (W_A+W_B)$$

$$\sum MA=0\ \text{↵}^{+}$$

$$B_y\ (L)-F_B(L-{}^{L}\!/_{3})-F_A\ ({}^{L}\!/_{2})=0$$

$$LB_y=\frac{L}{2}\ W_{AL}+\frac{1}{2}\ (W_B-W_A)\ (\frac{2L}{3})$$

$$By=\frac{L}{6}\ (2W_B+W_A)$$

$$F_A+F_B=B_y+A_y$$

$$\frac{L}{2}\ (W_A+W_B)=\frac{L}{6}\ (2W_B+W_A)+A_y$$

$$A_y=\frac{LW_A}{2}+\frac{LW_B}{2}-\frac{LW_B}{3}-\frac{LW_A}{4}$$

$$A_y=\frac{3LW_A-LW_A}{6}+\frac{3LW_B-2LW_B}{6}$$

$$A_y=\frac{L}{6}\ (2W_A+W_B)$$

$$R=A_y+B_y$$

$$R=\frac{L}{2}(W_B+W_A)$$

$$\sum MA=0$$

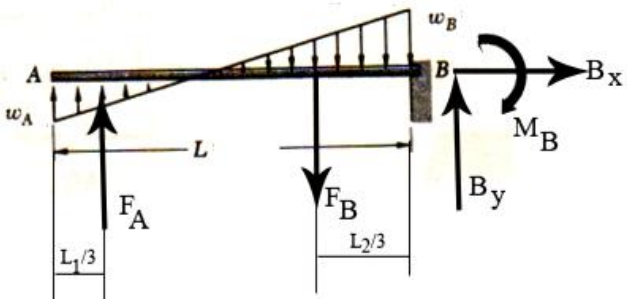
$$R(\bar{x})-LBy=0$$

$$R\ (\bar{x})=\frac{L^2}{6}\ (2W_B+W_A)$$

$$\overline{X}=\frac{L^2}{6}\ (2W_B+W_A)\div\ {}^{L}\!/_{2}\ (W_A+W_B)$$

$$X=\frac{L}{3}\ (\frac{2W_B+W_A}{W_A+W_B})$$

5-74 در مسـئله ۵-۷۰ معـین کنیـد نسـبت w_A و w_B را برای وقتی که عکس‌العمل در نقطه B برابر با (a) یک نیرو بدون کوپل، (b) یک کوپل بدون نیرو باشد. در هر حال عکس العمل‌ها را بر حسب w_A و L حساب کنید.



$$\begin{cases} AO = L_1 \quad OB = L_2 \\ WA/WB = L_1/L_2 \\ L_1 + L_2 = L \\ \sum MB = 0 \end{cases}$$

$$F(A)\ (L - L_1/3) = FB\ (L_2/3)$$

$$F_A = \frac{WAL_1}{2}$$

$$F_B = \frac{W_B L_2}{2}$$

$$\frac{WAL_1}{2}\ (L - \frac{L_1}{3}) = \frac{W_B L_2}{2}\ L_2/3$$

$$\frac{W_A}{W_B}.\frac{L1}{L2}\ (\frac{3L - L_1}{3}) = L_2/3$$

$$\frac{W^2{}_A}{W^2{}_B}\ (\frac{2L_1 - 3L_2}{3}) = L_2/3$$

$$\frac{W^2{}_A}{W^2{}_B} = \frac{1}{2\ WA/WB} = \frac{W_B}{2W_A + 3W_B}$$

$$2\ W^3A + W_B W^2 A = W^3 B$$

$$2\ (WA/WB) + 3\ (WA/WB)^2 - 1 = 0$$

$$WA/WB = x$$

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$$

حل معادله

$$WA/WB = 0.5$$

$$\sum Fy = 0$$

$$By - FB - FA = -\frac{WAL_1}{2} + \frac{WB}{2}\ L_2$$

$$\begin{cases} L_1 + L_2 = L \\ L_1/L_2 = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \frac{L}{L_2} = 1.5/1 \qquad L_2 = \frac{L}{1.5}$$

$$L_1 = L - \frac{L}{1.5} = \frac{0.5L}{1.5}$$

$$W_A = 0.5\ W_B$$

$$By = \frac{0.5\ W_B}{2}.\frac{0.5L}{1.5} + \frac{W_B}{2}\ L/1.5$$

$$By = -\frac{W_B L}{12} + \frac{W_B L}{3} = \frac{-1+4}{12}\ W_B L$$

$$MB = 0$$

$$By = \frac{1}{4}\ L\ W_B$$

b)
$$\begin{cases} L1 + L2 = L \\ By = 0 \Rightarrow FA = FB \\ WA/WB = L1/L2 \end{cases}$$

$$\frac{W_A L_1}{2} = \frac{W_B L_2}{2}$$

$$\frac{WA}{WB} = L1/L2 \qquad \frac{WA^2}{WB^2} = 1 \qquad WA/WB = 1$$

$$L_1/L_2 = 1 \qquad L_1 = L_2$$

$$L_1 = L/2 \qquad L_2 = L/2$$

$$MB = 0 \ \curvearrowleft^+$$

$$+F_A(L - L_2/3) - F_B\ (L_2/3) - M_B = 0$$

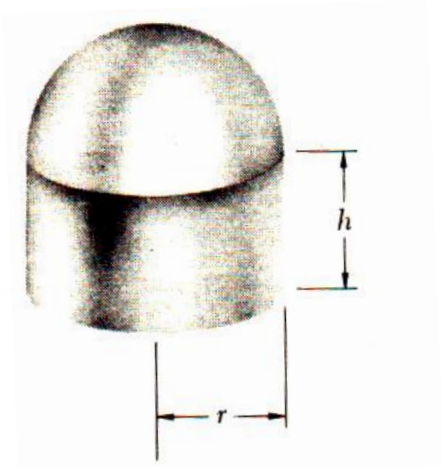
$$M_B = -F_B\ (L/2) + F_A\ (\frac{5L}{6})$$

$$M_B = -\frac{W_B\ L_2}{2}\ (L/6) + \frac{W_A\ L_1}{2}\ (\frac{5L}{6})$$

$$M_B = -\frac{W_B\ L^2}{24} + \frac{WBL}{24}\ \ 5L/6$$

$$M_B = \frac{-1+5}{24}\ W_B L^2 = \frac{1}{6} L^2\ W_B$$

5-94 نیم کره و استوانه‌ای را رویهم مطابق شکل قرار داده، معین کنید نسبت h/r را برای حالتی که مرکز ثقل کل جسم در صفحه فصل مشترک کره و استوانه قرار داشته باشد.



$h/r = ?$

مرکز ثقل کل جسم، طبق صورت مسئله

$\bar{y} = h$

شکل	حجم	$\bar{y}_C$	$V\bar{y}_c$
استوانه	$\pi\ r^2 h$	$h/2$	$\pi\ r^2 h\ \ h^2/2$
نیم کره	$2/3\ \pi\ r^3$	$h+3r/8$	$(2/3\ \pi r^3)\ \ (h+3r/8)$
مجموع			

$$h = \bar{y} = \frac{V\bar{y}_c}{V} = \frac{\pi\ r^2\ h^2/2 + (h+3r/8)(2/3\ \pi r^3)}{\pi\ r^2 h + 2/3\ \pi\ r^3}$$

$$\pi\ r^2 h^2 + \frac{2}{3}\pi\ r^3 h = \frac{\pi\ r^2 h^2}{2} + \frac{2}{3}\ r^3 h + \pi/4\ \ r^4$$

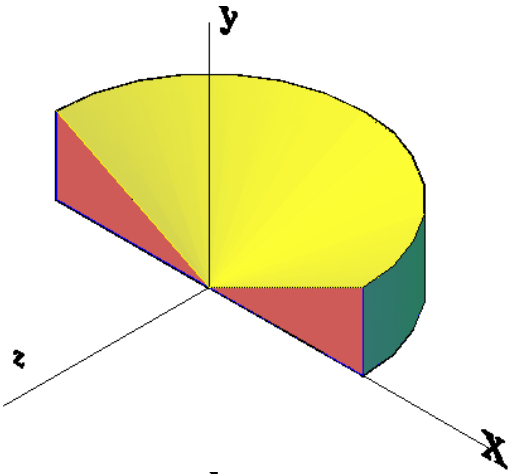
$$\pi\ r^2 h^2 = \pi\ \ r^4/4$$

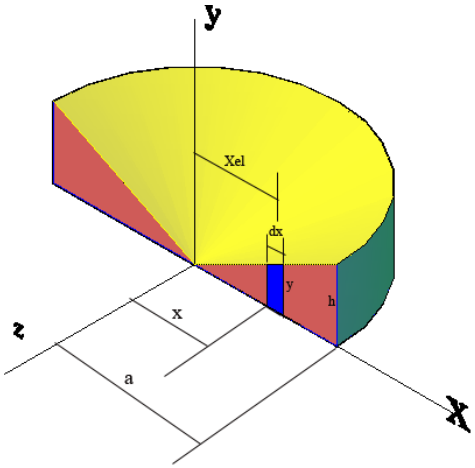
$$h^2 = r^2/2$$

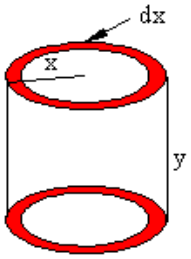
$$(h/r)^2 = 1/2 \qquad h/r = \sqrt{1/2}$$

$$h/r = 0.707$$

5-96 معین کنید مختصات Z مرکز ثقل جسم را با استفاده از نتایج حاصله از مثال حل شده ۱۳-۵.







$$xel = x$$

$$dv = \frac{2\pi x}{2}\ (y)\ dx$$

$$V = \int_0^a \pi\ xy\ dx \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{h} \qquad y = hx/a$$

$$V = \int_0^a \pi\ x\ \frac{hx}{a}\ dx = \frac{\pi h}{a}\int_0^a x^2\ dx$$

$$V = \frac{\pi h}{3}\ a^2$$

$$\overline{Z} = (\overline{V}) = \int Zel\ dv$$

$$Zel = -\frac{2xel}{\pi} = -\frac{2x}{\pi}$$

$$\overline{Z}\ (\overline{V}) = \int_0^a -\frac{2x}{\pi}\ (\pi x)(y)\ dy$$

$$\overline{Z}\ (V) = -\int_0^a \frac{2x}{\pi}\ (\pi)\ (x)\ (\frac{hx}{a})\ dx$$

$$\overline{Z}\ (V) = -\frac{2h}{a}\ \int_0^a x^3 dx = -\frac{2h}{a}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^a$$

$$\overline{Z}\ (\frac{\pi h}{3}a^2) = -\frac{2h}{a}.\frac{1}{4}\ a^4$$

$$\overline{Z} = -\frac{3a}{2\pi}$$

چون جسم باAutoCAD رسم شده است ،لذا مرکز ثقل آنرا می توان بدست آورد. در اینجاa=200,h=100 انتخاب شده است.

$$\overline{Z} = -\frac{3a}{2\pi}$$

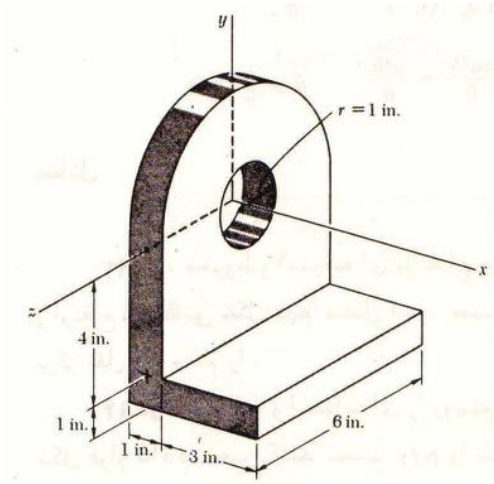
$$\overline{Z} = -\frac{3(200)}{2\pi}$$

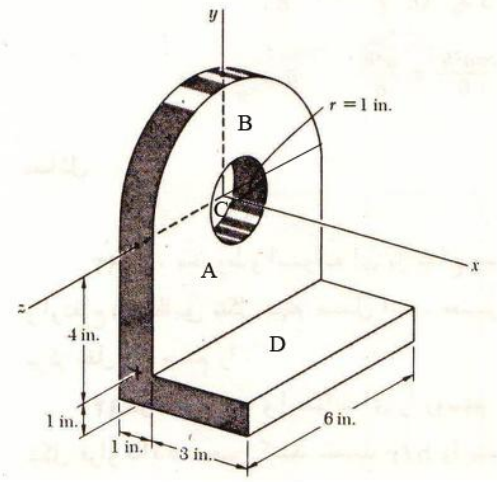
$$\overline{Z} = -95.492$$

```
Mass:                   4188790.3825
Volume:                 4188790.3825
Bounding box:       X: 195.0969  --  595.0969
                    Y: 134.8864  --  234.8864
                    Z: -200.0000  --  0.0000
Centroid:           X: 395.0969
                    Y: 172.3864
                    Z: -95.4929
Moments of inertia: X: 1.7723E+11
                    Y: 7.5441E+11
                    Z: 8.3111E+11
Products of inertia: XY: 2.8530E+11
                    YZ: -6.9955E+10
                    ZX: -1.5804E+11
Radii of gyration:  X: 205.6959
                    Y: 424.3837
                    Z: 445.4350
Principal moments and X-Y-Z directions about centroid:
```

که محاسبه با CAD تطبیق داده شده است و درست است.

5-98 مرکز ثقل قطعه‌ای از ماشین مطابق شکل را بدست آورید.





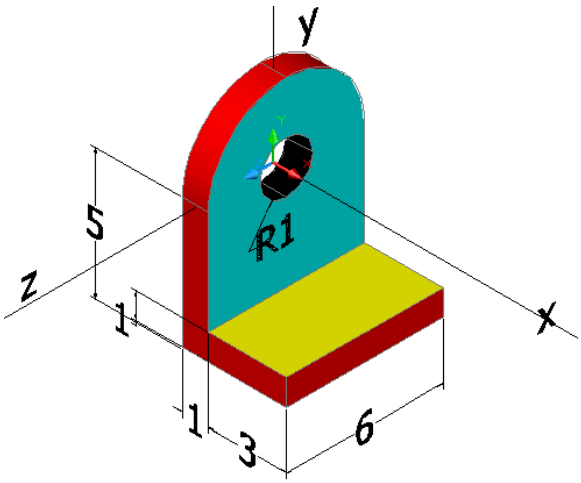
شکل	V^{1n^3}	$\bar{x}_c$
A	4x6x1 24	0
B	$1x\frac{\pi r^2}{2}$ 14.15	0
C	$-1x\pi r^2 = -3.14$	0
D	4x6x1 24	$2-0.5=1.5$
مجموع	59.01	

$V\bar{x}_c$	$\bar{y}_c$	$V\bar{y}_c$	$\bar{Z}_c$	$V\bar{Z}_c$
0	-2	-48	0	0
0	$4r/3\pi$ 1.27	18.02	0	0
0	0	0	0	0
36	-4.5	-108	0	0
36		-138.03	0	0

$$\bar{x}_c = \frac{V\bar{x}_C}{V} = \frac{36}{59} = 0.61 \quad in$$

$$\bar{y} = \frac{V\bar{y}_C}{V} = \frac{-138.03}{59} = -2.339 \quad in$$

$$\bar{Z} = \frac{V\bar{Z}_C}{V} = \frac{0}{59} = 0$$

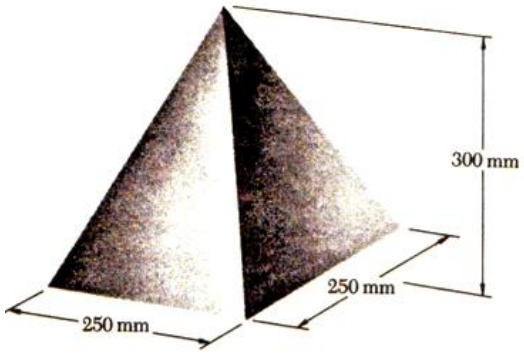


چون جسم باAutoCAD رسم شده است ،لذا مرکـز ثقـل آنـرا می توان بدست آورد

```
Mass:                   58.9956
Volume:                 58.9956
Bounding box:        X: -0.5000  --  3.5000
                     Y: -5.0000  --  3.0000
                     Z: -3.0000  --  3.0000
Centroid:            X: 0.6102
                     Y: -2.3392
                     Z: 0.0000
Moments of inertia:  X: 822.0465
                     Y: 263.9395
                     Z: 735.9395
Products of inertia: XY: -162.0000
                     YZ: 0.0000
                     ZX: 0.0000
Radii of gyration:   X: 3.7328
                     Y: 2.1152
                     Z: 3.5319
Principal moments and X-Y-Z directions about centroid:
```

که محاسبه با CAD تطبیق داده شده است و درست است.

5-100 هرم مربـع القاعـده‌ای بـه ارتفـاع ۳۰۰mm و بـه ضـلع ۲۵۰mm از چوب ساخته شده است. چهـار سـطح جـانبی آن از ورقه‌های فولادی به ضخامت ۱mm پوشانده شده، مرکز ثقـل آن را به دست آورید (وزن مخصـوص فـولاد $7850\,kg/m^3$ و وزن مخصوص چوب $550\,kg/m^3$ می‌باشد).



$h = 300 \quad mm$

$D = 250 \quad //$

1^{mm} فولادی ورق

$\rho = 7850\,kg/m^3$ فولاد

چوب $\rho = 550 \quad Kg/m^3$

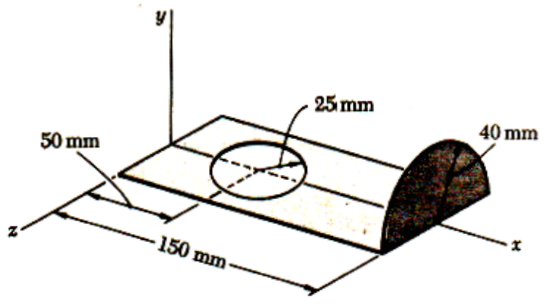
	$V \sim m^3$	$m \sim Kg$
شکل	$\frac{1}{3}\ abc$	$\rho\ \forall$
فولاد	$0.252x0.252x0.301 = 0.0063715$	50.17
خالی	-0.00625	-49.0625
چوب	$0.25x0.25x0.3/3 = 0.00625$	3.4375
مجموع	–	4.545

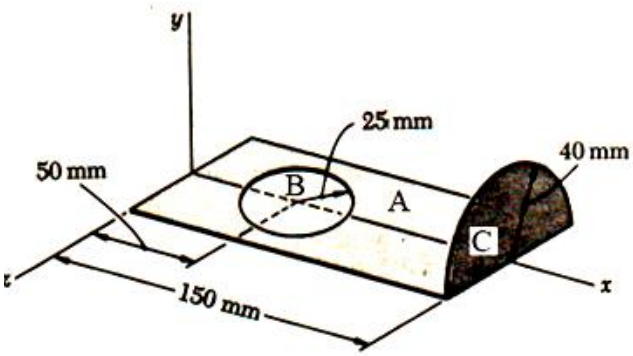
$\bar{h} \sim m$	$m\ \bar{h} \sim Kg - m$
$h/4$	
$0.302/4$	3.788
$0.30/4$	-3.6796
$0.30/4$	0.2578
	0.3662

$$\bar{h} = \frac{\sum mh}{\sum m} = \frac{0.3662}{4.5451} = 0.081\ \ M$$

$$\bar{h} = 81\ \ mm$$

5-102 مرکز ثقل صفحه فلزی مطابق شکل را بدست آورید.





$$A = 0.15x0.08t\rho = .012\ \rho t$$

شکل	x	x
A	$0.15x0.08$ $0.012\ \rho t$	$\frac{0.15}{2}$
–B	$\pi\ r^2 = \pi(0.025)^2$ $-0.00196\rho t$	0.05
C	$\pi r^2/2 = \pi(0.04)^2/2$ $0.002513\rho t$	0.15
مجموع	$0.01255\rho t$	

mx	y	my	Z	mz
$0.0009\ \ \rho t$	0	0	0	0
$-0.000098\ \ \rho t$	0	0	0	0
$0.000377\rho t$			0	0
$0.001179\rho t$			0	0

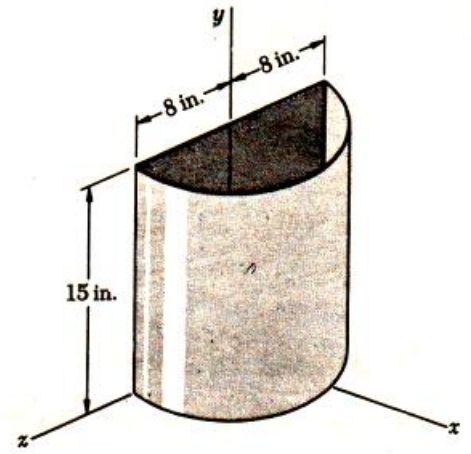
$$\bar{x} = \frac{mx}{m} = \frac{0.001179\ \rho\ t}{0.01255\ \rho\ t} = 0.09393$$

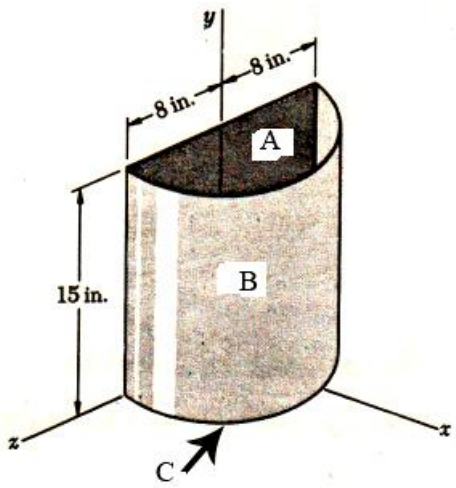
$$\bar{x} = 93.9\ \ mm$$

$$\bar{y} = \frac{my}{m} = \frac{0.0000425\ \rho t}{0.01255\ \rho t} = 0.0034\ \ m$$

$$\bar{y} = 3.4\ \ mm$$

5-104 سبد کاغذ باطله‌ای برای نصب در امتداد دیوار طرح‌ریزی شده است، ارتفاع آن ۱۵in و قاعده آن به شکل نیم دایره به شعاع ۸in می‌باشد. معین کنید مرکز ثقل آن را، می‌دانیم که از صفحه فلزی به ضخامت برابر ساخته شده است.





شکل	m	x
A	$16x15$ 240	0
B	$\pi D/2\,(15) = \pi(16/2)x15$ 377	$2r/\pi$ 5.093
C	$\pi(r^2)/2$ $= \pi(8)^2/2 = 100.5$	$\frac{4r}{3\pi} = \frac{4x8}{3\pi}$ 3.4
مجموع	717	

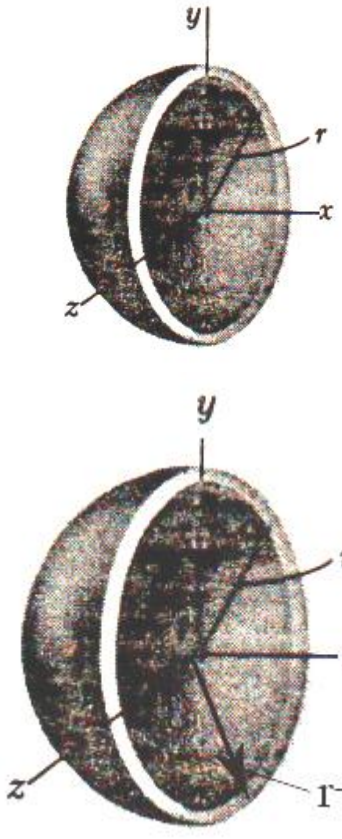
mx	y	my	Z	mz
0	$15/2$	1800	0	0
1920	$15/2$	2827.5	0	0
341.7	۰	۰	۰	۰
2261.7		4627.5	0	0

$$\bar{x} = \frac{my}{m} = \frac{2261.7}{717} = 3.15 \ \ in$$

$$\bar{y} = \frac{my}{m} = \frac{4627.5}{717} = 6.45 \ \ in$$

$$\bar{z} = 0$$

5-106 مرکز ثقل نیم کره نازک به شعاع r و ضخامت t را بدست آورید (فرض می‌شود که شکل از دوران نیم کره‌ای به شعاع r به نیمکره‌ای به شعاع r+t تشکیل یافته، سپس از جمله‌های t^2 و t^3 صرفنظر کرده فقط t را به حساب آورید).



شکل	V	x	Vx
$r+t$	$\frac{4}{3}\pi\ (r+t)^3$	$-\frac{3}{8}\ (t+r)$	$-\frac{1}{2}\pi\ (r+t)^4$
r	$-4/3\ \pi\ r^3$	$3/8\ r$	$-\frac{1}{2}\pi\ r^4$

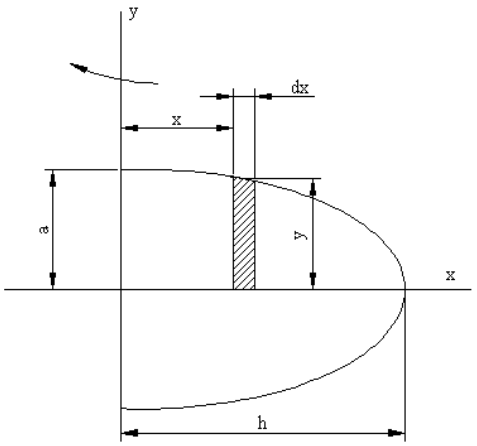
$$\bar{x} = -\frac{\frac{1}{2}\pi\ (r+t)^4 - \frac{1}{2}\pi\ r^4}{4/3\,\pi(r+t)3 - 4/3\,\pi\ r^3}$$

$$\bar{x} = -\frac{3(r^4+t^4+4r^3t+6r^2t^2+4rt^3+t^4-r^4)}{8(r^3+t^3+3r^2t+3rt^2-r^3)}$$

$$\bar{x} = -\frac{3}{8}\left[\frac{4r^3t}{3r^2t}\right]$$

$$\bar{x} = -\frac{1}{2}\ r$$

5-108 به روش مستقیم انتگرال‌گیری رابطه‌ای برای $\overline{X}$ در شکل زیر در دوران نیم بیضوی بدست آورید.



معادله بیضی $\frac{x^2}{h^2} + y^2/a^2 = 1$

$$d\,V = \pi y^2\ dx$$

$$V = \int_0^h \pi y^2\ dx = \pi \int_0^h \frac{a^2}{h^2}\ (h^2 - x^2)\ dx$$

$$V = \frac{\pi a^2}{h^2}\left[h^2 x - \frac{1}{3}\right]_0^h$$

$$V = 2\pi\ a^2 h/3$$

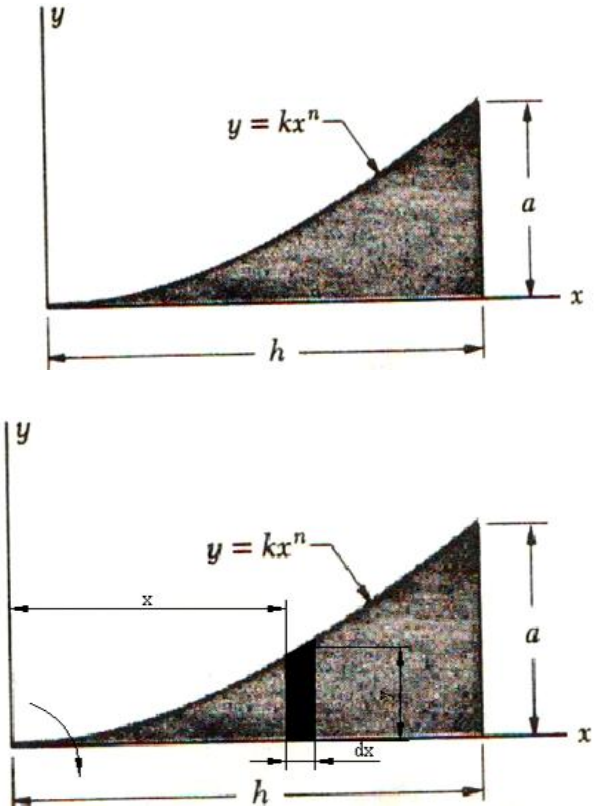
$$\bar{x}\ \bar{V} = \int x_{el}\ dv = \frac{\pi a^2}{h^2}\int\ (h^2 x - x^3)\ dx$$

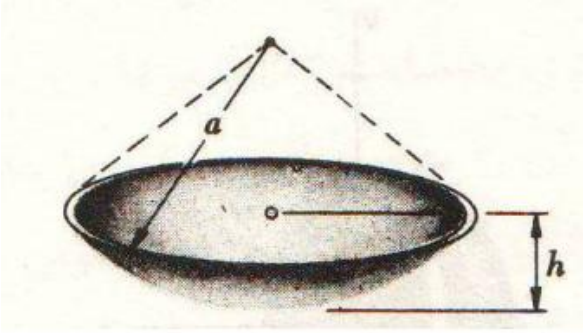
$$\bar{x}\ \bar{V} = \frac{\pi a^2}{h^2}\left[\frac{h^2}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^h$$

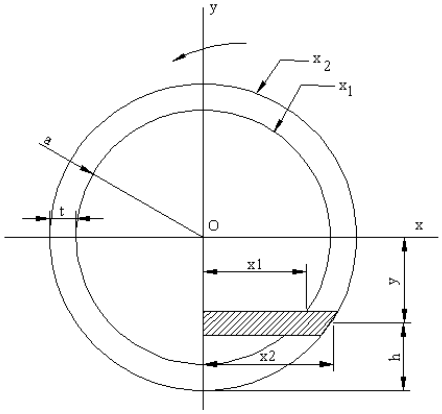
$$\overline{X}\ (2\pi\ a^2 h/3) = \frac{\pi a^2}{h^2}\left[\frac{h^4}{2} - h^4/4\right] = \frac{\pi a^2 h^2}{4}$$

$$\overline{X} = \frac{3}{8}\ h$$

5-109 حجمی مطابق شکل از دوران سطح مسئله با n=2حول محور x به اندازه 180° بدست آمده مرکز حجمی آن را با روش انتگرال‌گیری بدست آورید.







$x_2 \rightarrow R = a + t$

$x_1 \rightarrow R = a$

$x^2 + y^2 = R^2$

$x_2{}^2 = (a+t)^2 - y^2$

$x_2{}^2 = a + t^2 + 2at - y^2$

$x_1{}^2 = a^2 - y^2$

$d\,V_2 = \pi\; x_2{}^2 dy$

$d\,V = dV_2 - dV_1 = \pi(x_2{}^2 - x_1{}^2)\;\; dy$

$t^2 \approx 0$

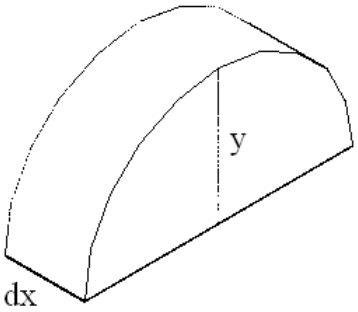
$d\,V = \pi\;\; (a^2 + t^2 + 2at - y^2 - a^2 + y^2)\;\; dy$

$d\,V = \pi\;\; (+2at)\;\; dy$

$V = \int_{-a}^{-(a-h)} \;\; \pi(2at)\;\; dy - 2\pi at\;\; [y]_{-a}^{h-a}$

$V = 2\pi\;\; at\;\; [h - a - (-a)] = 2\pi\;\; a\;\; th$

$\bar{y}\;\; V = \int y_{el}\;\; dV = \int_{-a}^{h-a} \;\; -\pi\;\; (2at)\;\; y\;\; dy$



$n = 2 \quad z = 0 \quad y = K\;\; x^2 \qquad a = K\;\; h^2$

$d\;\; V = \pi y^2 \big/ 2 \;\; dx$

$V = \int_0^h \frac{\pi y^2}{2} \;\; dx = \frac{\pi}{2} \;\; \int_0^h \;\; \frac{a^2}{h^4} \;\; x^4 \;\; dx$

$\bar{x}\;\; \bar{V} = \frac{\pi}{2} \;\; \frac{a^2}{h^4} \;\; \left[\frac{1}{5} x^5\right]_0^h = \;\; \frac{\pi a^2 h}{10}$

$y_{el} = 4r \big/ 3\pi$

$y_{el} = 4y \big/ 3\pi$

$\bar{y}\;\; V = \int y_{el}\;\; dv \;\; = \int \frac{4y}{3\pi} \;\; dv$

$\bar{y}\;\; V = \int 4 \big/ 3 \;\; \frac{y}{\pi} \;\; \frac{\pi y^2}{2} \;\; dx = \frac{2}{3} \;\; \int y^3 \;\; dx$

$\bar{y}\;\; V = 2 \big/ 3 \;\; \int_0^h \frac{a^3}{h^6} \;\; x^6 = 2 \big/ 3 \;\; \frac{a^3}{h^6} \;\; \left[\frac{1}{7} x^7\right]_0^h$

$\bar{y}\;\; (\frac{\pi a^2}{10} \;\; h) = \frac{2}{3} \;\; \frac{a^3}{h^6} \;\; \left[\frac{1}{7} h^7\right]$

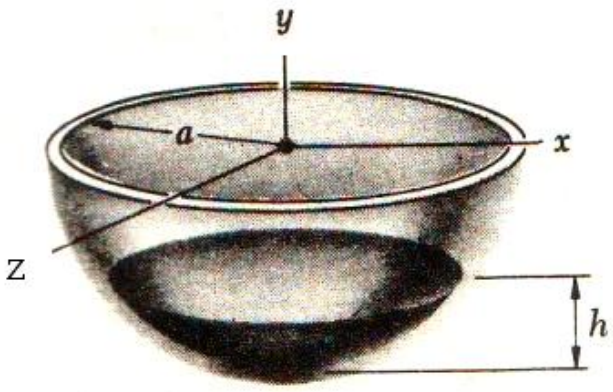
$\bar{y} = \frac{20\;\; a}{21\;\; \pi}$

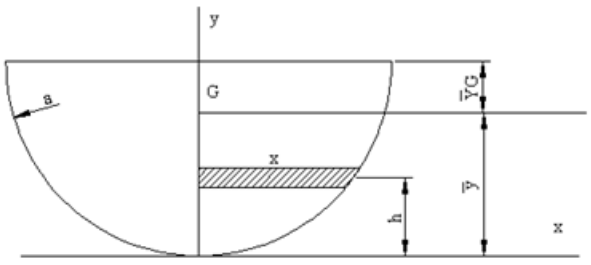
5-112 تاج کروی به شعاع a و ضخامت برابر t مطابق شکل بـه روش مستقیم انتگرال‌گیـری مرکـز ثقـل آن را محاسـبه کـرده و نشان دهید که محل آن بفاصله $\frac{1}{2}h$ بالای قاعده آن می‌باشد.

```
ss:                          8.9012
lume:                        8.9012
unding box:          X: -2.2913  --   2.2913
                     Y: -1.6130  --  -0.1130
                     Z: -2.2913  --   2.2913
ntroid:              X: 0.0000
                     Y: -0.750
                     Z: 0.0000
ments of inertia:    X: 16.8528
                     Y: 21.1338
                     Z: 16.8528
oducts of inertia: XY: 0.0000
                   YZ: 0.0000
                   ZX: 0.0000
dii of gyration:     X: 1.3760
                     Y: 1.5409
                     Z: 1.3760
incipal moments and X-Y-Z directions about centroid:
```

که محاسبه با CAD تطبیق داده شده است و درست است.

5-113 ظرفی به شکل نیم کره به شعاع a از آب تا ارتفاع h پر شده است. معین کنید مرکز ثقل آب داخل ظرف را به روش انتگرال گیری





$$\bar{y}\,V = -\pi\,(2at)\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-a}^{h-a} = -\pi at\left[h^2+a^2-2ah-a^2\right]$$

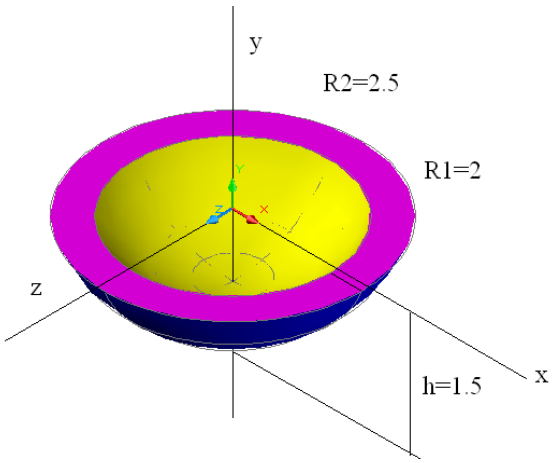
$$\bar{y} = \frac{-\pi\ at\ \left[h^2-2ah\right]}{2\pi\ at\ h} = \frac{-h+2a}{2}$$

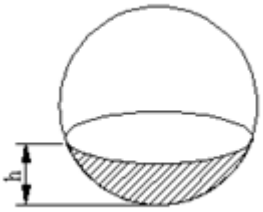
$$\bar{y} = a - h/2$$

$$y_C = a - \bar{y} = h/2$$

چون جسم باAutoCAD رسم شده است ،لذا مرکز ثقل آنرا می توان بدست آورد. در اینجا R_1=2 ,R_2=2.5 in انتخاب شده است in,h=1.5in

$$y_C = -h/2 = -1.5/2 = -0.75\ in$$





$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$d\ V = \pi x^2 dy$$

$$y^2 + a^2 - 2ya + x^2 = a^2$$

$$(y-a)^2 + x^2 = a^2$$

$$\forall = \int d\ \forall = \int_0^h \pi\ (2ay - y^2)\ dy$$

$$\forall = \pi \left[ay^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^h = \pi \left[ah^2 - \frac{1}{3}h^3 \right]$$

$$\forall = \pi\ h^2 (a - h/3)$$

$$\bar{y}\ \forall = \int y_{el}\ d\ \forall = \int_0^h y\ (\pi)\ (2ay - y^2)\ dy$$

$$\bar{y}\ \forall = \pi \int_0^h (zay^2 - y^3)\ dy = \pi \left[\frac{2a}{3}y^3 - \frac{1}{4} \right]_0^h$$

$$\bar{y}\ \forall = \pi \left[\frac{2ah^3}{3} - \frac{1}{4}h^4 \right]$$

$$\bar{y}\ \pi\ (h^2)\ (a - h/3) = \pi\ h^3 \left[\frac{2a}{3} - h/4 \right]$$

$$\bar{y}\ (a - h/3) = h\ (2a/3 - h/4)$$

$$\bar{y} = \frac{h\ (2a/3 - h/4)}{a - h/3} = \frac{h\ (8a - 3h)}{12a - 4h}$$

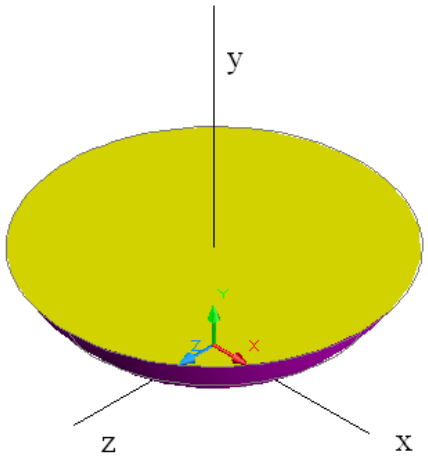
$$\overline{y_G} = a - \bar{y} = a - \frac{h\ (8a-3h)}{12a-4h} = \frac{12a^2 + 3h^2 - 12ah}{12a - 4h}$$

$$\bar{y}_G = \frac{3}{4}\left(\frac{(2a-h)^2}{3a-h}\right)$$

$$a = h \qquad \overline{y_G} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{3}{8}a$$

چون جسم باAutoCAD رسم شده است ،لذا مرکز ثقل آنرا می توان بدست آورد. در اینجا R=a=1 in , انتخاب شده است

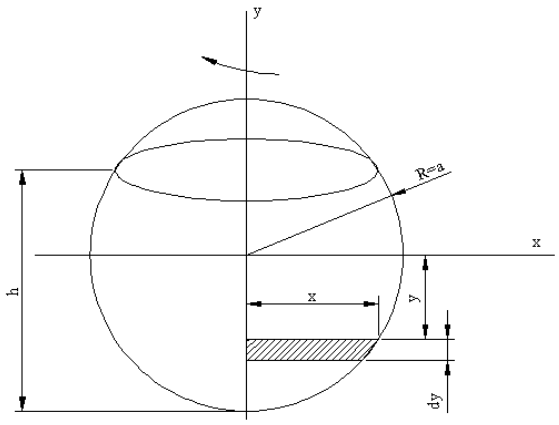
$$\overline{y_G} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{3}{8}(1) = 0.375\ in$$



Mass:	0.6545	
Volume:	0.6545	
Bounding box:	X: -0.8660	--
	Y: 0.0500	--
	Z: -0.8660	--
Centroid:	X: 0.0000	
	Y: 0.3750	
	Z: 0.0000	
Moments of inertia:	X: 0.1882	
	Y: 0.1734	
	Z: 0.1882	
Products of inertia:	XY: 0.0000	
	YZ: 0.0000	
	ZX: 0.0000	
Radii of gyration:	X: 0.5362	
	Y: 0.5148	
	Z: 0.5362	
Principal moments and	X-Y-Z directio	

که محاسبه با CAD تطبیق داده شده است و درست است.

5-114ظرف کروی بقطر ۲ متر از آب بعمق ۱,۵ متر پر شده است.بروش انتگرال گیری مرکز ثقل آب داخل ظرف را معین کنید.



$$d\,V = \pi\, x^2 dy$$

$$d\,V = \pi\,(a^2 - y^2)\,dy$$

$$V = \int_{-a}^{h} \pi\,(a^2 - y^2)\,dy = \pi\left[a^2 y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-a}^{h}$$

$$V = \pi\left[a^2 h - h^3/3 + a^3 - a^3/3\right]$$

$$\bar{y}\,V = \pi\int_{-a}^{h} (a^2 y - y^3)\,dy = \pi\left[\frac{a^2}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4\right]_{-a}^{h}$$

$$\bar{y}\,V = \pi\left[a^2/2\,h^2 - h^4/4 - a^4/2 + a^4/4\right]$$

$$a = 1 \qquad h = 1.5 - 1 = 0.5$$

$$V = \pi\left[0.5 - \frac{(0.5)^3}{3} + 1 - 1/3\right] = \pi(1.125)$$

$$V\,\bar{y} = \pi\left[\frac{(0.5)^2}{2} - \frac{(0.5)^4}{4} - \frac{1}{2} + 1/4\right]$$

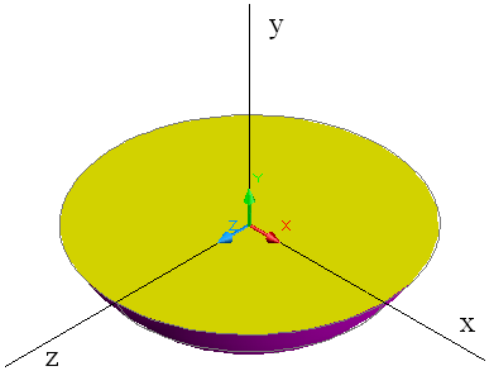
$$V\,\bar{y} = \pi\,[0.125 - 0.015625 - 0.5 + 0.25]$$

$$\pi\,(1.125)\,\bar{y} = \pi\,(-0.140625)$$

$$\bar{y} = -0.125\ m$$

زیر محور x

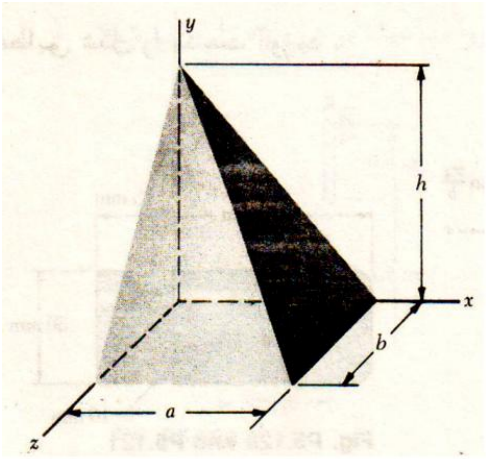
چون جسم باAutoCAD رسم شده است ،لذا مرکز ثقل آنرا می توان بدست آورد. در اینجا h=1.5in, R=2.5 in انتخاب شده است

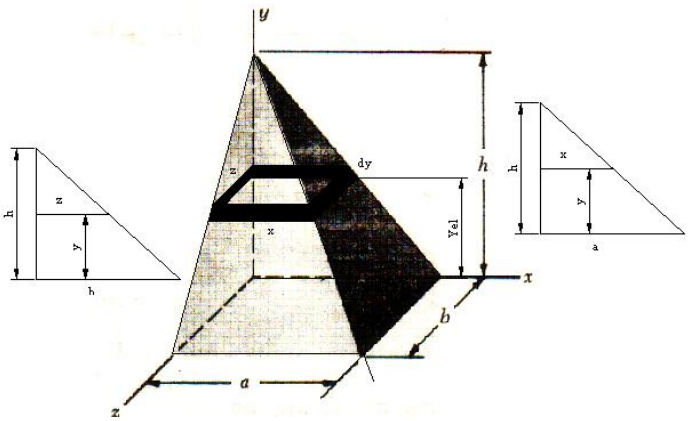



```
Mass:                   0.6545
Volume:                 0.6545
Bounding box:       X: -0.8660  --
                    Y: -0.4500  --
                    Z: -0.8660  --
Centroid:           X: 0.0000
                    Y: -0.1250
                    Z: 0.0000
Moments of inertia: X: 0.1064
                    Y: 0.1734
                    Z: 0.1064
Products of inertia: XY: 0.0000
                     YZ: 0.0000
                     ZX: 0.0000
Radii of gyration:  X: 0.4031
                    Y: 0.5148
                    Z: 0.4031
Principal moments and X-Y-Z direction
Press ENTER to continue:
```

که محاسبه با CAD تطبیق داده شده است و درست است.

5-115 مرکز حجمی هرم غیر منتظمی مطابق شکل را بدست آورید.





$$dv = xzdy$$

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h}$$

$$x = \frac{a}{h}(h-y)$$

$$\frac{z}{b} = \frac{h-y}{h}$$

$$z = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$Xel = \frac{x}{2} \quad Zel = \frac{z}{2}$$

$$v = \int xzdy = \int_v^h \frac{ab}{n^2}(h-y)^2\,dy$$

$$v = \frac{ab}{h^2}\int_0^h \left[h^2 + y^2 - 2hy\right]dy$$

$$v = \frac{ab}{h^2}\left[h^2 y + \frac{1}{3}y^3 - hy^2\right]_0^h$$

$$v = \frac{ab}{h^2}\left[h^3 + \frac{1}{3}h^3 - h^3\right]\frac{abh}{3}$$

$$\bar{vx} = \int Xeldv$$

$$\bar{vx} = \int \frac{x}{2}dv = \int_0^h \frac{a^2 b}{zh^3}(h-y)^3\,dy$$

$$\bar{vx} = \frac{a^2 b}{2h^3}\left[-\frac{1}{4}(h-y)^4\right]_0^h$$

$$\bar{vx} = \frac{-a^2 b}{4x2h^3}\left[(h-y)^4\right]_0^h$$

$$\bar{vx} = -\frac{a^2 b}{8h^3}\left[-h^4\right] = +\frac{a^2 b}{8h^3}h^4 = \frac{a^2 bh}{8}$$

$$\bar{x} = \frac{a^2 bh}{8} x \frac{3}{abh}$$

$$\bar{x} = \frac{3}{8}a$$

$$\bar{vy} = \int Y_{el}dv = \int_0^h \frac{ab}{h^2}(h-y)^2\,ydy$$

$$\bar{vy} = \frac{ab}{h^2}\int_0^h (h^2 y + y^3 - 2hy^2)dy$$

$$\bar{vy} = \frac{ab}{h^2}\left[\frac{1}{2}h^2 y^2 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{2}{3}hy^3\right]_0^h$$

$$\bar{vy} = \frac{ab}{h^2}\left[\frac{1}{2}h^4 + \frac{1}{4}h^4 - \frac{2}{3}h^4\right]$$

$$\bar{vy} = \frac{ab}{h^2}\times h^4\left[\frac{6+3-8}{12}\right] = \frac{1}{12}abh^2$$

$$\bar{y} = \frac{1}{12}abh^2 \times \frac{3}{abh} = \frac{1}{4}h$$

$$\bar{y} = \frac{1}{4}h$$

$$\bar{vz} = \int Z_{el}\,dv = \int_0^h \frac{ab^2}{zh^2}(h-y)^3\,dy$$

$$\bar{vz} = \frac{ab^2}{2h^2}\left[-\frac{1}{4}(h-y)^4\right]_0^h$$

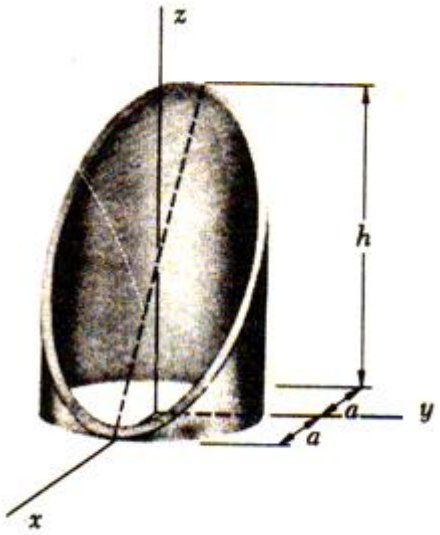
$$\bar{vz} = \frac{ab^2}{-8h^2}\left[(h-y)^4\right]_0^h$$

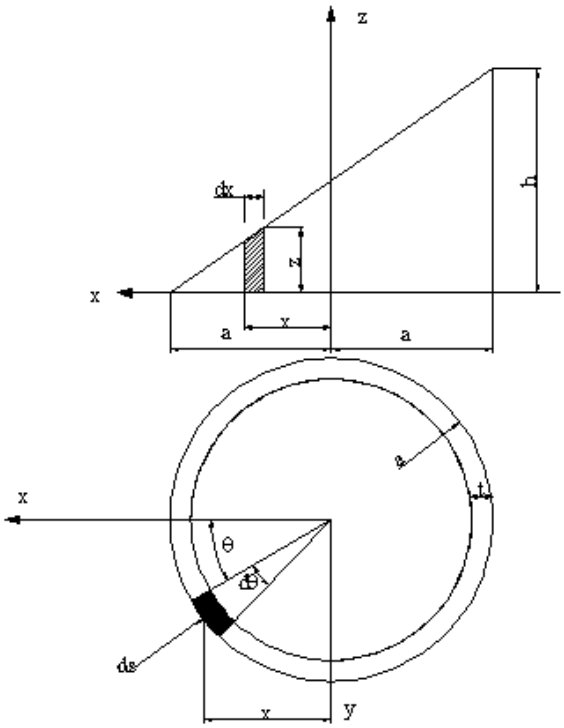
$$\bar{vz} = -\frac{ab^2}{8h^2}(-h^4) = \frac{ab^2}{8}h$$

$$\bar{z} = \frac{ab^2 h}{8}\times\frac{3}{abh} = \frac{3}{8}b$$

$$\bar{z} = \frac{3}{8}b$$

5-118 مرکز حجمی مقطعی مطابق شکل را که از تقاطع لولـه گرد نازک بوسیله سطح مورب حاصل شده بدست آورید.





$$x = a\cos\theta$$
$$\frac{z}{h} = \frac{a-x}{2a} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)$$
$$z = \frac{h}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)$$
$$dA = t.ds = ad\theta$$

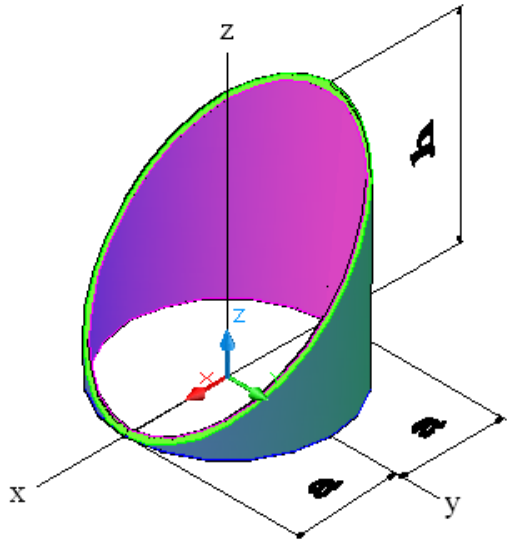
$$dA = t.a.d\theta \qquad ds = ad\theta$$
$$dV = zdA = \frac{h}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)t.a.d\theta$$
$$dV = \frac{h}{2}(1-cos\theta)t.a.d\theta$$
$$V = \frac{h}{2}ta\int_0^{2\pi}(1-cos\theta)d\theta$$
$$V = \frac{h}{2}ta[\theta - sin\theta]_0^{2\pi}$$
$$V = hta\pi$$

$$\bar{z}V = \int z_{el}dV = \int \frac{z}{2}.\frac{h}{2}(1-cos\theta)t.a.d\theta$$
$$\bar{z}V = \int \frac{h}{4}(1-cos\theta)\frac{h}{2}(1-cos\theta)t.a.d\theta$$
$$\bar{z}V = \frac{h^2}{8}t.a\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$
$$\bar{z}V = \frac{h^2}{8}t.a\int_0^{2\pi}(1+cos^2\theta-2cos\theta)\,d\theta$$

$$\bar{z}V = \frac{h^2}{8}t.a\int_0^{2\pi}(1+\frac{cos2\theta+1}{2}-2cos\theta)\,d\theta$$
$$\bar{z}(hta\pi) = \frac{h^2}{8}t.a[\theta+\frac{\sin2\theta}{4}+\frac{1}{2}\theta-2\sin\theta]_0^{2\pi}$$
$$\bar{z}(hta\pi) = \frac{h^2}{8}t.a(3\pi+\pi)$$
$$\bar{z} = \frac{3}{8}h$$
$$\bar{x}V = \int x_{el}dV = \int_0^{2\pi}(acos\theta)\frac{h}{2}(1 - cos\theta)t.a.d\theta$$
$$\bar{x}V = \int_0^{2\pi}\frac{ha^2}{2}tcos\theta(1-cos\theta)d\theta$$
$$\bar{x}V = \frac{ha^2}{2}t\int_0^{2\pi}(cos\theta-\frac{cos2\theta+1}{2})d\theta$$
$$\bar{x}V = \frac{ha^2}{2}t[sin\theta-\frac{sin2\theta}{4}-\frac{1}{2}\theta]_0^{2\pi}$$
$$\bar{x}V = -\pi(\frac{a^2}{2}ht)$$
$$\bar{x} = -\frac{a}{2}$$
$$h = 100, d_i = 48, d_O = 50,\ \ t = 2$$
$$\bar{y} = \frac{3(100)}{8} = 37.5 \quad \bar{x} = \frac{-50}{2} = -24$$

$$V=\frac{1}{2}\pi h(r_2+r_1)t=\frac{1}{2}\pi(100)(48+50)2$$

V=30787

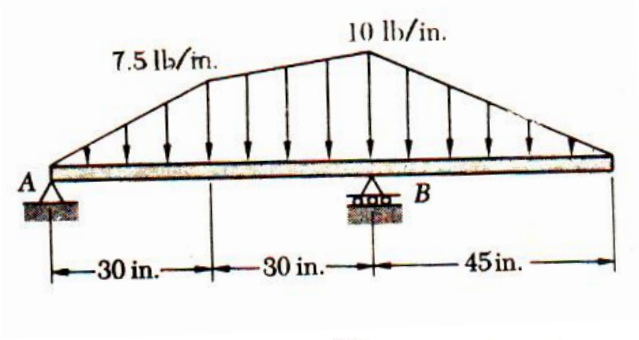


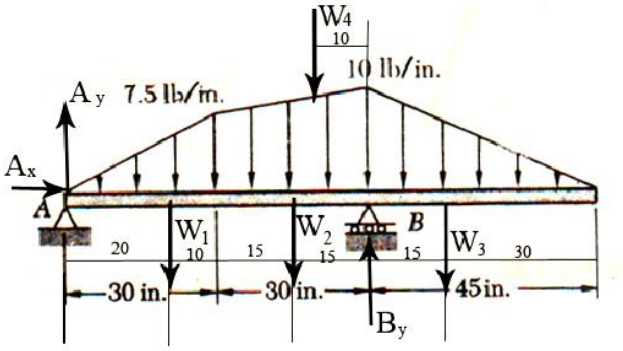
مرکز ثقل بوسیله ،بدست آمدهAutoCAD

وبا جواب کاملاً همخوانی دارد

```
Mass:                  30787.6080
Volume:                30787.6080
Bounding box:          X: -50.0000  --  50.0000
                       Y: -50.0000  --  50.0000
                       Z: 0.5000  --  100.5000
Centroid:              X: -24.0200
                       Y: 0.0000
                       Z: 37.5100
Moments of inertia:    X: 100755320.7070
                       Y: 100755320.7070
                       Z: 73951834.4284
Products of inertia:   XY: 0.0000
                       YZ: 0.0000
                       ZX: -37345676.3864
Radii of gyration:     X: 57.2066
                       Y: 57.2066
                       Z: 49.0102
Principal moments and X-Y-Z directions about cen
```

126معین کنید عکس‌العملهای نقاط A و B را.





$$W_1=\frac{7.5(30)}{2}=112.5\ lb$$

$$W_4=\frac{(10-7.5)\ 30}{2}$$

$$W_3=\frac{10\times 45}{2}\qquad W_4=37.5\ lb$$

$$W_3=225\ lb$$

$$W_2=7.5\times 30=225\ lb$$

$$\sum MA=0\ \curvearrowleft^{+}$$

$$-225\ (75)+By\ (60)-37.5\ (50)-225\ (45)$$

$$-112.5\ (20)=0$$

$$60By=16875+1875+10125+2250=31125$$

$$By=518.75$$

$$By=519\ \ lb$$

$$+\uparrow\ \sum Fy=0$$

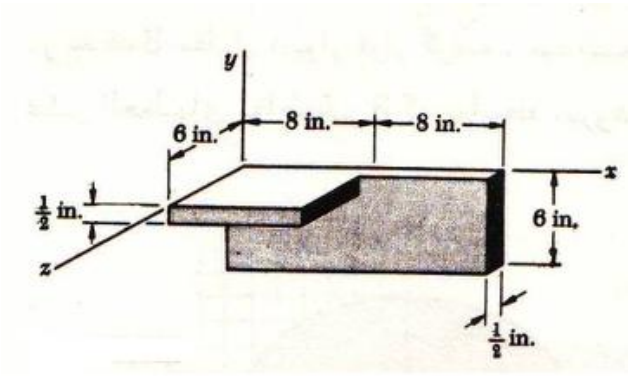
$$Ay=-112.5-225-37.5+By-225=0$$

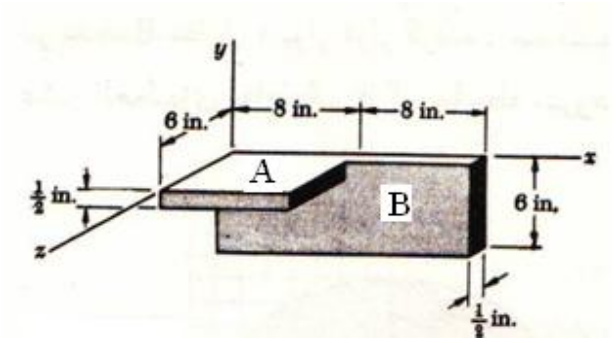
$$Ay=112.5+225+37.5-518.75+22.5$$

$$Ay=81.3\ lb$$

$$Ax=0$$

5-128 قسمتی از قطعه فلزی بابعاد $6\times6\times\frac{1}{2}in$ مطابق شکل بریده شده، معین کنید مرکز ثقل قطعه باقی مانده را.



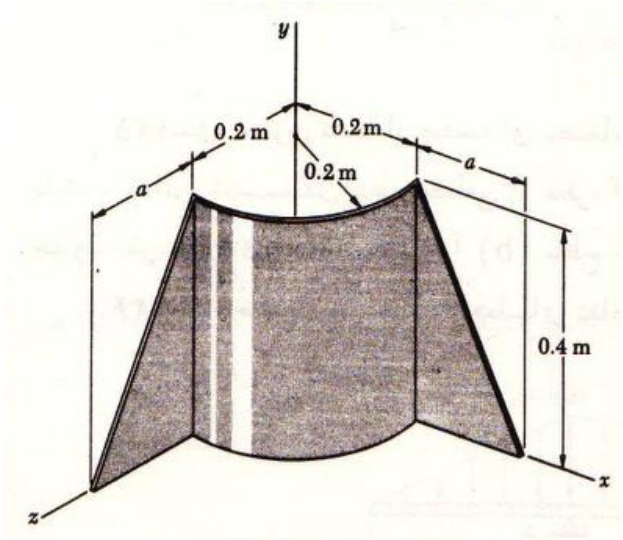


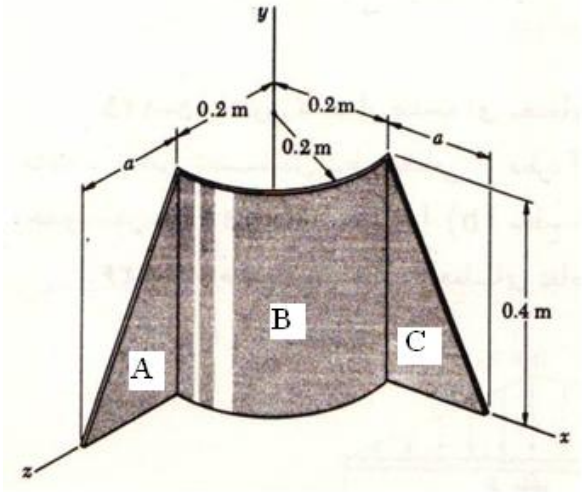
شکل	V	x	$V\,x$
A	$16\times6\times\frac{1}{2}$ 48	8	384
B	$8\times5.5\times\frac{1}{2}$ 25	4	88
مجموع	70		427

y	$V\,Y$	Z	$V\,Z$
-3	-144	$\frac{1}{4}$	12
$-0.5/2$	-5.5	$0.5+5.5/2$ 3.25	71.5
	- 149.5		83.5

$$x=\frac{Vx}{V}=\frac{472}{70}=6.74''$$
$$y=\frac{Vy}{V}=\frac{-149.5}{70}=2.14''$$
$$Z=\frac{VZ}{V}=\frac{83.5}{70}=1.193''$$

5-130 معین کنید فاصله a را به طوری که مرکز ثقل شکل صفحه فلزی در فاصله 0.2 متری از محور y قرار داشته باشد.





$\bar{y}=0$

$\bar{x}=0.2$

شکل	m
A	$A = 0.4 a/2$ $m = 0.2a\rho t$
B	$\frac{1}{4}\ (2\pi\ r)(0.4)$ $\frac{1}{4}\ (2\pi)(0.2)(0.4)$ $m = 0.04\pi\rho\ t$
C	$m = 0.2a\rho t$
جمع	$0.4a + 0.04\ \pi$

x	mx
0	0
$2r/\pi$ $0.4/\pi$	$0.016\rho t$
$\frac{1}{3}a + 0.2$	$0.2a(\frac{1}{3}a + 0.2)\rho t$
	$0.016 + 0.2a(1/3\ a + 0.2)$

$$\overline{X} = \frac{mx}{m} = \frac{0.016 + 0.2a(1/3\ a + 0.2)}{0.4a + 0.04\ \pi}$$

$$0.2 = \bar{x}$$

$$(0.2)\ (0.4a + 0.04\pi) = 0.016 + \frac{0.2}{3}\ a^2 + 0.04\ a$$

$$0.08a + 0.02513 = 0.016 + \frac{0.2}{3}a^2 + 0.04a$$

$$\frac{0.2}{3}a^2 - 0.04a - 0.00913 = 0$$

$$a^2 - 0.6a - 0.137 = 0$$

$$a = \frac{0.6 \mp \sqrt{0.36 + 4\ (0.137)}}{2}$$

$$a = \frac{0.6 \mp 0.95}{2}$$

$$a = 0.775$$

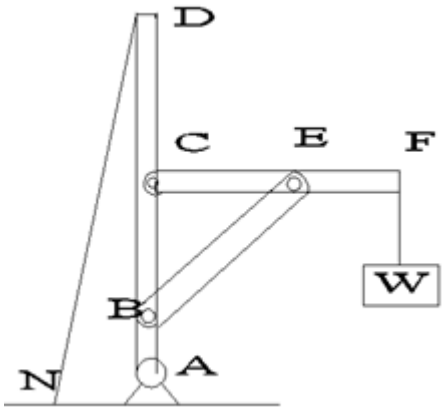
منفی قبول نیست

فصل ۶

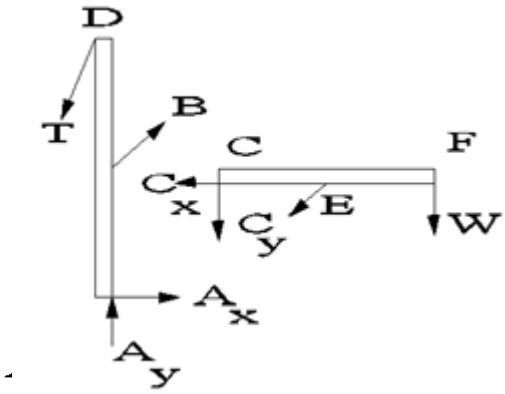
خرپا **TRUSSES** :

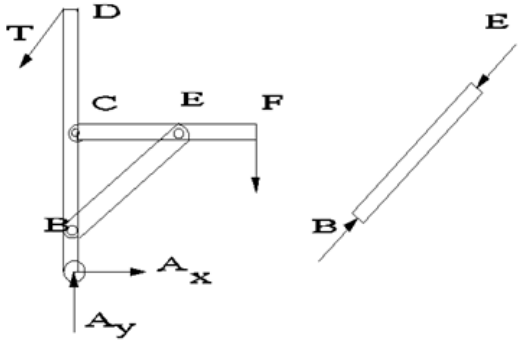
یادآوری قبلی

تعادل اجسامیکه از چند جزء متصل به هم تشکیل شده اند : (قاب) Frame می گویند.



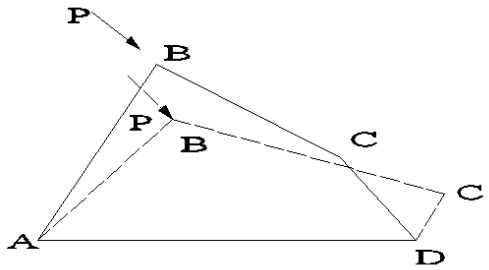
F.B.D of Frame



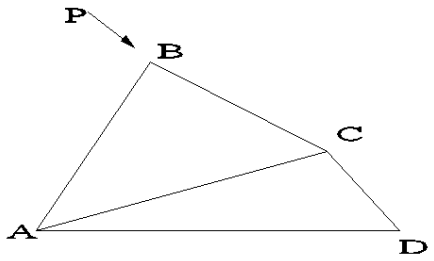


در BE نیروی B,F مساوی هستند (عضو دو نیرو)در F.B.D کل چون w معلوم است ممان نیروها نسبت بهA نیروی T را مشخص می کنند و غیره

به قاب زیر توجه شود .این قاب در مقابل آن نیروی کم P ، دوام نمی آورد و بهم می ریزد.



حال اگر میله AC را رسم کنیم چه پیش می آید ،این قاب پایدار تر است .

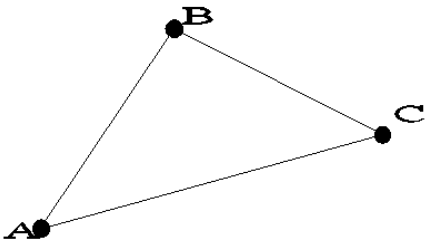


می توان گفت خرپا یک قاب است ،پس خرپا تعریف شده است از سازه ای که اعضاء آن (که سه عضو هستند) توسط مفصل هائی بدون اصطکاک به هم متصل شده اند .

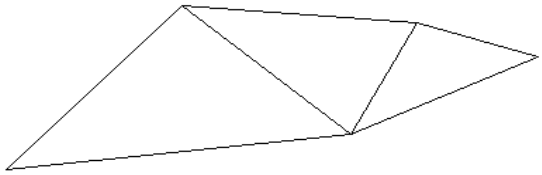
اگر تمام نیروها در یک صفحه باشند آنرا خرپای دو بعدی و در غیر اینصورت خرپای فضایی یا سه بعدی می گویند .

یک سازه پایدار و ساده (خرپای دو بعدی پایدار) :

خر پا از سه عضو تشکیل شده اند .

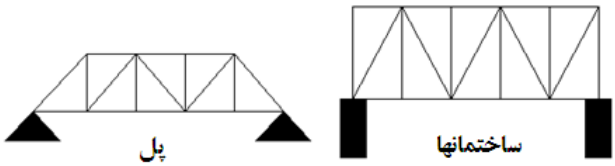


خرپای مرکب

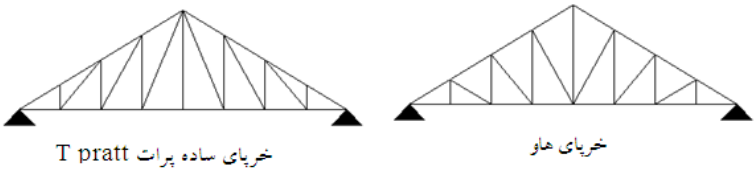


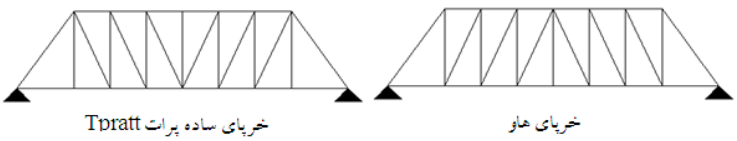
خرپای دو بعدی به شرح زیر هستند .

خرپای تخت : ساختمانها و پل ها

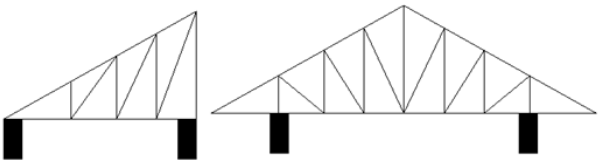


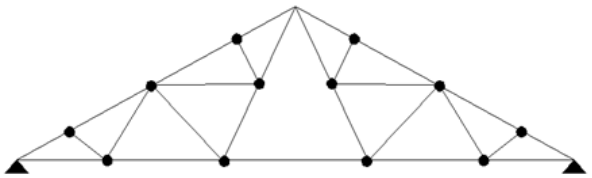
برای پل هم چنین داریم ، خر پای مرکب و قرینه:



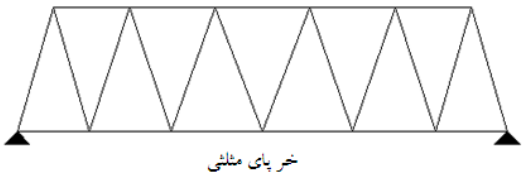


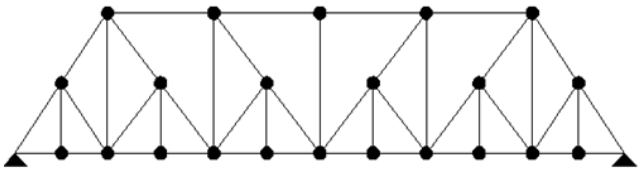
خرپای شیبدار : مورد استفاده در ساختمانها

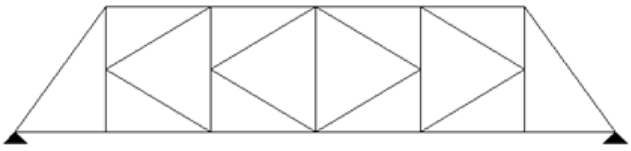




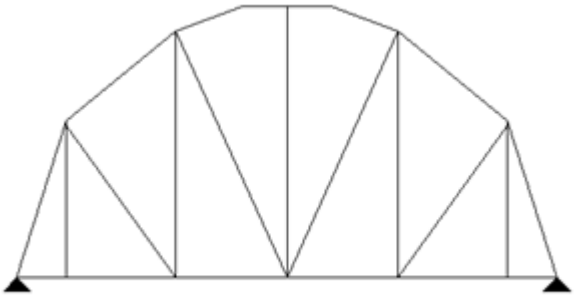
خرپای چند ضلعی ،
مورد استفاده در ساختمانها و پل ها







خرپای قوسی مورد استفاده در پل ها

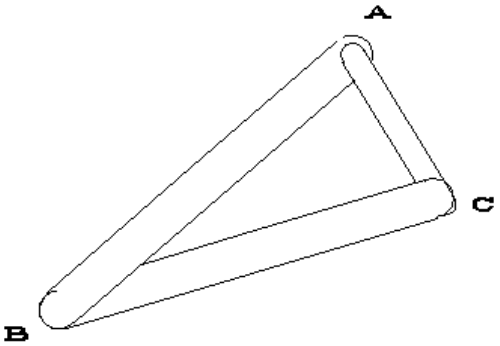


خرپای قوسی

تحلیل خرپاها : فرضیات

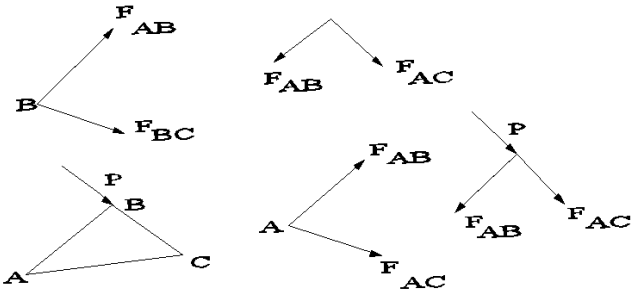
۱- اتصال تمام اعضاء به یکدیگر بوسیله پین بدون اصطکاک صورت می گیرد .

A, B, Cپین بدون اصطکاک است .



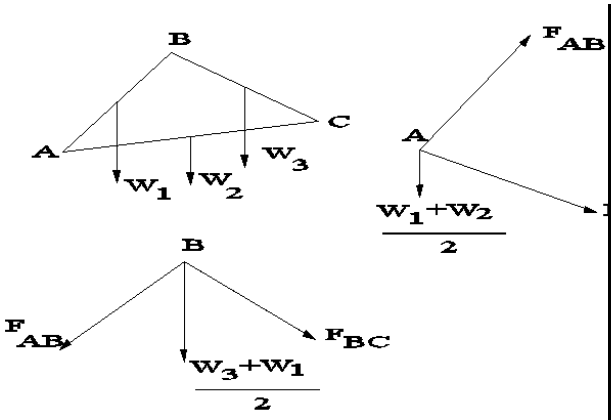
۲- بارهای خارجی و از جمله نیروها ی عکس العمل تکیه گاهی فقط از طریق اتصالات به خرپا وارد می گردد .

مثل :

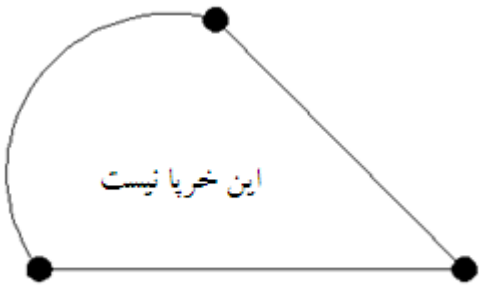


۳- از وزن تمام اعضا صرف نظر می شود .

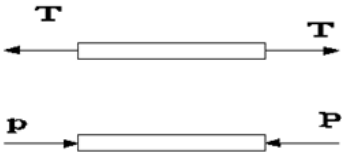
اگر پل ساده باشد ، وزن بازوها زیاد و در نتیجه مثل اهرم عمل می شود و بهره هر گره وزن w/2 وارد می شود . مثل :



۴- اعضاء خرپا مستقیم هستند .



نیروهای داخلی اعضا ء خرپا :کششی،فشاری وخنثی هستند

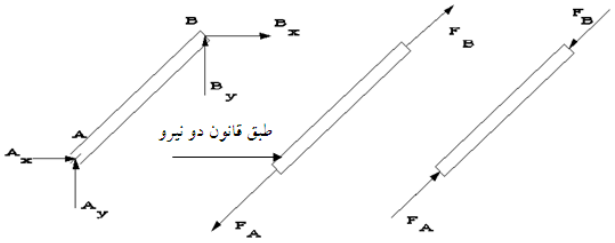


۱-کششی (Tension)

۲-فشاری (compression)

۳-خنثی (Neutral) یا نیروهای صفر (Zero-Force Members)

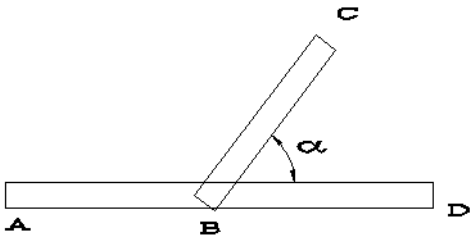
F.B.D یک عضو

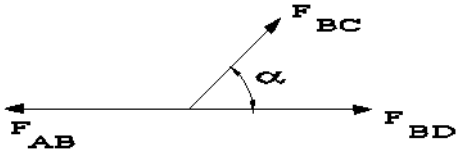


در تمام مسائل اول فرض گرفته می شود که کششی است یعنی در جهت + ، اگر در حل مسئله جواب منفی شد پس نیرو فشاری است .

تشخیص اعضاء خشی و روش گره ها

فرض می شود، F_{BD}, F_{AB}, F_{BC} همه کششی هستند .

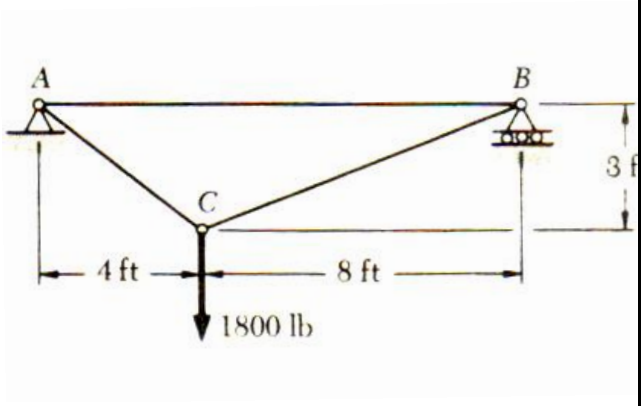


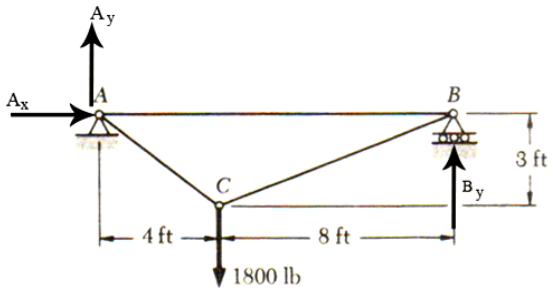


$$\sum Fx = 0$$
$$-F_{AB} + F_{BD} + F_{BC}\cos\alpha = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BS}\sin\alpha = 0$$
$$\sin\alpha \neq 0$$
$$F_{BC} = 0$$

پس بازوی BC ،یک بازوی خنثی است

6-2 با استفاده از روش مفصل‌ها معین کنید نیرو را در هر عضوی از خرپای (تیر مشبک) مطابق شکل را هم چنین نشان دهید کدام عضو در وضع کشش و کدام در وضع تراکم است.





$F_{BC} = ?$ $F_{AB} = ?$ $F_{AC} = ?$

$^{+}\circlearrowleft \sum MA = 0$

$(B_y)\ (12) - 1800\ \ (4) = 0$

$B_y = 600 \quad lb \uparrow$

$\sum Fx = 0$

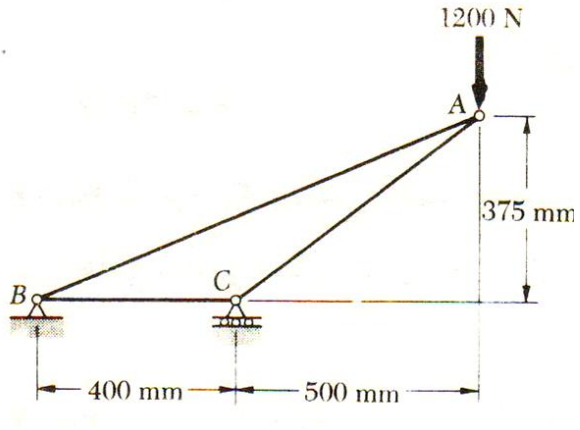
$Ax = 0$

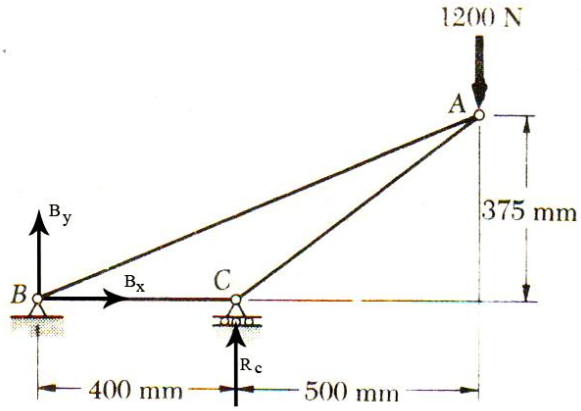
$\sum Fy = 0$

$Ay - 1800 + 600 = 0$

$Ay = 1200 \quad lb \uparrow$

6-4 با استفاده از روش مفصل‌ها معین کنید نیرو را در هر عضوی از خرپای (تیر مشبک) مطابق شکل را هم چنین نشان دهید کدام عضو در وضع کشش و کدام در وضع تراکم است.





$F_{BC} = ?$ $F_{AB} = ?$

$F_{AC} = ?$

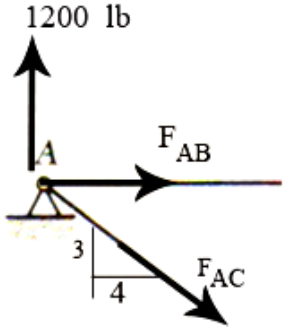
$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum MB = 0$

$-1200\ (0.9) + R_C(0.4) = 0$

$R_C = 2700\ \ lb$

$\sum Fx = 0 \qquad Bx = 0$

$\sum Fy = 0$



$Node\ \ A) \qquad \sum Fy = 0$

$+1200 - \frac{3}{5} F_{AC} = 0$

$F_{AC} = +\frac{5}{3}(1200) = +2000\ \ lb$

$F_{AC} = 2000\ \ lb \quad T$

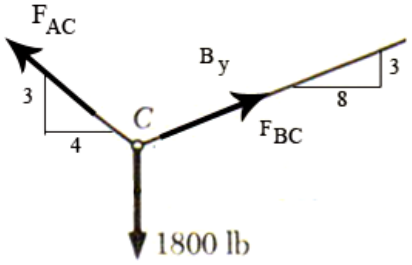
$\sum Fx = 0$

$\frac{4}{5} F_{AC} + F_{AB} = 0$

$F_{AB} = \frac{-4}{5}(2000) = -1600\ lb$

$F_{AB} = \frac{-4}{5}(2000) = -1600\ lb$

$F_{AB} = 1600\ \ lb \quad C$



$Node \quad C \quad \sum Fy = 0$

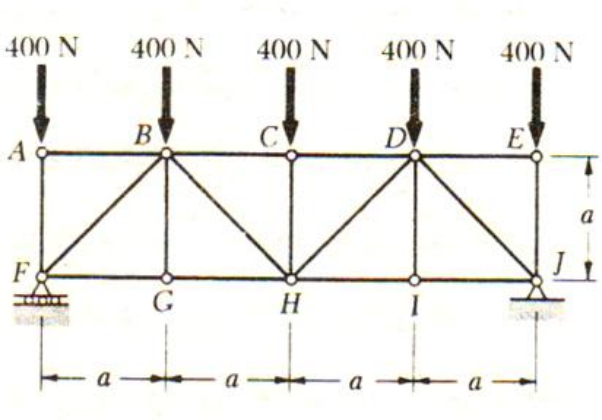
$(F_{BC})\ (\frac{3}{\sqrt{73}}) - 1800 + \frac{3}{5} F_{AC} = 0$

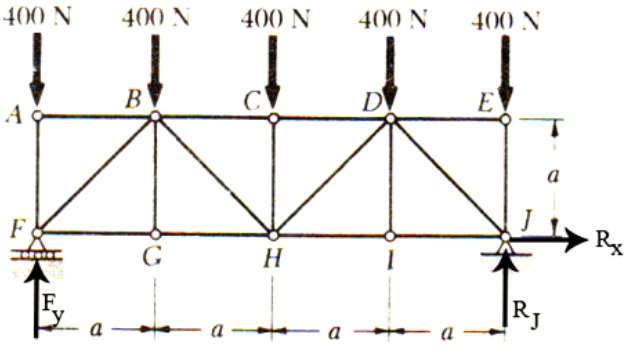
$(F_{BC})\ (\frac{3}{\sqrt{73}}) = 1800 - \frac{3}{5}(2000) = 0$

$(F_{BC})\ (\frac{3}{\sqrt{73}}) = 600$

$F_{BC} = 1709 \quad lb$

6-6 با استفاده از روش مفصل‌ها معین کنید نیرو را در هر عضوی از خرپای (تیر مشبک) مطابق شکل را هم چنین نشان دهید کدام عضو در وضع کشش و کدام در وضع تراکم است.





$$\sum Fx = 0$$

$$Rx = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_F = 0$$

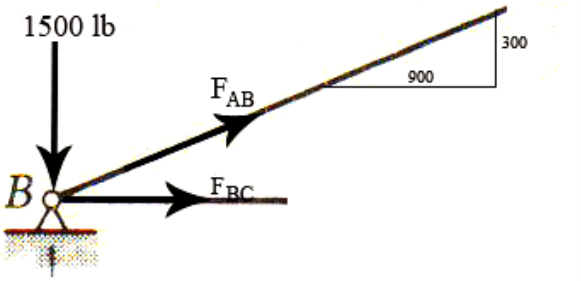
$$Rj\ (4a) - 400\ (4a) - 400\ (3a) - 400\ (2a) - 400\ (a) = 0$$

$$Rj(4a) = 400\ \ (10a)$$

$$Rj = 1000\ \ N$$

$$B_y + R_C - 1200 = 0$$

$$B_y = 1200 - 2700 = -1500\ \ lb$$



$$Node\ \ B)\ \ \sum Fy = 0$$

$$F_{AB}(\frac{0.375}{0.975}) - 1500 = 0$$

$$F_{AB} = 3900\ \ N \qquad T$$

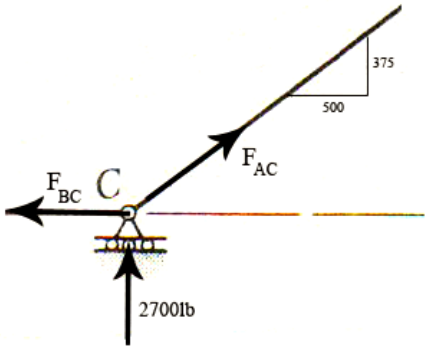
$$\sum Fx = 0$$

$$F_{BC} + F_{AB}\ (a9/0.975) = 0$$

$$F_{BC} = -3900\ (\frac{0.9}{a915})$$

$$F_{BC} = -3600\ \ N$$

$$F_{BC} = 3600\ N \qquad C$$



$$Node\ \ C\ \ )\ \ \sum Fy = 0$$

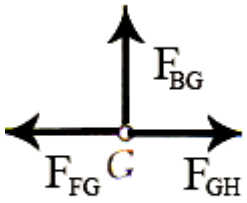
$$2700 + \frac{0.375}{0.625}\ \ FAC = 0$$

$$F_{AC} = -4500\ \ N$$

$$F_{AC} = 4500\ \ N\ \ C$$

$$F_{FG} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ (-848.5) = 6000\ \ N$$

$$F_{FG} = 600\ \ N\ \ T$$



Node G)

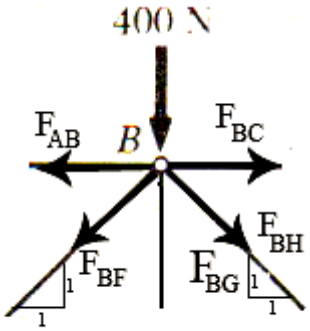
$$F_{BG} = 0$$

$$\sum Fy = 0$$

$$\sum Fx = 0$$

$$F_{FG} = F_{GH} = 600$$

$$F_{GH} = 600\ \ N\ \ T$$



Node B)

$$\sum Fy = 0$$

$$-400 - F_{BG} - F_{BH}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F_{BF}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$FBH\ \frac{1}{\sqrt{2}} = -400 + \frac{844}{\sqrt{2}} = 200$$

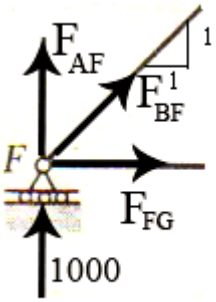
$$F_{BH} = 283\ \ N$$

$$F_{BH} = 283\ \ N\ \ T$$

$$\sum Fy = 0$$

$$Fy - 5\ (400) + 1000 = 0$$

$$Fy = 1000N$$



Node F)

$$\sum Fx = 0 \quad \sum Fy = 0$$

$$\begin{cases} F_{AF} + 1000 + F_{BF}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\ F_{FG} + F_{BF}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \end{cases}$$

Node A

$$F_{AB} = 0$$

$$\sum Fy = 0$$

$$-F_{AF} - 400 = 0 \qquad F_{AF} = -400\ \ N$$

$$-400 + 1000 = -F_{BF}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$F_{BF} = -848.5\ \ N$$

$$F_{BF} = 849\ \ N\ \ C$$

$$F_{FG} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ (F_{BF})$$

Node H)

$$\sum Fy = 0$$

$$F_{CH} + F_{HD}\ (1/\sqrt{2}) + F_{BH}\ (1/\sqrt{2}) = 0$$

$$-400 + F_{HD}\ (1/\sqrt{2}) + 238/\sqrt{2} = 0$$

$$F_{HD}/\sqrt{2} = 400 - 200 = 200\ N$$

$$F_{HD} = 238\ N\ T$$

$$\sum Fx = 0$$

$$-F_{GH} - F_{BH}/\sqrt{2} + F_{HI} + F_{HD}\ (1/\sqrt{2}) = 0$$

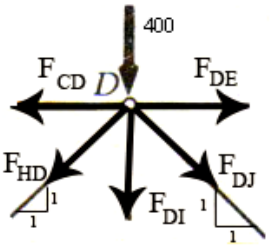
$$-600 - 238/\sqrt{2} + F_{HI} + 238/\sqrt{2} = 0$$

$$-600 - 200 + F_{HI} + 200 = 0$$

$$F_{HI} = +600\ N$$

$$F_{HI} = 600\ N\ T$$

Node D)



$$\sum Fy = 0$$

$$-F_{CD} - F_{HD}/\sqrt{2} + F_{DE} + F_{DJ} + F_{DJ}/\sqrt{2} = 0$$

$$+800 - 238/\sqrt{2} + 0 + F_{DJ}/\sqrt{2} = 0$$

$$F_{DJ}/\sqrt{2} = -600$$

$$F_{DJ} = -849\ N$$

$$F_{DJ} = 849\ ^{N}\ C$$

$$-F_{AB} + F_{BC} + F_{BH}\ (\frac{1}{\sqrt{2}}) - FBF\ (1/\sqrt{2}) = 0$$

$$F_{BC} = F^{BF}\ (1/\sqrt{2}) - F_{BH}/\sqrt{2} = 0$$

$$\sum Fx = 0$$

$$-F_{BC} + F_{CD} = 0$$

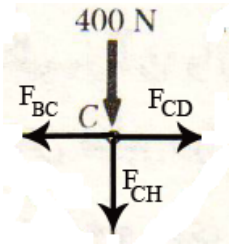
$$F_{CD} = F_{BC} = -800\ N$$

$$F_{CD} = 800\ N\ C$$

$$\sum Fy = 0$$

$$F_{BC} = -899/\sqrt{2} - \frac{283}{\sqrt{2}} = -600 - 200 = -800$$

$$F_{BC} = 800\ N\ C$$



Node C)

$$\sum Fx = 0$$

$$-F_{BC} + F_{CD} = 0$$

$$F_{CD} = F_{BC} = -800\ N$$

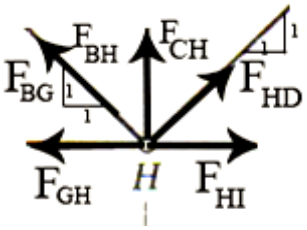
$$F_{CD} = 800\ N\ C$$

$$\sum Fy = 0$$

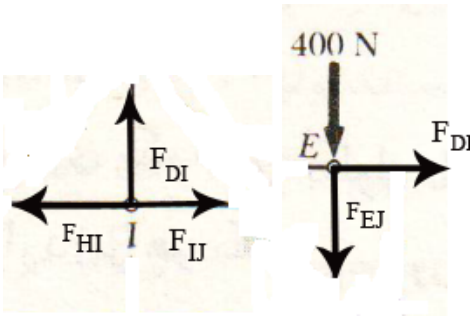
$$-400 - F_{CH} = 0$$

$$F_{CH} = 400\ ^{N}\ C$$

$$F_{CH} = 400\ ^{N}\ C$$



Node I&E)



$F_{DI} = 0$

$F_{HI} = F_{IJ}$

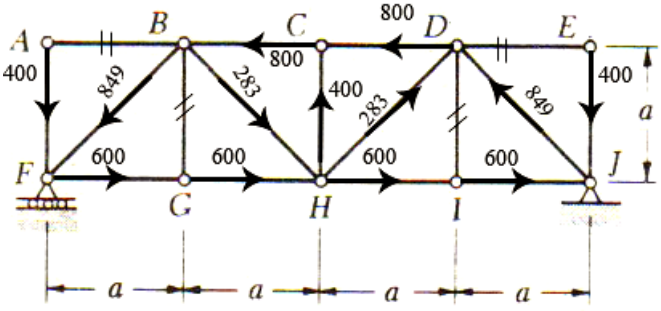
$F_{IJ} = 600 \quad N \quad T$

$-400 - F_{EJ} = 0$

$F_{EJ} = -400 \quad N$

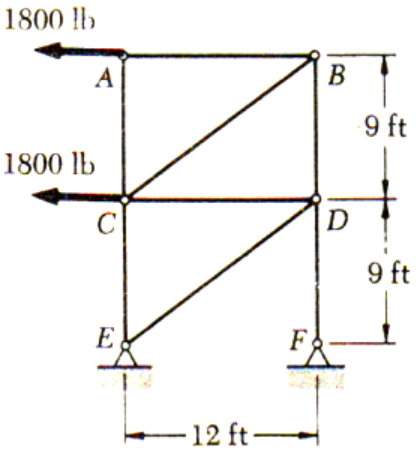
$F_{EJ} = 400 \quad N \; C$

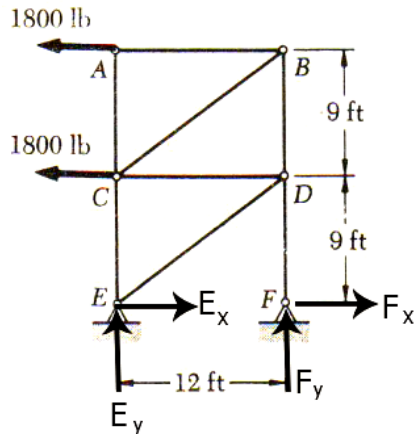
چارت نیروها



نیرو های خنثی ||

6-8 با استفاده از روش مفصل‌ها معین کنید نیرو را در هر عضوی از خرپای (تیر مشبک) مطابق شکل را هم چنین نشان دهید کدام عضو در وضع کشش و کدام در وضع تراکم است.





$+\circlearrowleft \sum M_E = 0$

$(Fy)\ (12) + 1800\ \ (8) + 800\ \ (9) = 0$

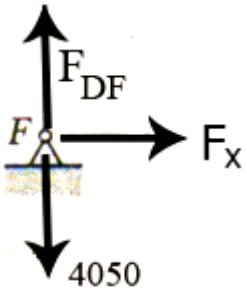
$12\ \ Ey = -1800\ \ (27)$

$Fy = -4050 \quad lb$

$Ey + Fy = 0$

$Ey = 4050 \quad lb \uparrow$

Node F)



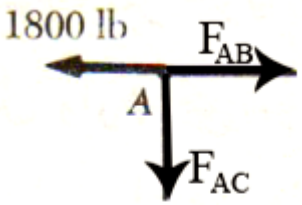
$Ex + Fx = 3600$

$Fx = 0$

$Ex = 3600 \ \ lb$

$F_{DF} = 4050 lb \ T$

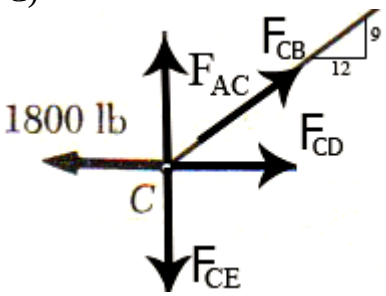
Node A)



$F_{AC} = 0$

$F_{AB} = 1800 \ lb \uparrow$

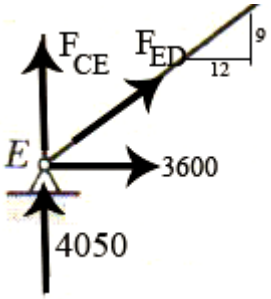
Node C)



$F_{CE} = -1350 \ \ lb \ F_{AC} + F_{CB} \ (9/15) - F_{CE} = 0$

$-1800 + F_{CD} + {}^{12}\!/_{15} (F_{CB}) = 0$

Node E)



$3600 + F_{ED} \ ({}^{12}\!/_{15}) = 0$

$F_{ED} = -3600 \times {}^{15}\!/_{12}$

$F_{ED} = -4500 \ lb$

$F_{ED} = 4500 \ lb \ C$

$4050 + F_{CE} + {}^{9}\!/_{15} (F_{CE}) = 0$

$F_{CE} = -4050 + 2700$

$4050 + F_{CE} + {}^{9}\!/_{15} (-4500) = 0$

$F_{CE} = -1350 \ \ lb$

$F_{CE} = 1350 \ \ lb \ \ C$

From Node C

$F_{AC} + F_{CB} \ ({}^{9}\!/_{15}) - F_{CE} = 0$

$F_{CB} = \frac{15}{9} \ (-1350) = -2250 \ \ lb$

$F_{CB} = 2250 \ lb \ \ C$

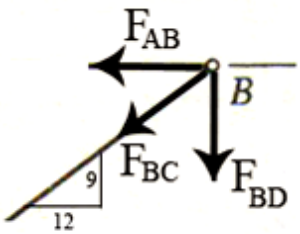
$-1800 + F_{CD} + {}^{12}\!/_{15} \ \ F_{CB} = 0$

$-1800 + F_{CD} + {}^{12}\!/_{15} \ (-2250) = 0$

$-1800 + F_{CD} - 1800 = 0$

$F_{CD} = 3600 \ lb \ T$

Node B)



$-F_{BD} - {}^{9}\!/_{15} (F_{CB}) = 0$

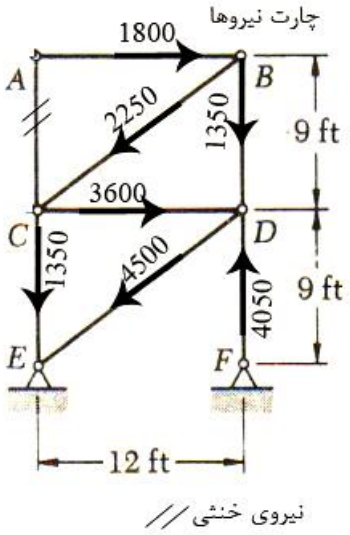
$F_{BD} = -{}^{9}\!/_{15} \ (-2250)$

$F_{BD} = 1350 \ \ lb \ T$

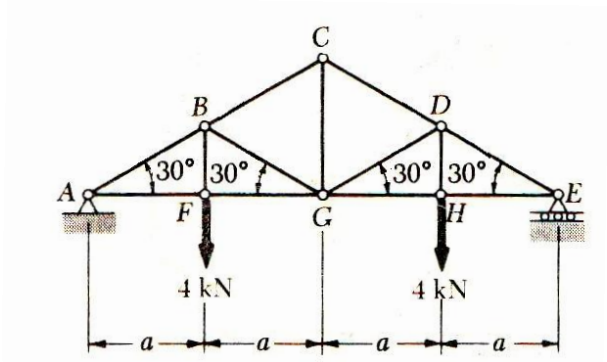
$-F_{CB} \ (12/15) - F_{AB} = 0$ بررسی جواب در گره B

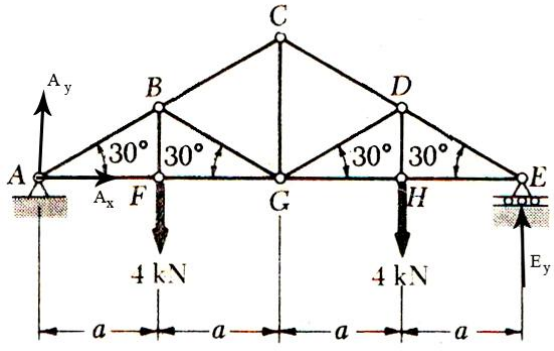
$+2250 \ \ (12/15) - 1800 = 0$

$+1800 - 1800 = 0$



6-10 با استفاده از روش مفصل‌ها معین کنید نیرو را در هر عضوی از خرپای (تیر مشبک) مطابق شکل را هم چنین نشان دهید کدام عضو در وضع کشش و کدام در وضع تراکم است.





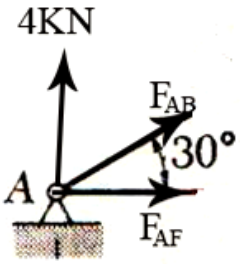
$+\circlearrowleft \sum MA=0$

$4a\ (Ey)-4\ (3a)-4(a)=0$

$Ey=4\ KN \qquad Ax=0$

$Ay-4-4+Ey=0 \qquad Ay=4\ KN$

Node A)



$F_{AF}+F_{AB}\ Cos30=0$

$4+F_{AB}\ Sin30=0$

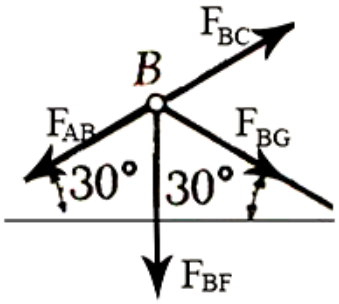
$F_{AB}=-8\ KN$

$F_{AB}=8\ C$

$F_{AF}=-F_{AB}\ Cos30=+8\ Cos30=+6.93\ KN$

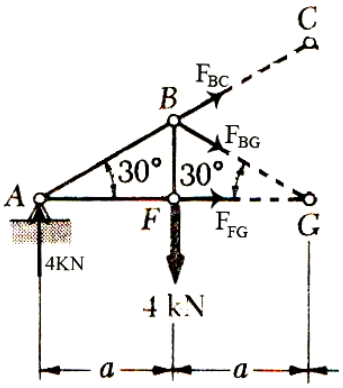
$F_{AF}=6.93\ KN\ T$

Node B)



$$Node\ B\begin{cases}2 & -F_{BF}-F_{BG}Sin30-F_{AB}Sin30+F_{BC}\ Sin30=0\\ 1 & F_{BG}Cos30+F_{BC}Cos30-F_{AB}Cos30=0\end{cases}$$

گره مرکب A



$+\circlearrowleft \sum MA=0$

$(F_{BG})(Sin30)\ a+F_{BG}Cos30\ (h)+4a=0$

$\tan 30=h/a$

ساده کردن $F_{BG}\ Sin30+F_{BG}\ Sin30+4=0$

$2F_{BG}\ Sin30+4=0 \qquad F_{BG}=-4\ KN$

$F_{BG}=4\ KN\quad C$

از فرمول قبل(۱) $F_{BG}+F_{BC}=F_{AB}=-8$

$F_{BC}-4=-8 \qquad F_{BC}=-4\ KN$

$F_{BC}=4\ KN\ C$

از فرمول قبل(2)

$-F_{BF}-F_{BG}\ Sin30-F_{AB}\ Sin30+F_{BC}\ Sin30=0$

$F_{BF}=(-4)\ (½)-(-8)\ (\frac{1}{2})+(-4)\ (½)$

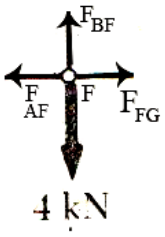
$F_{BF}=4\ KN$

$F_{BF}=4\ KN\ T$

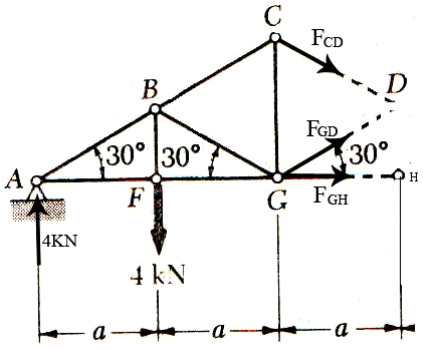
Node F)

$F_{FG}=F_{AF}=6.93\ KN\ T$

$F_{BF}=4\ KN\ T$



گره ترکیبیA,B,C



$\tan 30=\frac{CG}{2a}$

$\sum MA=0\ \circlearrowleft^{+}$

$(F_{CD})\ (Sin30)\ (2a)+F_{CD}\ Cos30\ (2a\tan 30)$

$-(F_{GD}\ Sin30)\ (2a)+4a=0$

$F_{CD}\ Sin30+F_{GD}Sin30=0$

$F_{CD}=F_{GD}$

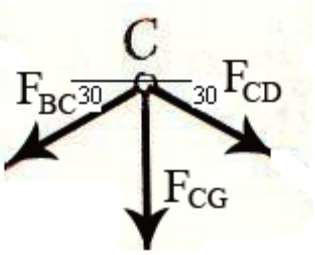
$2F_{CD}\ Sin30+2F_{CD}\ Sin3-2F_{CD}\ Sin30+4=0$

$F_{CD}=-4\ KN$

$F_{CD}=4\ KN\ C$

$F_{GD}=4\ KN\ C$

Node C)



$-F_{CG}-F_{BC}\ Sin30-F_{CD}\ Sin30=0$

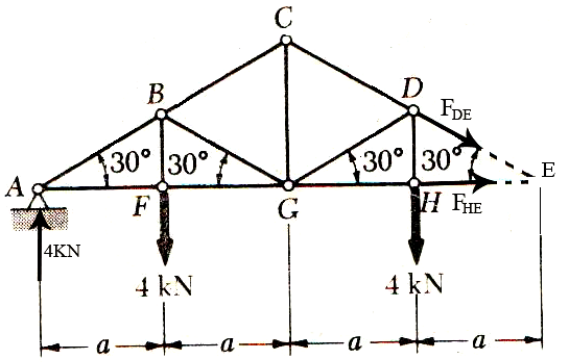
$-F_{CG}-(-4)\ (½)-(-4)\ (½)=0$

$-F_{CG}+2+2=0$

$F_{CG}=4\ KN$

$F_{CG}=4\ NT$

گره ترکیبیA,B,C



$$\sum Fx = 0 \qquad F_{GH} + F_{GD}\ Cos30 + F_{CD}\ Cos30 = 0$$

$$F_{GH} + (-4)\ Cos30 + (-4)\ Cos30 = 0$$

$$F_{GH} = 8\ Cos30 = 6.93\ KNT$$

گره ترکیبیA,G,E

$$\sum MA = 0 \ \curvearrowleft^{+} \quad DH = a\tan 30$$

$$(F_{DE})\ (Sin30)\ (3a) + F_{DE}\ Cos30\ (a\tan 30) + 4\ (3a) + 4(a) = 0$$

$$3Sin30\ F_{DE} + F_{DE}\ Sin30 + 16 = 0$$

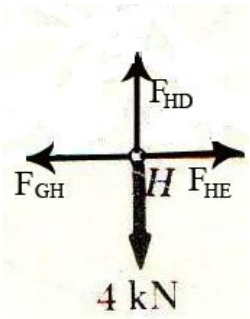
$$F_{DE} = -8\ KN$$

$$F_{DE} = 8\ KN\ C$$

$$\sum Fx = 0 \quad F_{HE} + F_{DE}\ Cos30 = 0$$

$$F_{HE} = 8\ Cos30 = 6.93\ KN$$

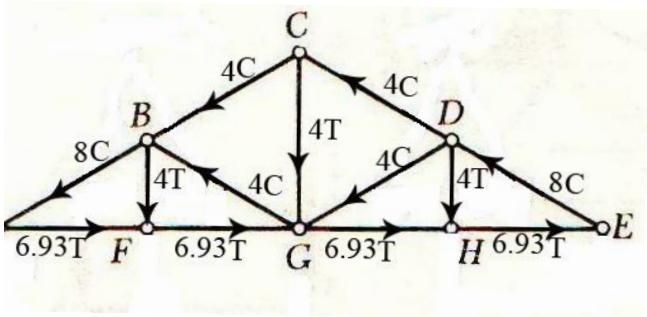
Node H)



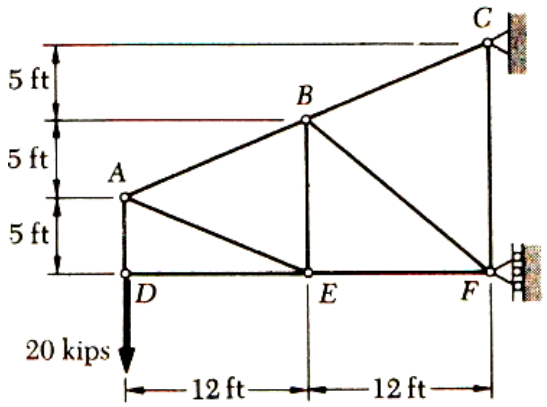
$F_{HD} = 4\ KN\ T$

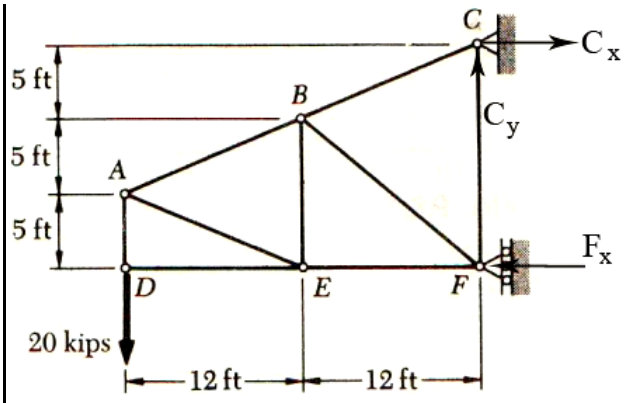
$F_{HE} = F_{GH} = 6.93\ KN\ T$

چارت نیروها



6-12 با استفاده از روش مفصل‌ها معین کنید نیرو را در هر عضوی از خرپای (تیر مشبک) مطابق شکل را هم چنین نشان دهید کدام عضو در وضع کشش و کدام در وضع تراکم است.





$\sum M_D = 0 \curvearrowleft$

$Cy\ (24) - 15\ Cx = 0$

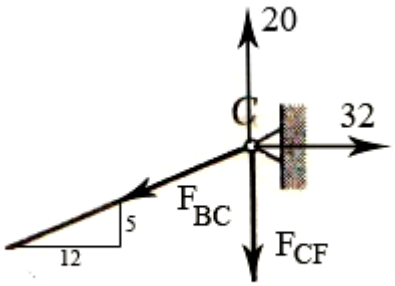
$-20 + Cy = 0$

$Cy = 20 \quad kips$

$Cx - Fx = 0 \qquad 15\ Cx = 20\ (24)$

$Fx = 32 \leftarrow \qquad Cx = +32 \rightarrow$

Node C)



$-\frac{12}{13}\ F_{BC} + 32 = 0$

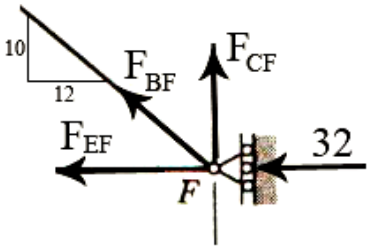
$F_{BC} = 34.7 \ kips \quad T$

$20 - F_{CF} - F_{BC}\ (5/13) = 0$

$20 - F_{CF} - 34.7\ (5/13) = 0$

$F_{CF} = 6.67 \ kips \quad T$

Node F)



$F_{CF} + F_{BF}\ (10/\sqrt{244}) = 0$

$F_{BF} = -6.67 \times \frac{\sqrt{244}}{15} = -15.41 \ kips$

$F_{BF} = 10.41 \ kips \quad C$

$-32 - F_{EF} - F_{BF}\ (12/\sqrt{244}) = 0$

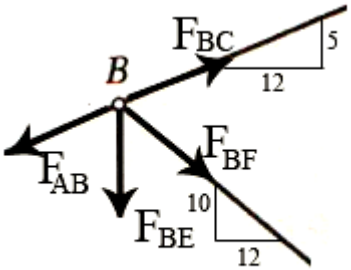
$-32 - F_{EF} + 10.41\ (12/\sqrt{244}) = 0$

$-32 - F_{EF} + 8 = 0$

$F_{EF} = -24 \quad k1ps$

$F_{EF} = 24 \quad KIPS\ C$

Node B)



$-F_{BE} - F_{BF}\ (\frac{10}{\sqrt{244}}) + F_{BC}\ (5/13)$

$-F_{AB}\ (5/13) = 0$

$$-F_{BF}+10.41\ \frac{10}{\sqrt{244}}+34.7\ (5/13)-F_{AB}\ 5/13=0$$

$$F_{BC}\ 12/13+F_{BF}\ (12/\sqrt{244})-F_{AB}\ (12/13)=0$$

$$34.7\ (12/13)-10.4\ \frac{12}{\sqrt{244}}=F_{AB}\ (12/13)$$

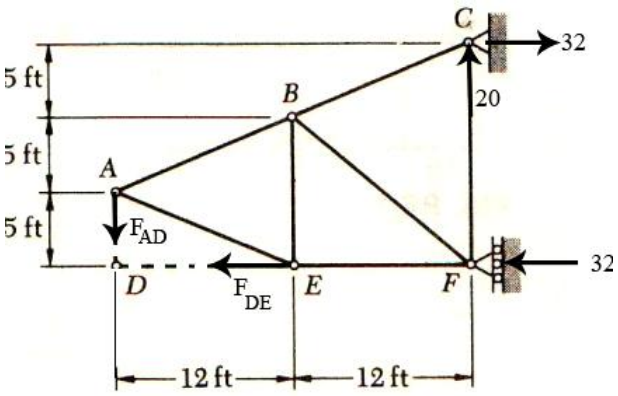
$$32-8=F_{AB}\ (12/13)$$

$$F_{AB}=26\ \ kips\ \ T$$

$$-F_{BE}+20-26\ (5/13)=0$$

$$F_{BE}=10\ \ KIPS\quad T$$

گره ترکیبی A,B,C



$$\curvearrowleft^{+}\ \sum MC=0$$

$$(24)\ (F_{AD})-F_{DE}\ (15)$$

$$-32\ \ (15)=0$$

$$-F_{AD}+20=0$$

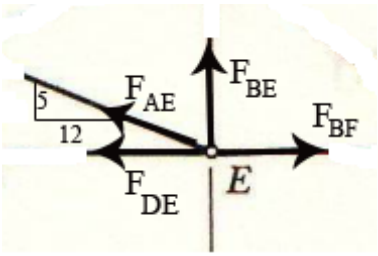
$$F_{AD}=20\ \ kips\quad T$$

$$\sum Fx=0$$

$$32-32+F_{DE}=0$$

$$F_{DE}=0$$

Node E)



ازقبل $F_{DE}=0$

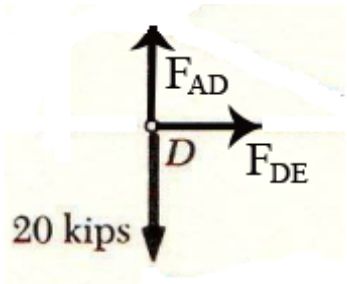
$$-F_{DE-}F_{AE}\ (12/13)+F_{EF}=0$$

$$F_{AE}\ (12/13)=F_{EF}=-24$$

$$F_{AE}=-26\ \ KIPS$$

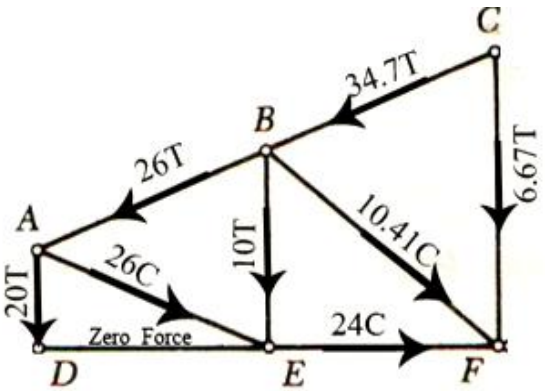
$$F_{AE}=26\ \ KIPS\ C$$

Node D)

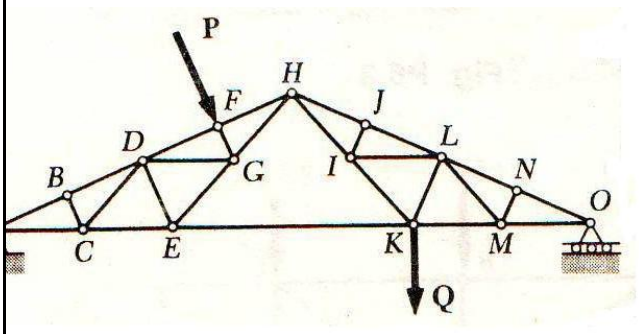


$$F_{AD}=20\ \ kips\ \ T$$

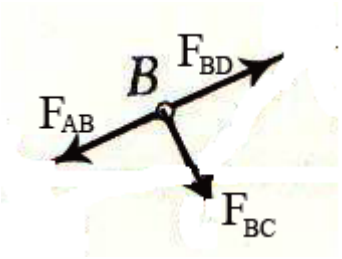
چارت نیروها



6-14 معین کنید عضو صفر- نیرویی را در خرپاهایی مطابق شکل برای بارهای معین داده شده.

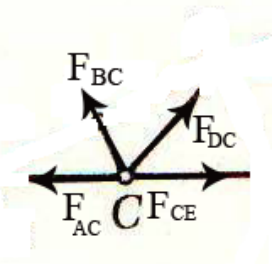


Node B) $\sum Fy = 0 \quad F_{BC} = 0$ چون

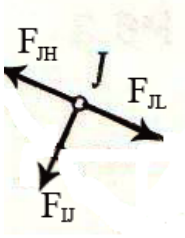


پس در Node C

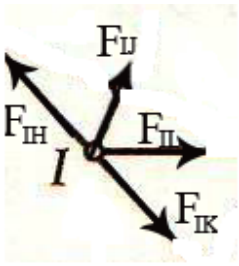
$F_{DC} = 0$



Node J) $F_{IJ} = 0$



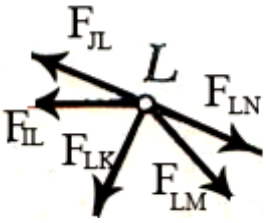
Node I) $F_{IJ} = 0$ چون



Node L)

چون

$F_{IL} = 0$

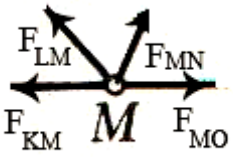


پس $F_{IL} = 0$

چون $F_{KL} = 0$

پس $F_{LM} = 0$

Node M)

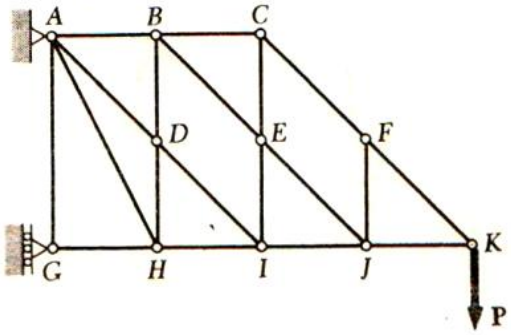


چون $F_{LM} = 0$

پس $F_{MN} = 0$

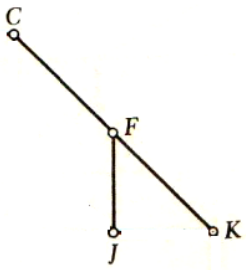
بازوی صفر $MN, LM, KL, IL, IJ, DC, BC$

6-16 معین کنید عضو صفر- نیرویی را در خرپاهـایی مطـابق شکل برای بارهای معین داده شده.



Node F)

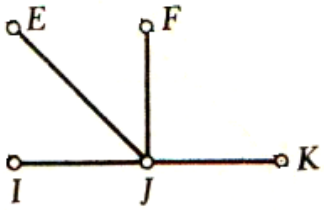
$Fj = 0$



Node J)

چون $Fj = 0$

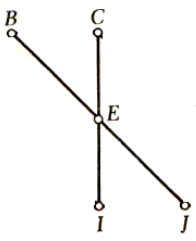
پس $Ej = 0$



Node E)

چون $Ej = 0$

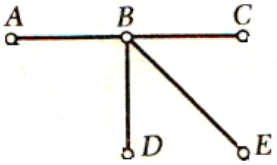
پس $BE = 0$



Node B

چون $BE = 0$

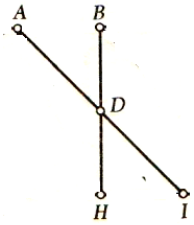
پس $BD = 0$



Node D)

$BD = 0$ چون

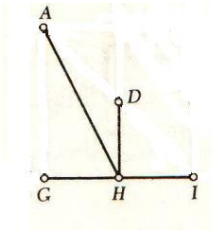
پس $DH = 0$



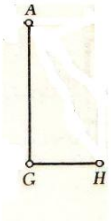
Node H)

چون $DH = 0$

پس $AH = 0$



Node G)

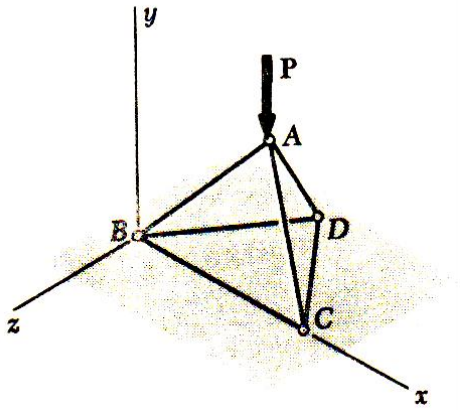


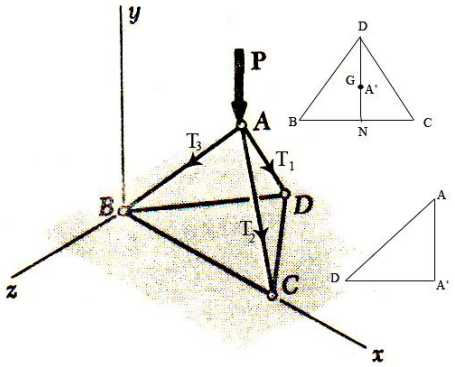
پس $AG = 0$

پس نیروهای خنثی اینها هستند

$$Ej = Fj = BE = BD = DH = AH = AG = 0$$

6-18 شش میله هر کدام بطول L را به صورت هرم در آورده و روی یک سطح بدون اصطکاک قرار می‌دهند. نیروی وارد بر هر یک از اضلاح را به دست آورید وقتی که نیروی P در نقطه A بر آن وارد شود.





$\overline{DN}^2 = L^2 - L^2/4 = 3L^2/4$

$A'N = \frac{1}{3}(\frac{L\sqrt{3}}{2})$ $\qquad DN = L\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

$DA' = \frac{2}{3}(\frac{L\sqrt{3}}{2})$

$AA' = \overline{DA}^2 - \overline{DA}'^2$

$\overline{AA}'^2 = L^2 - (2/3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}L)^2 =$

$L^2 - 4/9\ \ x\,3/4\ \ L^2 = L^2(1-\frac{1}{3}) = L^2(\frac{2}{3})$

$AA' == \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ L$

$B\ (0,0,0) \qquad C\ (L,0,0)$

$D\ (BN\ ,\ 0\ ,\ -DN) \qquad D\ (\frac{L}{2}\ ,\ 0\ ,\ -\frac{L\sqrt{3}}{2})$

$A\ (L/2\ \ ,\ \ AA'\ \ ,\ \ -A'N)$

$A\ (L/2\ \ ,\ \ \frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ \ ,\ \ -\frac{L\sqrt{3}}{6})$

نیرو	مقدار	dx	dy	Dz
AD	T_1	0	$-L\sqrt{2}/\sqrt{3}$	$\frac{-\sqrt{3}L}{3}$
AC	T_2	$L/2$	$-L\sqrt{2}/\sqrt{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{6}L$
AB	T_3	$-L/2$	$-L\sqrt{2}/\sqrt{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{6}L$
P				

D	Fx	Fy	Fz
L	0	$\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ T_1$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}\ T_1$
L	$T_2/2$	$\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ T_2$	$\frac{\sqrt{3}}{6}\ T_2$
L	$T_3/2$	$\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ T_3$	$\frac{\sqrt{3}}{6}\ T_3$
		-P	

$Fx = 0 \qquad T_2 = T_3$

$Fz = 0 \qquad \frac{2\sqrt{3}}{6}\ T_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\ T_1$

$Fy = 0 \qquad \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ (3T) = P$

$T = -P/\sqrt{6}$

$T_{AD} = T_{AC} = T_{AB} = -\frac{P}{\sqrt{6}}$ فشاري

$$\sum F = 0$$

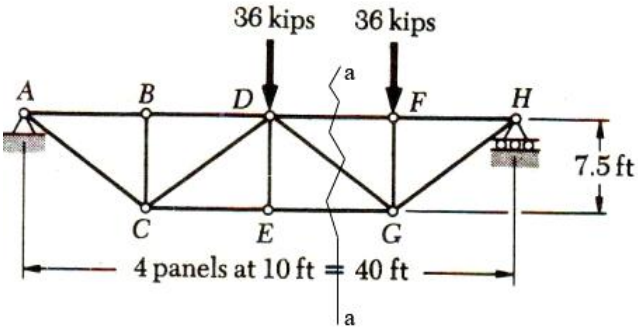
$$T_{BC} = T_{BD} = T_{DC}$$

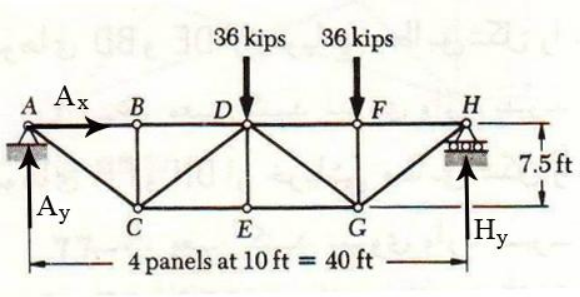
$$3T_{BC} + T = 0$$

$$3T_{BC} - \frac{P}{\sqrt{6}} = 0$$

$$T_{BC} = \frac{P}{3\sqrt{6}} \quad \text{کششي}$$

6-22 معین کنید نیروی وارد بر عضوهای DF و DG از خرپایی مطابق شکل را.





$$\sum Fx = 0 \quad Ax = 0$$

$$\sum MA = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$-Hy\ (40) + 36\ (30) + 36\ (20) = 0$$

$$40\ Hy = 1800$$

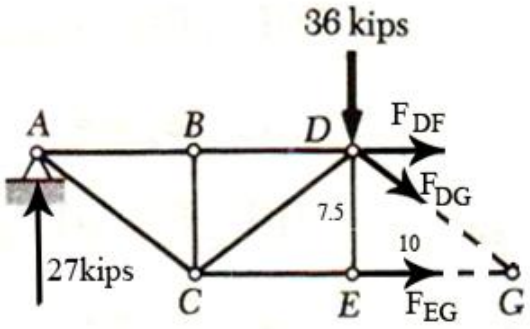
$$Hy = 45\ KIP \quad \uparrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$Ay + Hy - 36 - 36 = 0$$

$$Ay = 27\ kips \uparrow$$

برش a-a



$$\curvearrowleft^{+} \quad \sum MG = 0$$

$$(27)\ (30) - 36\ (10) + F_{DF}\ (7.5) = 0$$

$$810 - 360 + F_{DF}\ (7.5) = 0$$

$$7.5\ F_{DF} = -450$$

$$F_{DF} = -60\ \ KIPS$$

$$F_{DF} = 60\ \ KIPS \quad C$$

$$\sum Fy = 0$$

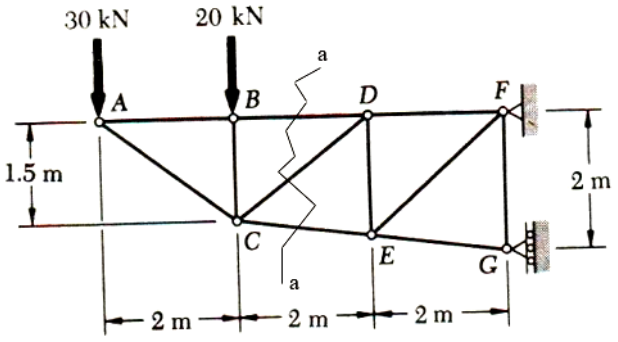
$$27 - 36 - F_{DG}\ (7.5/12.5) = 0$$

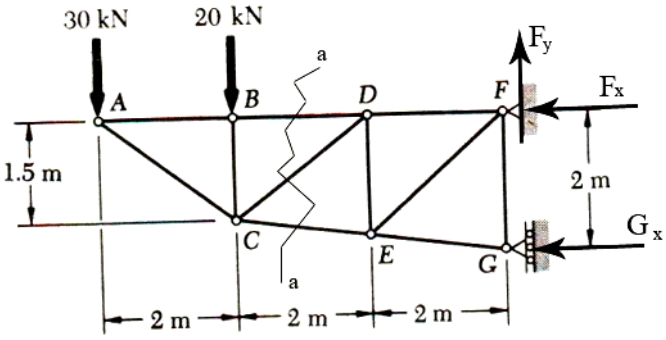
$$F_{DG}\ (\frac{7.5}{12.5}) = -36 + 27 = -9$$

$$F_{DG} = -15\ \ KIPS$$

$$F_{DG} = 15\ \ KIPS\ \ C$$

6-24 معـین کنیـد نیـروی وارد بـر عضـوهای DF و CE از خرپایی مطابق شکل را.





CD و CE

$$\sum M_F = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

$$Gx\ (2) - 30\ (6) - 20\ (4) = 0$$

$$2\ Gx = 260$$

$$Gx = 130\ \ KN \leftarrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$-30 - 20 + Ey = 0$$

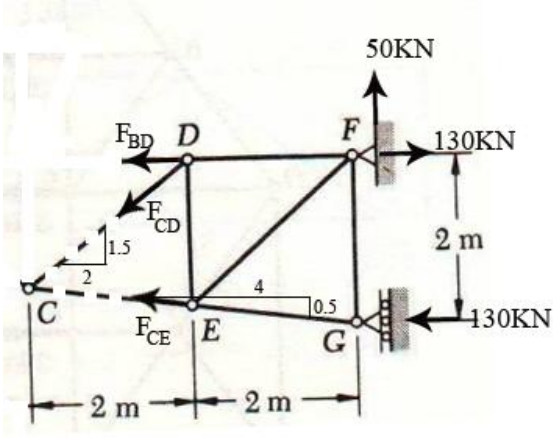
$$Ey = 50\ \ ^{KN} \uparrow$$

$$\sum Fx = 0 \qquad Gx + Ex = 0$$

$$Gx = -Ex$$

$$Ex = 130\ \ KN \rightarrow$$

برش aa



$$\sum M_C = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

$$+130\ \ (0.5) + 130\ \ (1.5) - 50\ \ (4) - F_{BD}(1.5) = 0$$

$$1.5\ \ F_{BD} = 60 \qquad F_{BD} = 40\ \ KN\ \ T$$

$$\sum Fx = 0$$

$$-F_{BD} - 130 + 130 - F_{CD}\ (2/2.5) - F_{CE}\ (4/\sqrt{16.25}) = 0$$

$$-40 = 0.8\ \ F_{CD} + 0.992\ \ F_{CE}$$

$$\sum Fy = 0$$

$$+50 + F_{CD}(\frac{1.5}{2.5}) + F_{CE}\ (\frac{1.5}{\sqrt{16.25}}) = 0$$

$$\begin{cases} 50 = 0.6\ \ F_{CD} - 0.124\ \ F_{CE} \\ -40 = 0.8\ \ F_{CD} + 0.992\ \ F_{CE} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 400 = 4.8\ \ F_{CD} - 0.992\ \ F_{CE} \\ -40 = 0.8\ \ F_{CD} + 0.992\ \ F_{CE} \end{cases}$$

$$5.60\ \ F_{CD} = 360 \qquad F_{CD} = 64.3\ ^{KN}$$

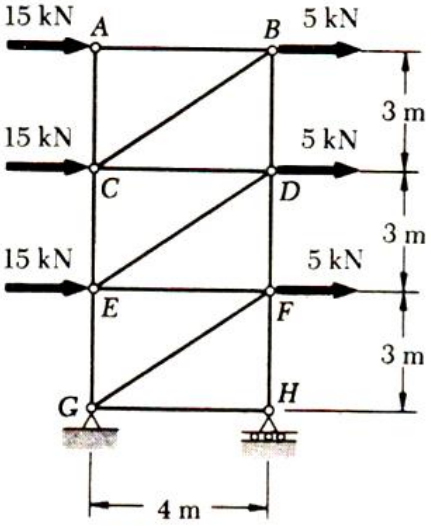
$$50 = 0.6\ \ F_{CD} - 0.124\ \ (F_{CE})$$

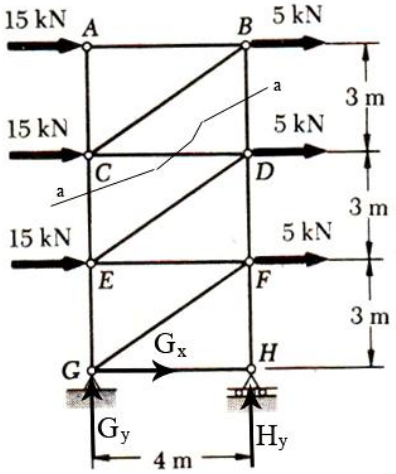
$$0.124\ \ F_{CE} = -50 + 0.6\ (64.3) = -11.42$$

$$F_{CE} = -92.1^{\ KN}$$

$$F_{CE} = 92.1^{\ KN}\ \ C$$

6-27 معین کنید نیروی وارد بر عضـوهای CE ، CD و BD از خرپای مطابق شکل را.





BD و CD و CE

$$\sum M_G = 0$$

$$+20\ \ (3) = 0$$

$$-4(Hy) + 20\ \ (9) + 20\ \ (6)$$

$$4Hy = 180 + 120 + 60 = 360$$

$$Hy = 90\ \ KN \uparrow$$

$$\sum Fy = 0$$

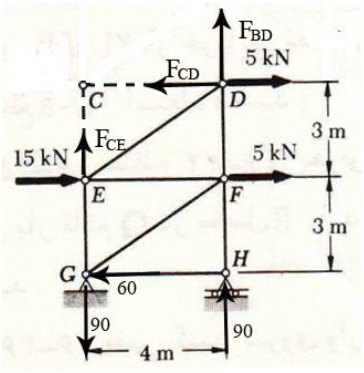
$$Gy = -90$$

$$Gy = 90 \downarrow \qquad Hy + Gy = 0$$

$$\sum Fx = 0 \qquad Gx + 20\ \ (3) = 0$$

$$Gx = -60 \qquad Gx = 60 \leftarrow$$

برش a-a



$$\sum M_D = 0 \ \ \curvearrowleft^{+}$$

$$F_{CE}\ \ (4) - 15\ \ (3) + 60\ \ (6) - 95\ \ (4) - 5\ \ (3) = 0$$

$$4\ \ F_{CE} = 60$$

$$F_{CE} = 15\ \ KN\ \ T \qquad \sum Fx = 0$$

$$-F_{CD} + 5 + 5 - 60 + 15 = 0$$

$$F_{CD} = -35\ \ KN$$

$$F_{CD} = 35\ \ KN\ \ C$$

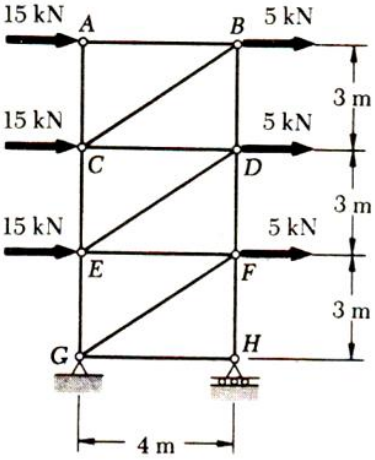
$$\sum Fy = 0$$

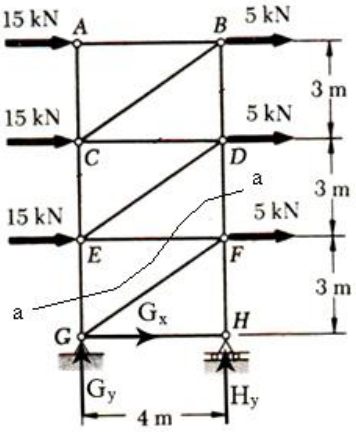
$$F_{BD} + 90 + F_{CE} - 90 = 0$$

$$F_{BD} = -F_{CE} = -15^{\ KN}$$

$$F_{BD} = 15\ \ KN\ \ C$$

6-28 معین کنید نیروی وارد بر عضـوهای EG، EF و DF از خرپای مطابق شکل را.





DF و CE و CD

$\sum M_G = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$

$+20\ (3) = 0$

$-4\ (Hg) + 20\ (9) + 20\ (6)$

$4\ Hg = 18 + 120 + 60 = 360$

$Hg = 90\ ^{KN}\ \uparrow$

$\sum Fy = 0$

$Hg + Gy = 0$

$Gy = -90$

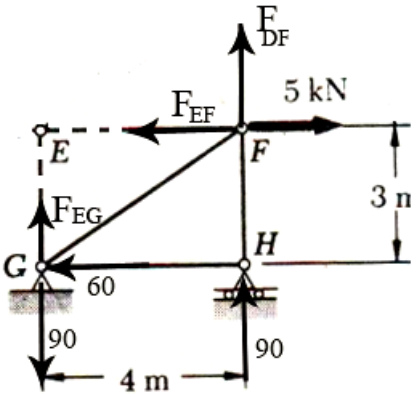
$Gy- = 95\ N\ \downarrow$

$\sum Fx = 0 \quad G_X + (20)(3) = 0$

$Gx = -60\ KN$

$Gx = 60\ KN\ \leftarrow$

برش aa



$\sum M_F$

$(F_{EG})\ (4) - 90\ (4) + 60(3) = 0$

$4\ F_{EG} = 360 - 180 = 180$

$F_{EG} = 45\ ^{KN}\ T$

$\sum Fy = 0$

ادامه برش a-a

$F_{EG} - 90 + F_{DF} = 0$

$F_{DF} = -F_{EG} = -45\ KN$

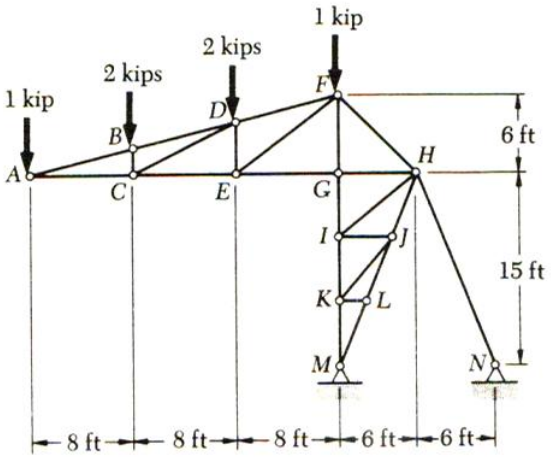
$F_{DF} = 45\ KN\ C$

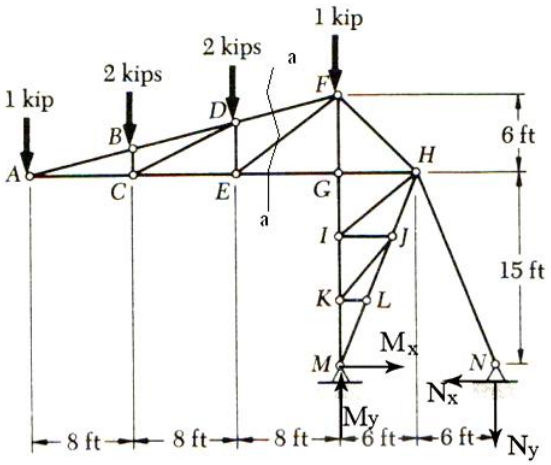
$\sum Fx = 0$

$-F_{EF} + 5 - 60 = 0 \qquad F_{EF} = -55\ ^{KN}$

$F_{EF} = -55\ KN\ C$

6-30 معین کنید نیروی وارد بـر عضـوهای DF، DE و CE از خرپایی مطابق شکل را.





$$\curvearrowleft^{+} \sum M_M = 0$$

$$+ Ny\ (12) - 1(24) - 2(16) - 2(8) = 0$$

$$Ny = 6\ kips \downarrow$$

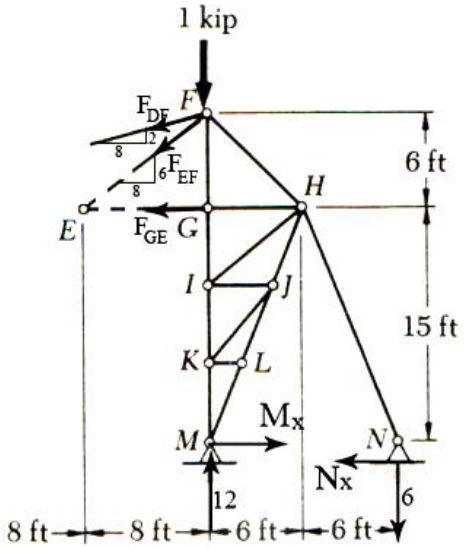
$$\sum Fy = 0$$

$$-1 - 2 - 2 - 1 + My - Ny = 0$$

$$My = 12\ kips \uparrow$$

$$\sum Fx = 0 \qquad Nx = Mx$$

برش aa



$$\curvearrowleft^{+} \sum M_E = 0$$

$$+1(8) - 12(8) - M_X(15) + 6(20) + N_X(15)$$

$$- F_{DF}\left(\frac{8}{\sqrt{68}}\right)(6) + F_{DF}\left(\frac{2}{\sqrt{68}}\right)(8) = 0$$

$$8 - 96 + 120 - 5.82\ F_{DF} + 1.94\ F_{DF} = 0$$

$$+ 3.88\ F_{DF} = 32$$

$$F_{DF} = 8.25\ klps \quad T$$

$$\sum Fy = 0$$

$$+12 - 6 - 1 - F_{DF}\left(\frac{2}{\sqrt{68}}\right) - F_{EF}\left(\frac{6}{10}\right) = 0$$

$$5 - 8.25\ \left(\frac{2}{\sqrt{68}}\right) = F_{EF}\left(\frac{6}{10}\right)$$

$$5 - 2 = \frac{6}{10}\ F_{EF}$$

$$F_{EF} = 5\ klps \quad T$$

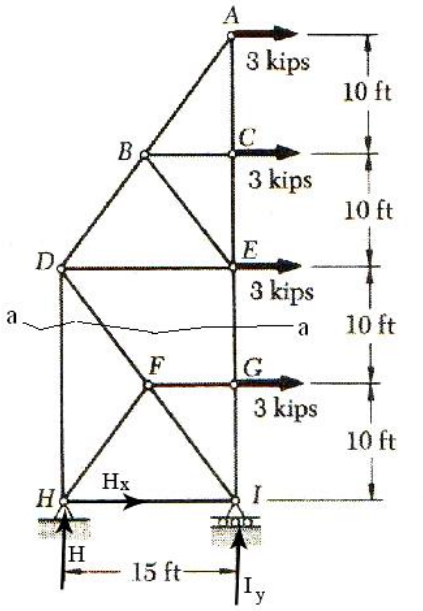
$$\sum Fx = 0$$

$$- F_{GE} - F_{DF}\ \left(\frac{8}{\sqrt{68}}\right) - F_{EF}\left(\frac{8}{10}\right) = 0$$

$$F_{GE} = -8.25\ \left(\frac{8}{\sqrt{68}}\right) - 5\ \left(\frac{8}{10}\right)$$

$$F_{GE} = -8 - 4 = -12\ klps$$

$$\sum Fx = 0$$



$$\sum M_H = 0 \ \curvearrowleft^{+}$$

$$-15\ Iy + 3\ (40) + 3\ (30)\ + 3\ (20) + 3\ (10) = 0$$

$$15\ Iy = 120 + 90 + 60 + 30 = 300$$

$$Hy = -20$$

$$Hy = 20 \quad \downarrow \ kips$$

$$\sum Fy = 0$$

$$Iy + Hy = 0$$

$$Iy = 20\ kips \uparrow$$

$$\sum Fx = 0$$

$$Hx + 12 = 0$$

$$Hx = -12\ \ kips$$

$$Hx = 12\ \ kips \quad \leftarrow$$

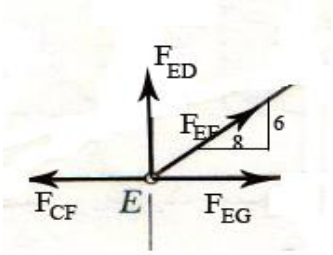
$$-F_{CE} + F_{EG} + F_{EF}\left(\tfrac{8}{10}\right) = 0$$

$$F_{CE} = -12 + 5\ \left(\tfrac{8}{10}\right) = -12 + 4$$

$$F_{CE} = -8\ \ kips$$

$$F_{CE} = 8\ \ kips\ C$$

Node E)



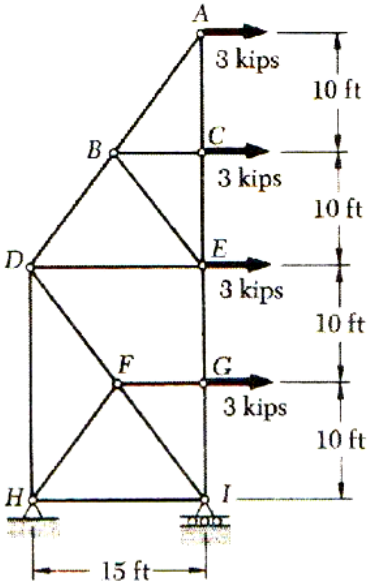
$$\sum Fy = 0$$

$$F_{ED} + \frac{6}{10}(F_{EF}) = 0$$

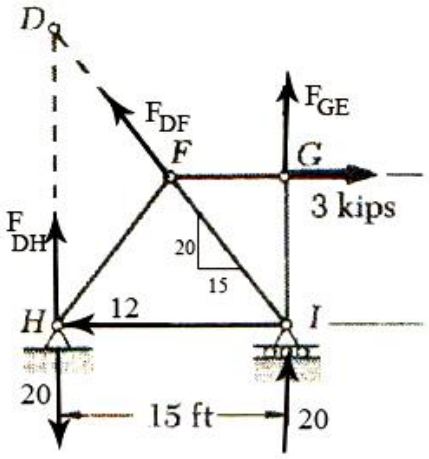
$$F_{ED} = -\frac{6}{10}(5) = -3$$

$$F_{ED} = 3\ kips\ \ C$$

6-32 معـین کنیـد نیـروی وارد بـر عضـوهای FH و DH از خرپایی مطابق شکل را.



برش aa



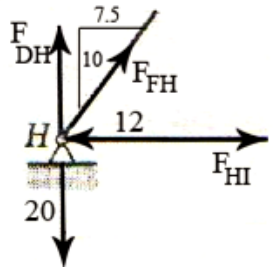
$$\sum M_I = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$(F_{DH})\ (15) - 20\ (15) + 3\ (10) = 0$$

$$15\ F_{DH} = 300 - 30$$

$$F_{DH} = 18\ klps \quad T$$

Node H)



$$\sum Fy = 0$$

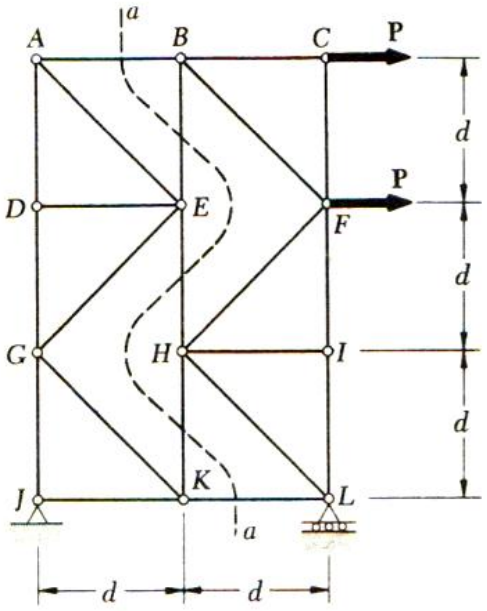
$$F_{DH} + F_{FH}\ (\frac{10}{12.5}) - 20 = 0$$

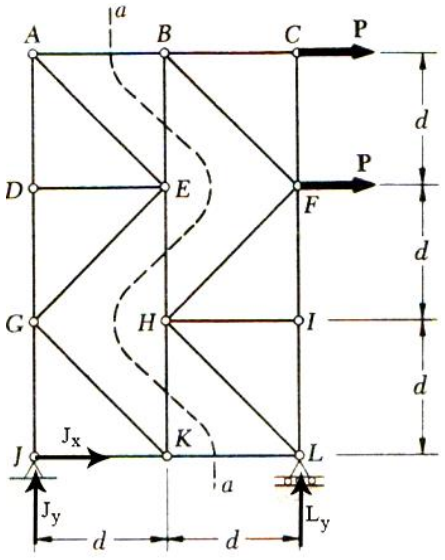
$$18 - 20 + F_{FH}\ (10/12.5) = 0$$

$$F_{FH} = 2.5\ klps$$

$$F_{FH} = 2.5\ klps \quad T$$

6-34 معـین کنیـد نیـروی وارد بـر عضـوهای AB و KL از خرپایی مطابق شکل را (از مقطع a-a استفاده کنید)





AB و KL

$$\sum Mj = 0 \quad \curvearrowleft$$

$$p\ (3d) + p\ (2d) - Ly\ (2d) = 0$$

$$Ly = 2.5\ P$$

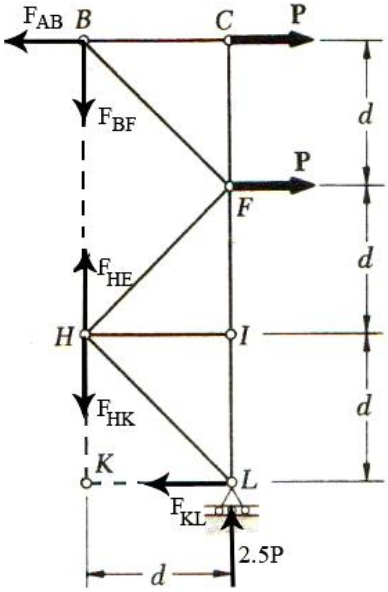
$$\sum Fx = 0$$

$$Jx + 2p = 0 \qquad Jx = -2P$$

$Jx = +2P \leftarrow$

$Jy + Ly = 0 \qquad Jy = -2.5\ P$

برش a-a



$\sum M_H = 0 \ \curvearrowleft +$

$-F_{AB}(2d) + p(2d) + p(d)$

$-2.5p\ (d) + F_{KL}(d) = 0$

$-2F_{AB} + 0.5P + F_{KL} = 0$

$\sum Fx = 0$

$-F_{AB} + 2P + (-2F_{AB} + 0.5P) = 0$

$-3F_{AB} + 2.5P = 0$

$3F_{AB} = \frac{5}{2}\ P$

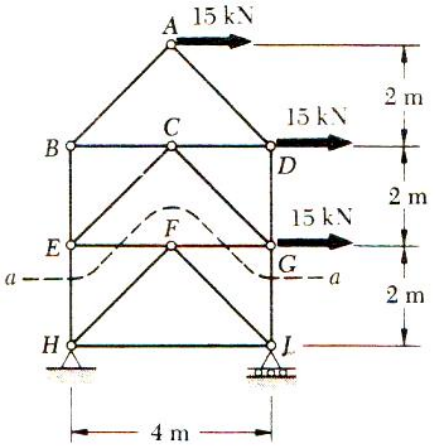
$F_{AB} = \frac{5}{6}\ P \qquad T$

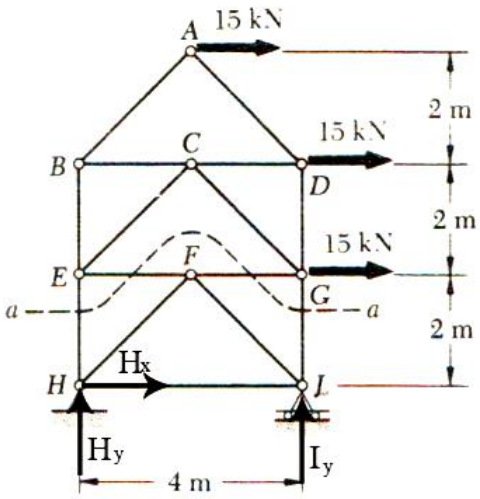
$\sum Fx = 0$

$F_{KL} = -\frac{5}{6}P + 2P = \frac{7}{6}\ P$

$F_{KL} = \frac{7}{6}P \quad T$

6-36 معین کنید نیروی وارد بـر عضـو GI از خرپـایی مطـابق شکل را (با استفاده از مقطع a-a)





$\sum M_H = 0 \ \curvearrowleft^{+}$

$-4\ Iy + 15(6) + 15(4) + 15(2) = 0$

$4\ Iy = 90 + 60 + 30 = 180$

$Iy = 45\ KN$

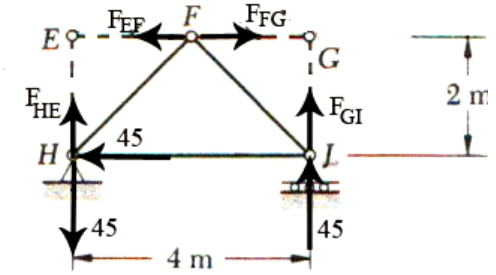
$\sum Fx = 0$

$Hx + 45 = 0 \qquad Hx = -45$

$Hy + Iy = 0$

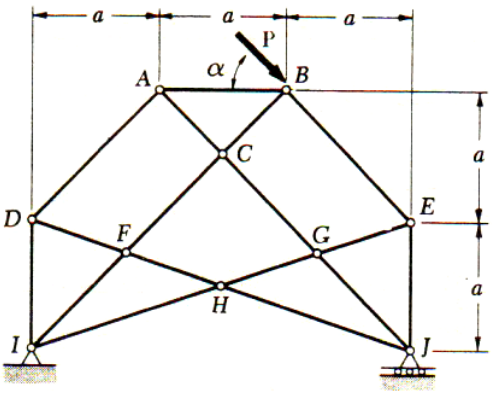
$Hy = -45$

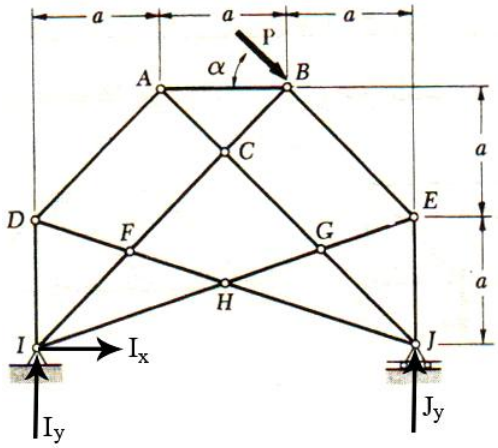
برش a-a

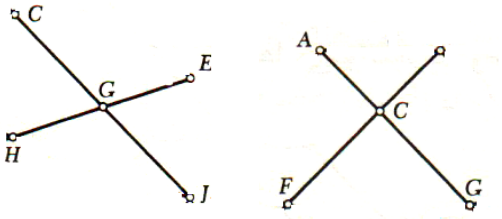


$$\sum M_F = 0 \quad \curvearrowleft^+$$
$$-2F_{GI} + 2F_{HE}$$
$$-45(2) - 45(2) + 45(2) = 0$$
$$2F_{HE} - 2F_{GI} = 90$$
$$\sum Fy = 0$$
$$45 - 45 + F_{HE} + F_{GI} = 0 \qquad F_{HE} = -F_{GI}$$
$$2\ (-F_{GI}) - 2F_{GI} = 95$$
$$-4F_{GI} = 90$$
$$F_{GI} = -22.5\ KN$$
$$F_{GI} = 22.5\ KN \quad C$$

مسئله ۳۷-۶ را با فرض اینکه $\alpha = 90^\circ$ است حل کنید.

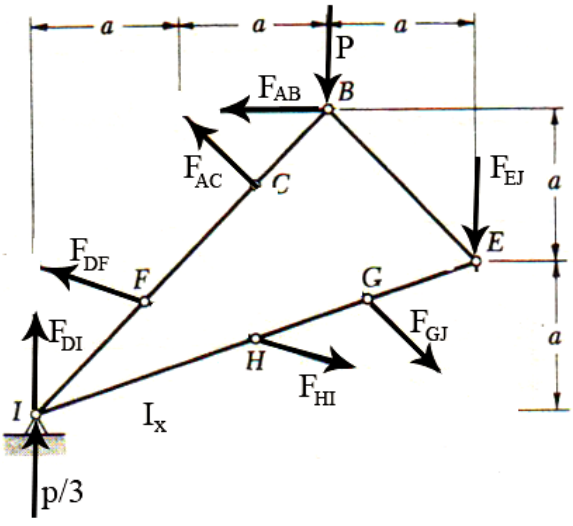






در گره C نتیجه می شود $F_{AC}=F_{AG}$ وهم چنین در گره G نتیجه می شود $F_{CG}=F_{GJ}$ وهمچنین از گره F,H می توان نتیجه گرفت که $F_{DF}=F_{HJ}$

AB و Ej



$$\sum M_I = 0 \quad \curvearrowleft^+$$
$$-Jy\ (3a) + p\ (2a) = 0$$

$J_y = \frac{2}{3} P \uparrow$

$$\sum Fy = 0$$

$$Jy + Iy - p = 0$$

$$\frac{2}{3} P - P + Iy = 0$$

$$Iy = \frac{P}{3}$$

$$-F(AB)(2a) + F_{Ej}(3a) + p(2a) = 0$$

$$\sum Fx = 0$$

$$(F_{AC} - F_{Gj})(Cos\alpha) - (F_{DF} - F_{Hj})\, Cos\beta - FAB = 0$$

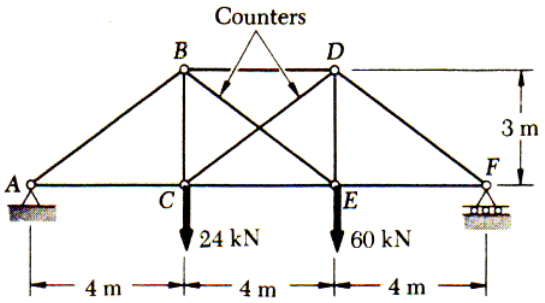
$$FAB = 0$$

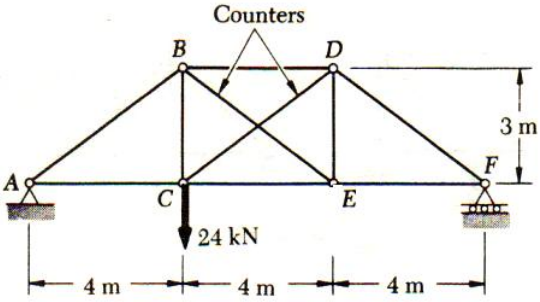
$$F_{Ej} = \frac{2}{3} P \quad C$$

$$F_{Ej} = -\frac{p(2a)}{3a} \qquad F_{Ej} = -\frac{2}{3} P$$

$$F_{Ej} = \frac{2}{3} P \quad C$$

6-40 مسئله ۶-۳۹ را بفرض اینکه بار ۶۰ KN برداشته شود، حل کنید.





$F_{CD}=0$ یا $F_{BE}=0$ باراضافی

$$\curvearrowleft^{+} \sum M_A = 0$$

$$-12\ (Fy) + 24(4) = 0$$

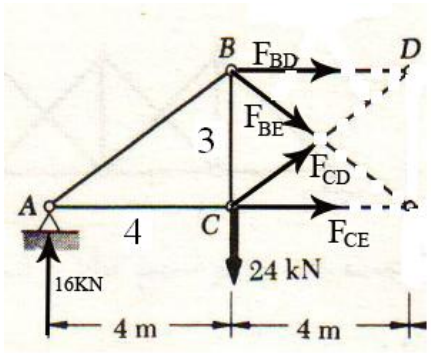
$$Fy = 8\ KN$$

$$Ay + Fy - 24 = 0 \qquad Ay = 16\ KN$$

$$Ax = 0$$

Node A

$$\sum M_I = 0 \ \curvearrowleft^{+}$$



$$\curvearrowleft^{+} \sum M_A = 0 \qquad F_{BE} = 0$$

$$24(4) - F_{CD}(\tfrac{3}{5})\,(4) + 3F_{BD} = 0$$

$$96 - 2.4F_{CD} + 3F_{BD} = 0$$

$$\sum Fy = 0$$

$$16 - 24 + F_{CD}(\tfrac{3}{5}) = 0$$

$$F_{CD} = 13.33\ KN \quad T$$

$$96 - 2.4\ (13.33) + 3F_{BD} = 0$$

$$F_{BD} = -21.3\ KN$$

$$F_{BD} = 21.3\ KN \quad C$$

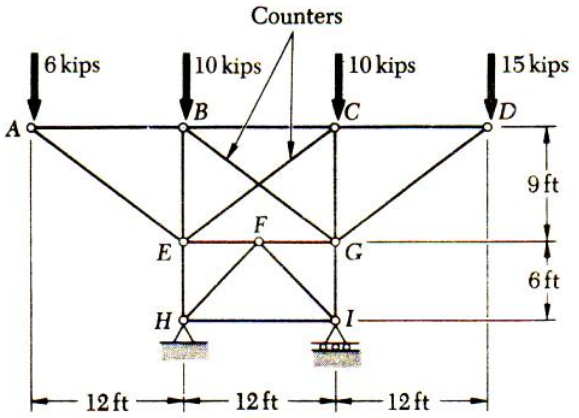
$$\sum Fx = 0$$

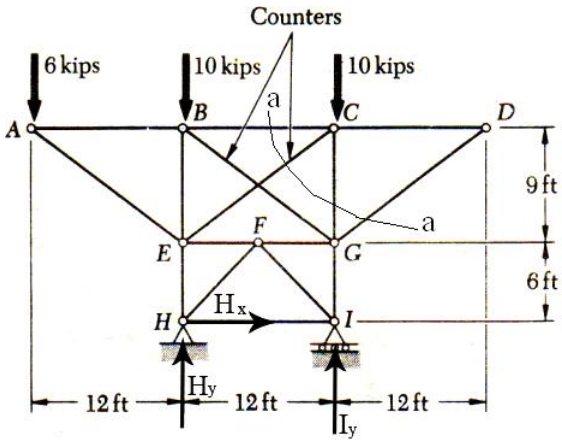
$$F_{CE} + F_{BD} + F_{CD}(\tfrac{4}{5}) = 0$$

$$F_{CE} - 21.3 + 13.33\ (\tfrac{4}{5}) = 0$$

$$F_{CE} = 10.66\ KN \quad T$$

6-42 مسئله ۴۱-۶ را بفرض اینکه بـار ۱۵Kip برداشـته شـود، حل کنید.عضوهای مورب درمرکز صفحه خرپا مطابق شکل نازک بوده و فقط در حالت کشش عمل میکند(جلـوی کشـش زلزلـه را می گیرد)چنین عضوهای را Countersعضو اضافی یا بار اضـافی می نامند.



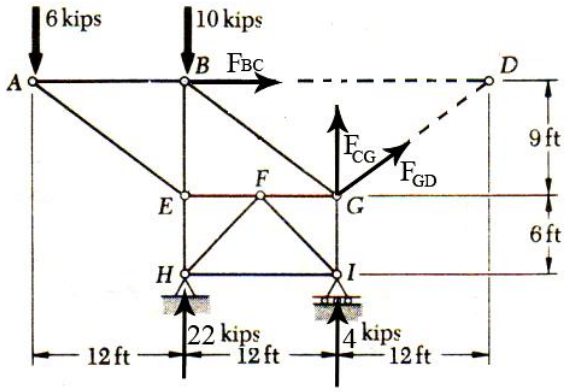


چون BG,EC بار اضافی

هستند،پس $F_{BG}=0, F_{EC}=0$ هستند

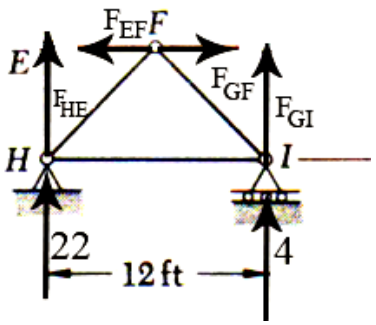
$$\sum M_H = 0$$
$$-12\ (Iy) + 15(12) - 6(12) = 0$$
$$12\ Iy = 120 - 72 = 48$$
$$Iy = 4\ kips$$
$$Iy + Hy - 6 - 10 - 10 = 0$$
$$Hy = 22 \uparrow \quad Hx = 0$$

برش a-a



$$\sum M_D = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$
$$+22\ (24) + 4\ (12) - 6\ (36) - 10\ (24)$$
$$+F_{CG}\ (12) = 0$$
$$-12\ F_{CG} = -216 - 240 + 528 + 48$$
$$-12\ F_{CG} = 120$$
$$F_{CG} = -10\ kips$$
$$F_{CG} = 10\ kips \quad C$$
$$\sum Fy = 0$$
$$-6 - 10 + 22 + 4 + F_{CG} + F_{GD}(Sin\alpha) = 0$$
$$-6 - 10 + 22 + 4 - 10 + F_{GD}\ (K) = 0$$
$$F_{GD} = 0$$
$$+F_{BC} + F_{GD}(K) = 0$$
$$F_{BC} = 0$$

Node H,F,I



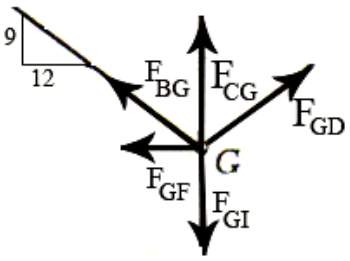
$$\sum Fx = 0 \qquad F_{EF} = F_{GF}$$

$$\curvearrowleft^{+} \quad \sum M_H = 0$$

$$(F_{GI} + 4)(12) + 9(F_{EF} - F_{GF}) = 0$$

$$F_{GI} = -4 \ \ kips$$

Node G)



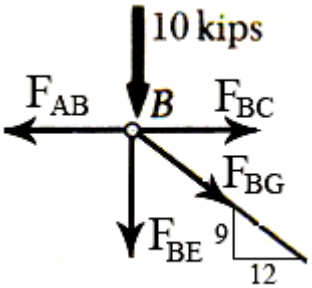
$$\sum Fy = 0$$

$$-F_{GI} + F_{CG} + F_{BG}(9/15) = 0$$

$$+4 - 10 + F_{BG}(9/15) = 0$$

$$F_{BG} = 10 \ \ kips \quad T$$

Node B)



$$\sum Fy = 0$$

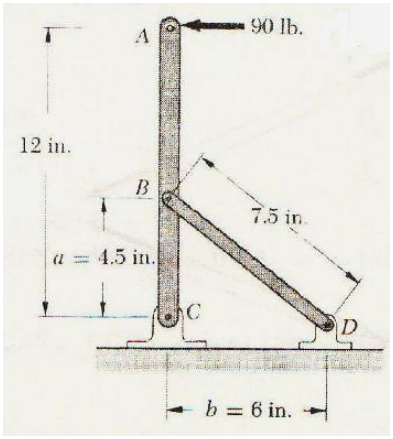
$$-10 - F_{BG} - F_{BG}(9/15) = 0$$

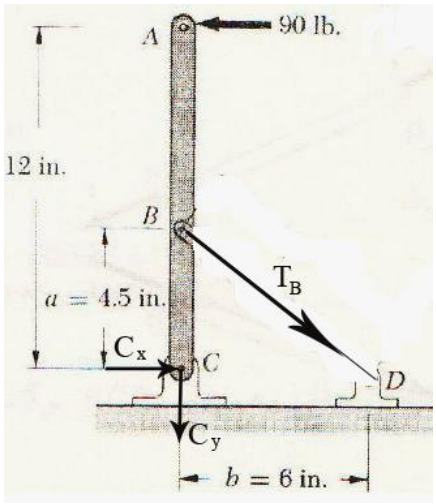
$$-10 - F_{BG} - 6 = 0$$

$$F_{BE} = -16 \ \ kips$$

$$F_{BE} = 16 \ \ kips \ \ C$$

6-48 معین نمایید نیروهای وارد بر عضوBD و مؤلفه‌های عکس‌العمل در نقطه C را.





$$\sum M_C = 0 \ \curvearrowleft^{+}$$

$$-90\ (12) + T_B\ (\frac{6}{7.5})\ (4.5) = 0$$

$$T_B = 300 \quad lb \quad As \quad shown$$

$$\sum Fy = 0$$

$$Cy - T_B\ (4.5/7.5) = 0$$

$$Cy = 300\ (4.5/7.5) = 180 \quad 1b \uparrow$$

$$\sum Fx = 0$$

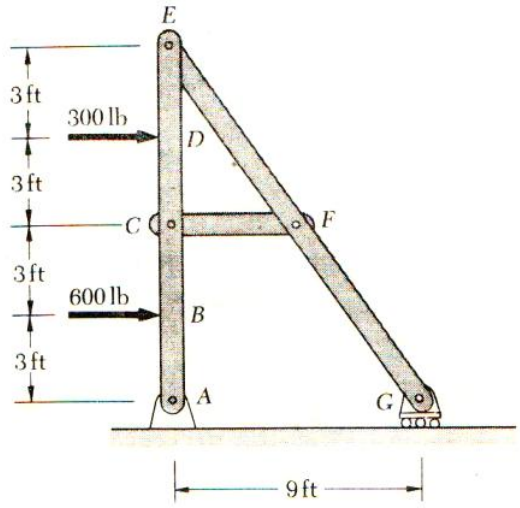
$$Cx - 90 + T_B\left(\tfrac{6}{7.5}\right) = 0$$

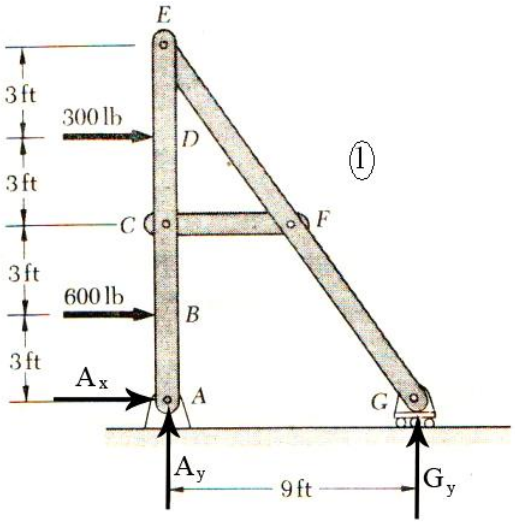
$$Cx = 90 - 240 = -150$$

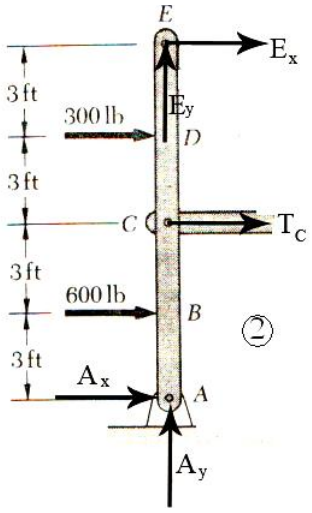
$$Cx = 150\ 1b \quad \leftarrow$$

$$C = -150\ \ i + 180\ \ j$$

6-49 معین کنید مؤلفه نیروی وارد بر عضو AE از قابی مطابق شکل را.







$$F.B.D \Rightarrow 1$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-9(Gy) + 300(9) + 600(3) = 0$$

$$Gy = 500\ 1b \quad \uparrow$$

$$Ay + Gy = 0$$

$$Ay = -500 \quad 1b$$

F.B.D 2

$$Ax + 60 + 300 = 0$$

$$Ax = -900 \quad 1b$$

$$\curvearrowleft^{+} \sum M_E = 0$$

$$-12Ax - 600(9) - Tc(6) - 300(3) = 0$$

$$-12\ (-900) - 5400 - 900 - 6TC = 0$$

$$T_C = 750 \quad lb$$

$$\sum Fx = 0 \qquad A_x + T_C + E_x = 900$$

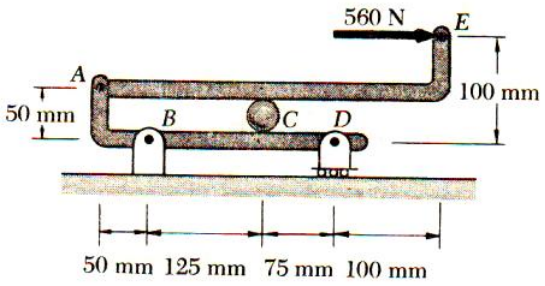
$$-900 + 750 + Ex = 900 = 0$$

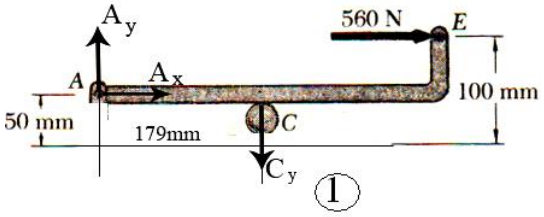
$$Ex = -750 \quad 1b$$

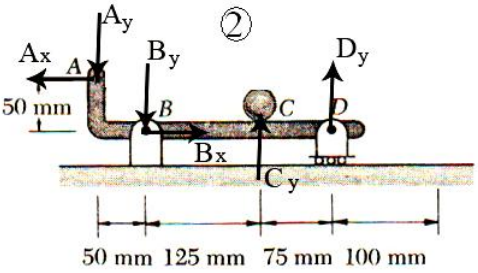
$$Ey + Ay = 0$$

$$Ey = -(-500) = 500\ lb$$

6-50 معین کنید مؤلفه‌های کلیه نیروهای وارد بر عضو ABCD از مجموعه‌ای مطابق شکل را.







ABCD

$$F.B.D \quad 1 \Rightarrow \sum M_A = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$560\ (0.05) + Cy\ (0.175) = 0$$

$$Ay + Cy = 0$$

$$Ax + 560 = 0$$

$$Ax = -560 \quad N \leftarrow$$

$$F.B.D \quad 2 \Rightarrow \sum M_B = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$-Ay(0.05) - Ax(0.05) + Cy(0.125) + Dy(0.2) = 0$$

$$+160(0.05) + 500(0.05) - (-160)(0.125) = 0.2Dy$$

$$8 + 28 + 20 = 0.2Dy$$

$$Dy = 280\ lb \uparrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$-Ay + By - Cy + Dy = 0$$

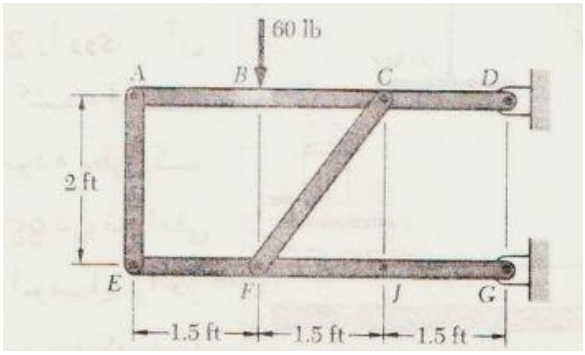
$$+160 + By - 160 + 280 = 0$$

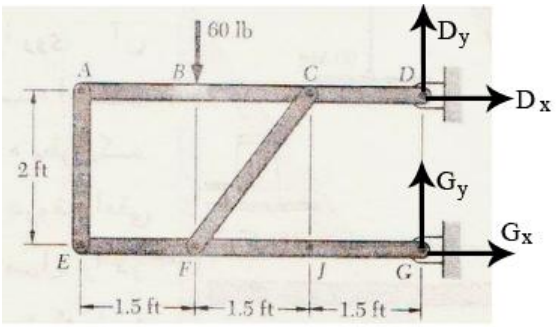
$$By = -280\ lb \downarrow$$

$$-Ax + Bx = 0$$

$$Bx = Ax = -560 \quad N$$

6-56 معین کنید مؤلفه‌های کلیه نیروهایی که بر عضو EFG از قابی مطابق شکل وارد می‌شود.





1

$F.B.D$ 2

$\sum M_D = 0 \curvearrowleft^+$

$T_E\ (4.5) + Tf\ (\frac{6}{2.5}) = 0$

$T_E\ (4.5) = -150\ (\frac{6}{2.5})$

$T_E = -80 \quad lb$

$\sum Fy = 0 \qquad T_E + T_f\ (\frac{2}{2.5}) + 6y = 0$

$-80 + 150\ (\frac{2}{2.5}) + Gy = 0$

$-80 + 120 + Gy = 0$

$Gy = -40\ \ lb$

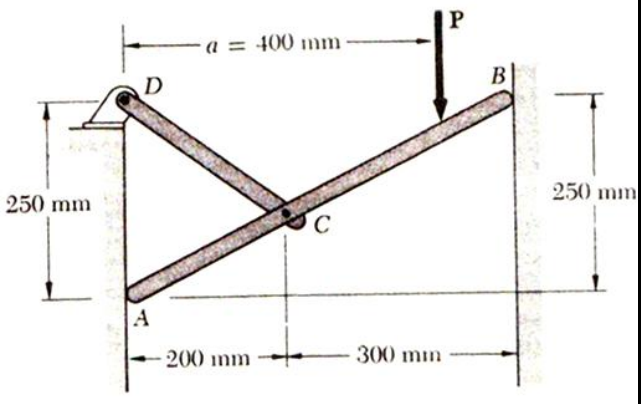
$F.B.D$ 1

$\sum Fy = 0$

$Gy + Dy - 60 = 0$

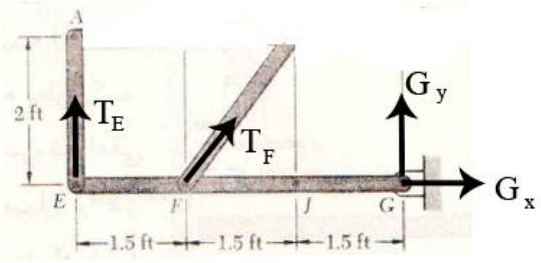
$Gy - 40 - 60 = 0 \qquad Gy = 100\ \uparrow$

6-69 بار قائم P به مقدار ۶۰۰ نیوتن بر عضو AB وارد می‌شود. عضو AB بین دو دیوار بدون اصطکاک و پین در نقطه C و میله CD مطابق شکل قرار گرفته. معین کنید همه نیروهای وارد بر عضو AB را.



$p = 600N \quad AB$

EFG عضو



2

$F.B.D\ 2 \Rightarrow \sum M_G = 0 \curvearrowleft^+$

$T_E(4.5) + T_F(\frac{2}{2.5})\ (3) = 0 \quad Equ.1$

$F.B.D\ 3 \Rightarrow \sum M_D = 0 \curvearrowleft^+$

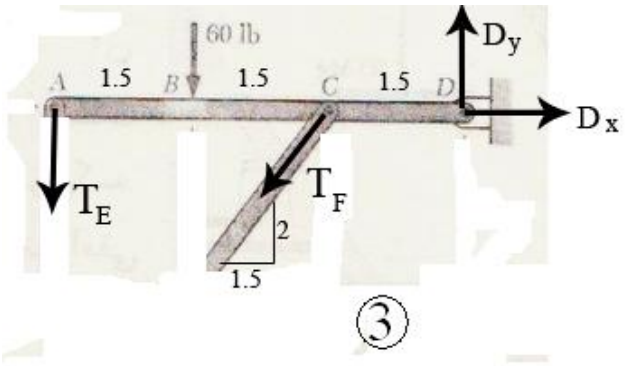
$-T_E(4.5) - 60(3) - T_F(\frac{2}{2.5})\ (1.5) = 0 \quad Equ.2$

$Add \quad Equ.1 \& Equ.2$

$-180 + T_F(\frac{6}{2.5} - \frac{3}{2.5}) = 0$

$T_f = 150\ \ 1b$

$F.B.D \Rightarrow 3$



3

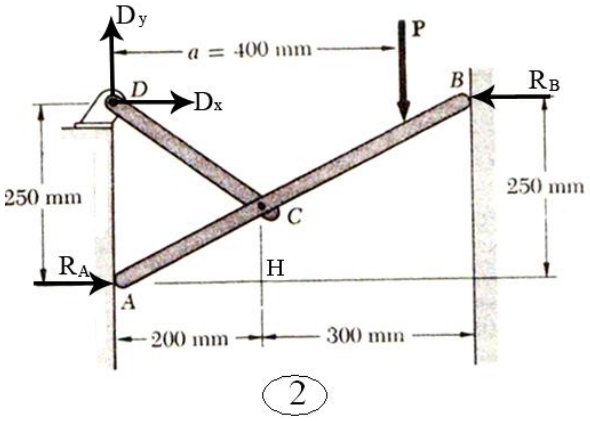
$\sum Fx = 0$

$+ Dx - Tf\ (\frac{1.5}{2.5}) = 0$

$Dx = 150\ (\frac{1.5}{1.5}) = 90\ 1b \rightarrow$

$F.B.D$ 1

$Gx + Dx = 0 \qquad Gx = -90\ 1b \leftarrow$



2

$F.B.D\ 2 \Rightarrow \sum M_D = 0 \ \curvearrowleft +$

$-R_A(0.25) + 600(0.4) = 0$

$R_A = 960\,N$

$R_A = 960 \ \rightarrow$

$\frac{CH}{250} = \frac{200}{500}$

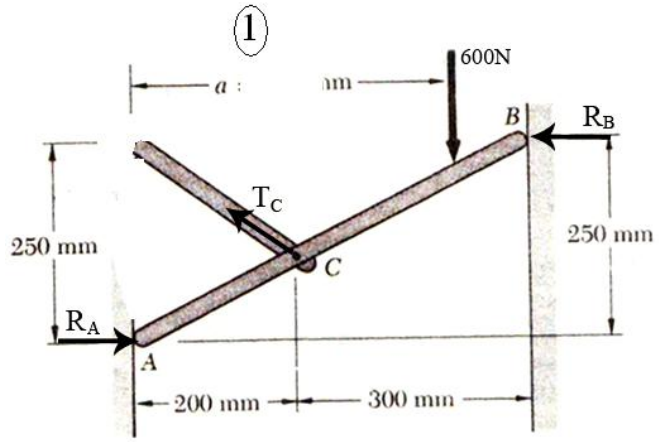
$CH = 100$

$\sum Fy = 0$

$-600 + Tc(\frac{150}{250}) = 0$

$T_C = 1000$

F.B.D (1)



$\sum Fx = 0$

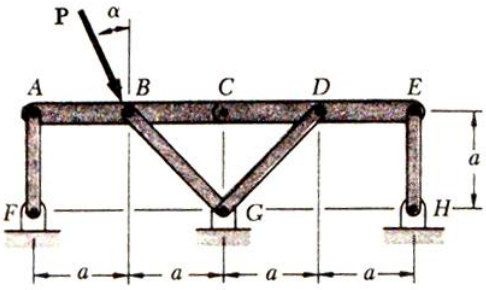
$R_A - T_C\ (\frac{200}{250}) - R_B = 0$

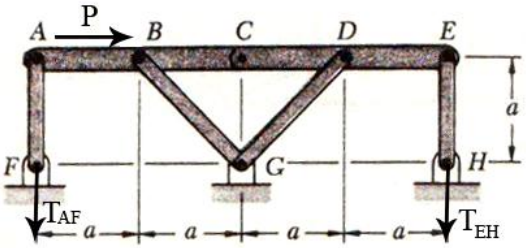
$960 - 1000\ (\frac{200}{250}) - R_B = 0$

$960 - 800 = R_B$

$R_B = 160 \ \ N \ \leftarrow$

6-72 مسئله ۷۱-۶ را به فرض اینکه $\alpha = 90^\circ$ باشد حل کنید.





1

$F.B.D\ 1$

$\sum M_F = 0 \ \curvearrowleft +$

$T_{EH}(4a) + p\ (a) = 0$

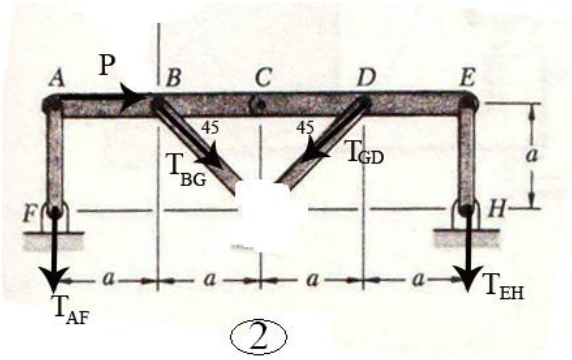
$T_{EH} = -p/4$

$T_{EH} = p/4 \ \ C$

$T_{AF} + T_{EH} = 0$

$T_{AF} = +P/A \ \ T$

F.B.D 2



$$\sum Fx = 0$$

$$0.707\ T_{BG} = P - 0.707\ T_{GD} = 0$$

$$\sum Fy = 0$$

$$-0.707\ T_{BG} - 0.707\ T_{DG} - T_{EH} - T_{AF} = 0$$

$$-0.707\ T_{BG} - 0.707\ T_{DG} + P/4 - P/4 = 0$$

$$T_{BG} = -T_{DG}$$

$$0.707\ T_{BG} + P + 0.707\ T_{TBG} = 0$$

$$2\ (\sqrt{2}/2)\ T_{BG} + P = 0$$

$$T_{BG} = -P/\sqrt{2}$$

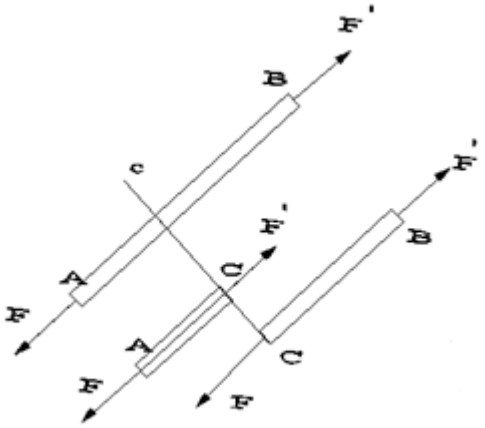
$$T_{BG} = -P/\sqrt{2}\ \ C$$

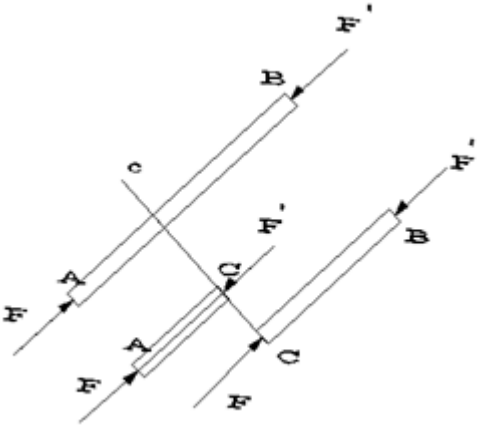
$$T_{DG} = -T_{BG} = +P/\sqrt{2}\quad T$$

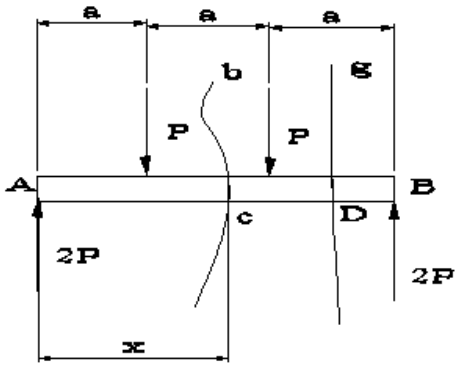
فصل ۷

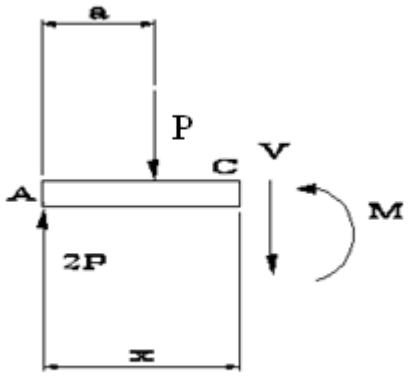
گشتاور خمشی و دیاگرامهای برشی و خمشی

نیروهای داخلی **Internal Forces نیروهای کششی و فشاری**









$2p - P - V = 0 \qquad V = P$

$\sum Fy = 0$

$(V)(x) - M + p(a) = 0$

$\sum M_A = 0$

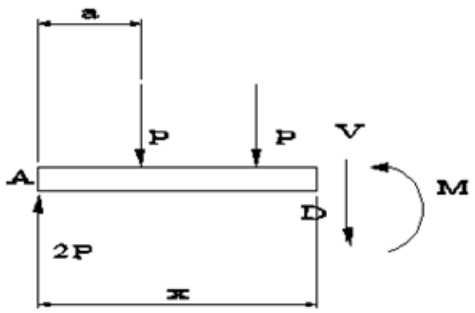
$M = p_x + p_a = p(x+a)$

$\sum M_c = 0 \qquad 2p(x) - p(x-a) - M = 0$

$M = 2px - px + pa = p(x+a)$

V را نیروی برشی (Shearing Force) می گویند

M را گشتاور خمشی (Bending moment) می گویند .



$\sum Fy = 0$

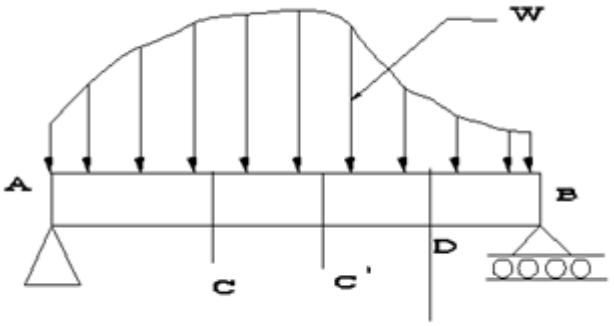
$-V - p - p + 2p = 0$

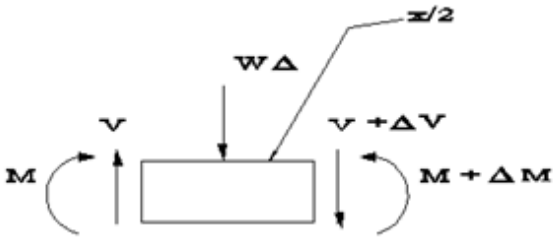
$V = 0$

$\sum MA = 0$

$$-M+V(x)+p(2a)+p(a)=0$$
$$M=3pa$$

روابط بین بار ، برش و گشتاور خمشی





$$\sum Fy=0$$
$$V-(V+\Delta V)-W\Delta x=0$$
$$-\Delta V-W\Delta x=0 \qquad \Delta V=-W\Delta x$$
$$\frac{\Delta V}{\Delta x}=-W \qquad dv/dx=-w$$
$$V=-W \quad dx$$
$$V_D-V_C=-\int_{\chi_c}^{\chi_D} W dx$$

V_D-V_c = (سطح زیر منحنی بارD,C). فقط برای بارهای غیر متمرکز به کار می رود

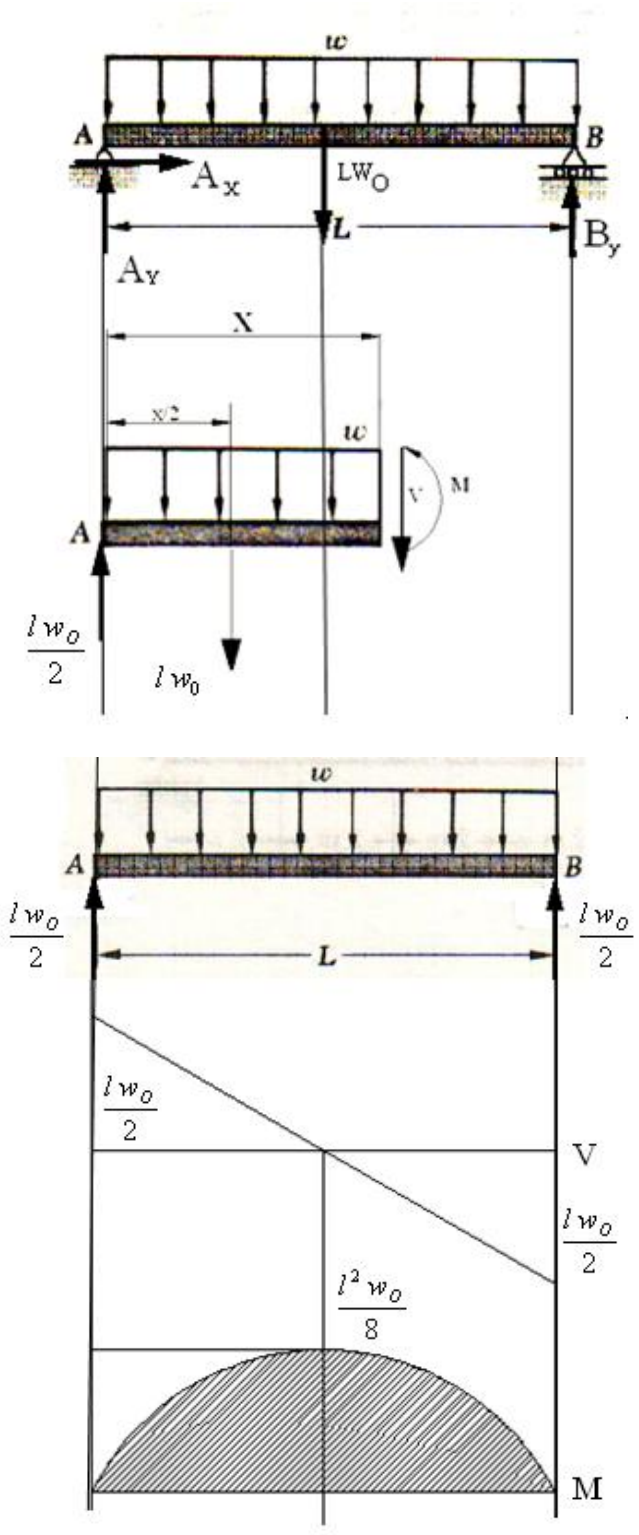
$$M-(M+\Delta M)+(V+\Delta V)(\Delta x)-W\Delta x(\frac{\Delta x}{2})=0$$

$$-\Delta M+V\Delta x+\Delta V_0\Delta x-W\frac{(\Delta x)^2}{2}=0$$

$$\Delta V_0\Delta x\approx 0$$
$$(\frac{\Delta x}{2})^2\approx 0$$
$$dM/dx=V$$
$$M=\int V dx$$
$$M_D-M_c=\int_{X_c}^{X_D} V dx$$

$MD-Mc$ = (سطح زیر منحنی برش بین نقاطD,C)

7-17 دیاگرام آزاد برشی و گشت آور خمشی را برای تیرهایی مطابق شکل رسم کنید.



$$\sum M_A = 0 \ \curvearrowleft^+$$

$$-(By)\ (L) + Lwo\ (L/2) = 0$$

$$By = Lwo/2$$

$$Ay = Lwo/2$$

$$Ax = 0$$

$$-V + Lwo/2 - wox = 0$$

$$V = -wox + L\ wo/l\ w_0 2$$

$$V = \frac{wo}{2}\ (L - 2x)$$

$$\sum M_A = 0 \ \curvearrowleft^+$$

$$-M + V(x) + wox\ (x/2) = 0$$

$$M = -wox^2 + \frac{lwo}{2}x + \frac{w + x^2}{2}$$

$$M = \frac{-wox^2}{2} + \frac{lwox}{2}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ V = \frac{lwo}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} X = L \\ V = -Lwo/2 \end{cases}$$

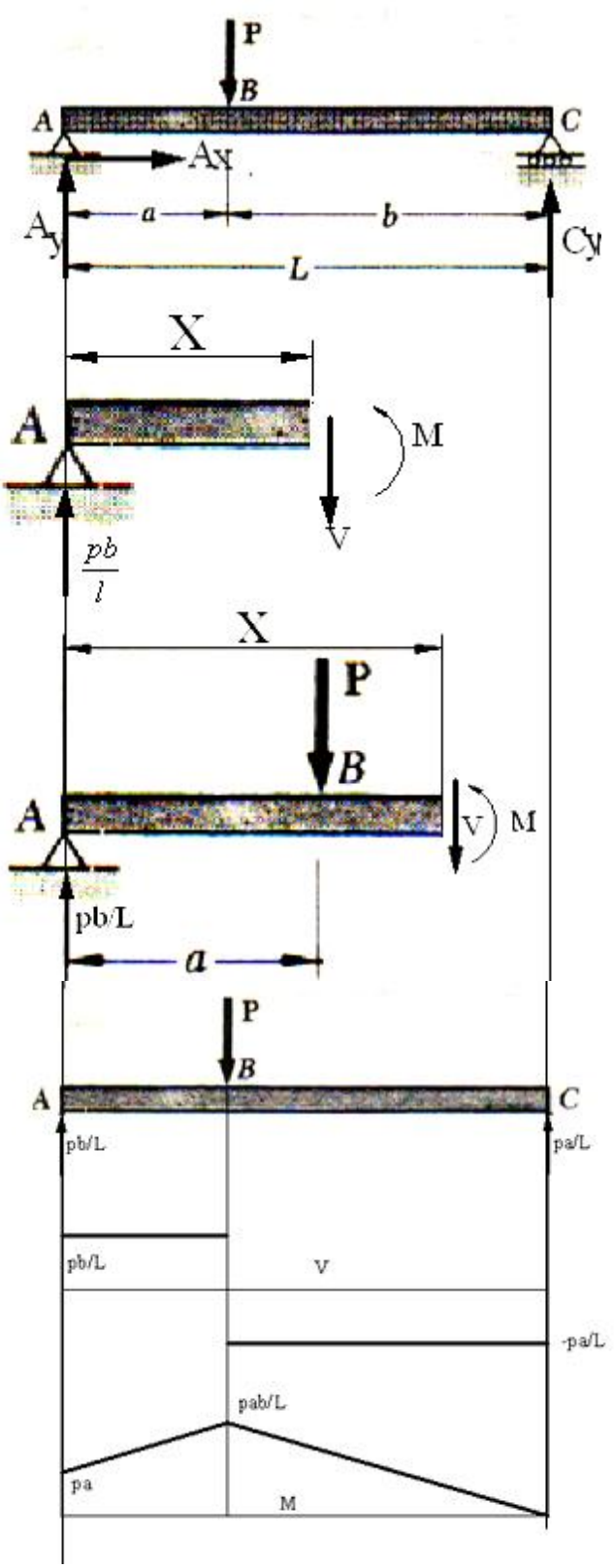
$$\begin{cases} X = 0 \\ M = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = Ll^2\ w_O \\ M = 0\ \ 8 \end{cases}$$

$$\frac{X_1}{X_2} = 1$$

$$M = -\frac{wol^2}{8} + \frac{L^2 wo}{4}$$

$$X_1 = X_2 = L/2 \Rightarrow\ x = L/2$$

7-18 دیاگرام آزاد برشی و گشت آور خمشی را برای تیرهایی مطابق شکل رسم کنید.



$$\sum M_A = 0 \ \curvearrowleft^{+}$$
$$-LCy + pa = 0$$
$$Cy = \frac{a}{L}\ p$$
$$Ay = p - \frac{pa}{L} = \frac{p\ (L-a)}{L}$$
$$Ay = \frac{P}{L}\ b$$
$$Ax = 0$$

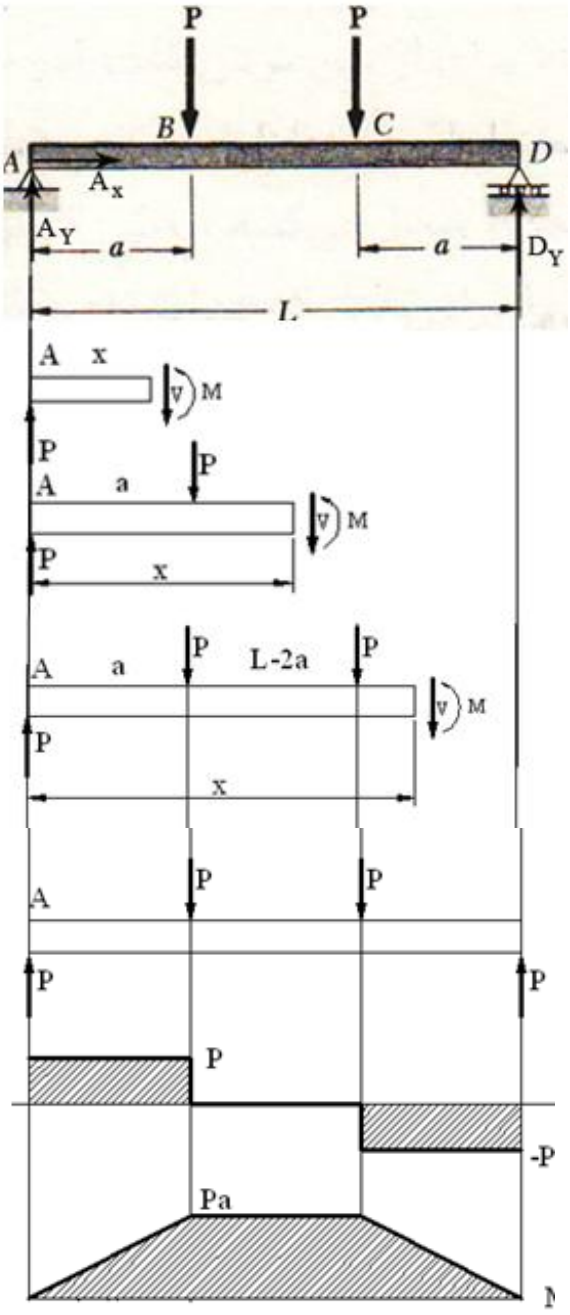
$\underline{0 < x < a}$

$$-V + {pb}/{L} = 0$$
$$V = {pb}/{L}$$
$$-M + V(X) = 0$$
$$M = \frac{pb}{L}\ x$$

$\underline{a < X < L}$

$$-V - p + {pb}/{L} = 0$$
$$V = -p + \frac{pb}{L} = -{pa}/{L}$$
$$\sum M_A = 0$$
$$-M + V(x) + pa = 0$$
$$M = \frac{-pa}{L}x + pa$$
$$\begin{cases} x = a \\ M = \dfrac{pab}{l} \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 0, a \\ V = \dfrac{pb}{l} \end{cases}$$
$$\begin{cases} X = 0 \\ M = pa \end{cases} \begin{cases} X = a \\ M = \dfrac{-pa^2}{l} + pa = \dfrac{pab}{l} \end{cases}$$
$$\begin{cases} X = L \\ M = 0 \end{cases}$$

7-20دیاگرام آزاد برشی و گشت آور خمشی را برای تیرهایی مطابق شکل رسم کنید



$$-Dy\ (L)+p\ (L-a)+P(a)=0$$

$$LDy=pL-pa+pa$$

$$Dy=P$$

$$Ay=P \qquad Ax=0$$

$\underline{0<x<a}$

$$V=P,\ M=-px$$

$$\begin{cases}x=0\\M=0\end{cases} \qquad \begin{cases}y=a\\M=-pa\end{cases}$$

$$-v+p=0$$

$$v=0$$

$\underline{a<x<L-2a}$

$$-M+v(x)+pa=0$$

$$M=pa$$

$$AB<x<CD$$

$$-v-p-o+p=0$$

$$v=-p$$

$\underline{L-a<x<L}$

$$-m+v(x)+p(L-a)+p(a)=0$$

$$M=-px+pl=p(L-x)$$

$$\underline{X=L-a}$$

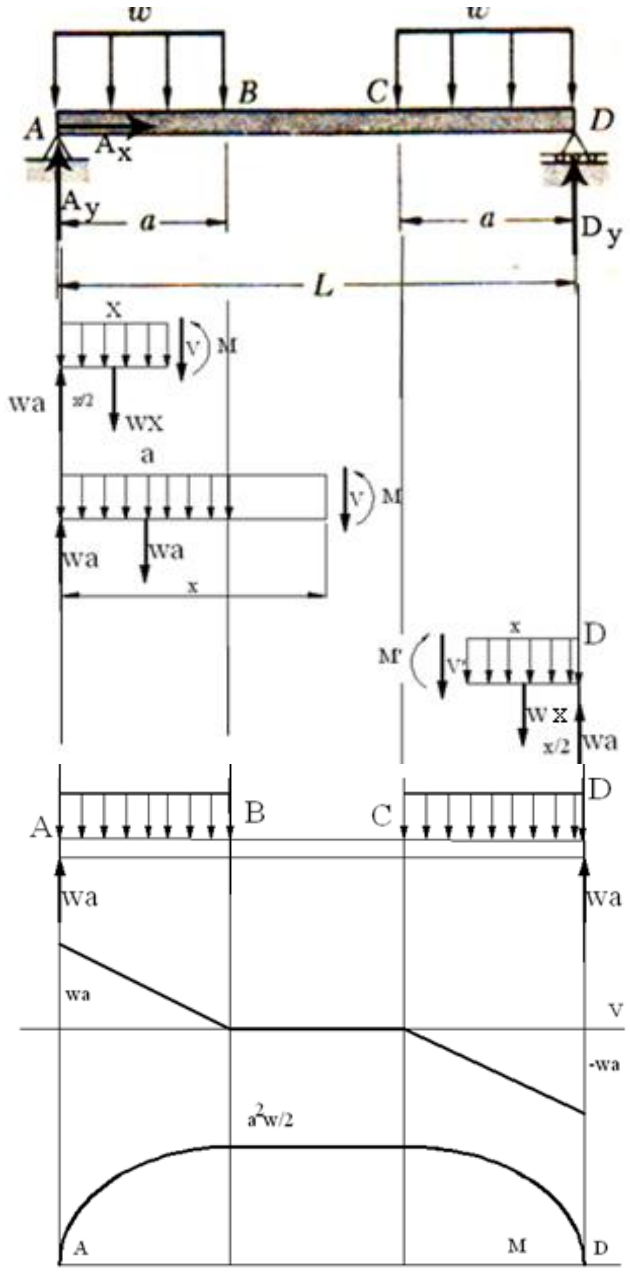
$$V=-P$$

$$\underline{M=+pa}$$

$$X=L$$

$$M=0$$

7-22دیاگرام آزاد برشی و گشت آور خمشی را برای تیرهایی مطابق شکل رسم کنید



$$\sum M_A = 0 \ \curvearrowleft^{+}$$

$$-LDy + wa\ (L - a/2) + wa\ (a/2) = 0$$

$$Dy = wa$$

$$Ay + wa - wa - wa = 0$$

$$Ay = wa$$

$$Ax = 0$$

$\underline{0 < x < a}$

$$-v = wa - wx = 0$$

$$V = W(a - x)$$

$$-W + V(x) + wx\ (x/2) = 0$$

$$M = wx(a - x) + wx^2/2$$

$$\begin{cases} X = a \\ V = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 0 \\ M = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X = a \\ M = wa^2/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 0 \\ V = aw \end{cases}$$

$\underline{a < x < L - 2a}$

$$-V + wa - wa = 0$$

$$V = 0$$

$$-M + v\ (x) + wa\ (a/2) = 0$$

$$M = wa^2/2$$

$\underline{L - a < x < L}$

$$V' - wx + wa = 0$$

$$V' = w\ (x - a)$$

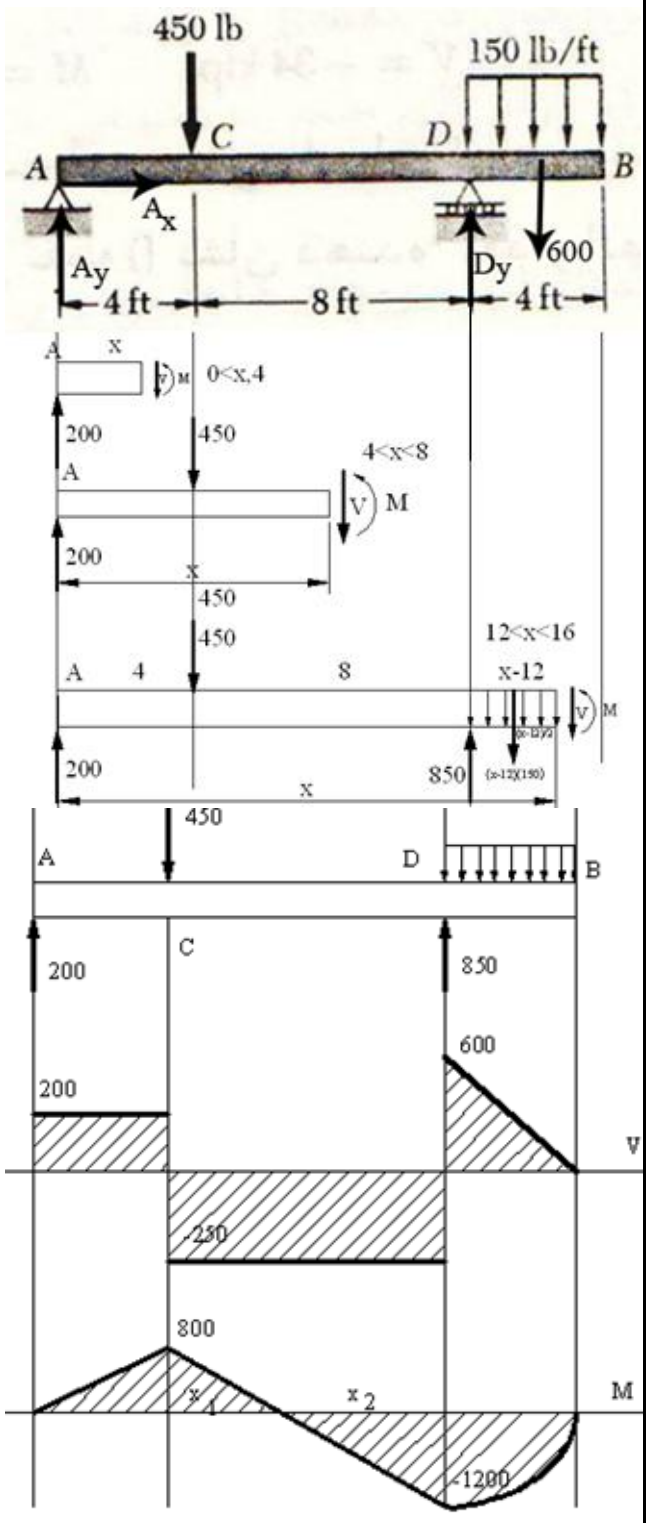
$$+M + V'(X) - wx\ (x/2) = 0$$

$$M = wa^2/2 - wx\ (x - a)$$

$$\begin{cases} X = 0 \\ M = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X = a \\ M = wa^2/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ V' = -wa \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a \\ V' = 0 \end{cases}$$

7-24 دیاگرام آزاد برشی و گشت آور خمشی را بـرای تیـر AB رسم کنید.



$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$-Dy\ (12) + 600\ (14) + 4(450) = 0$$

$$Dy = 850\ \ lb \uparrow$$

$$Ay + Dy - 450 - 600 = 0$$

$$Ay = 200\ 1b \uparrow$$

$\underline{0 < x < 4}$

$$M = 200x \qquad V = 200$$

$$\begin{cases} X = 0 \\ V = 200 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 0 \\ M = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 4 \\ M = 800 \end{cases}$$

$\underline{4 < X < 8}$

$$-V - 450 + 200 = 0$$

$$V = -250$$

$$-m + v(x) + 450\ \ (4) = 0$$

$$M = -250X + 1800$$

$$\begin{cases} X = 4\ ,\ 12 \\ V = -250 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 4 \\ M = 800 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 12 \\ M = -1200 \end{cases}$$

$\underline{12 < X < 16}$

$$\sum Fy = 0$$

$$-V - 150\ \ (x-12) + 850\ \ - 450 + 200 = 0$$

$$V = -150x + 2400 \quad \begin{cases} X = 16 \\ M = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 12 \\ V = 600 \end{cases}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$-M - (x-2)\ (150)\ \left(\frac{x-12}{2}\right)$$

$$+850\ \ (x-12) - 450\ \ (x-4) + 200\ \ (x) = 0$$

$$M = -75\ (x^2 + 144 - 24x)$$

$$+850\ \ (x-12) - 450\ \ (x-4) + 200x$$

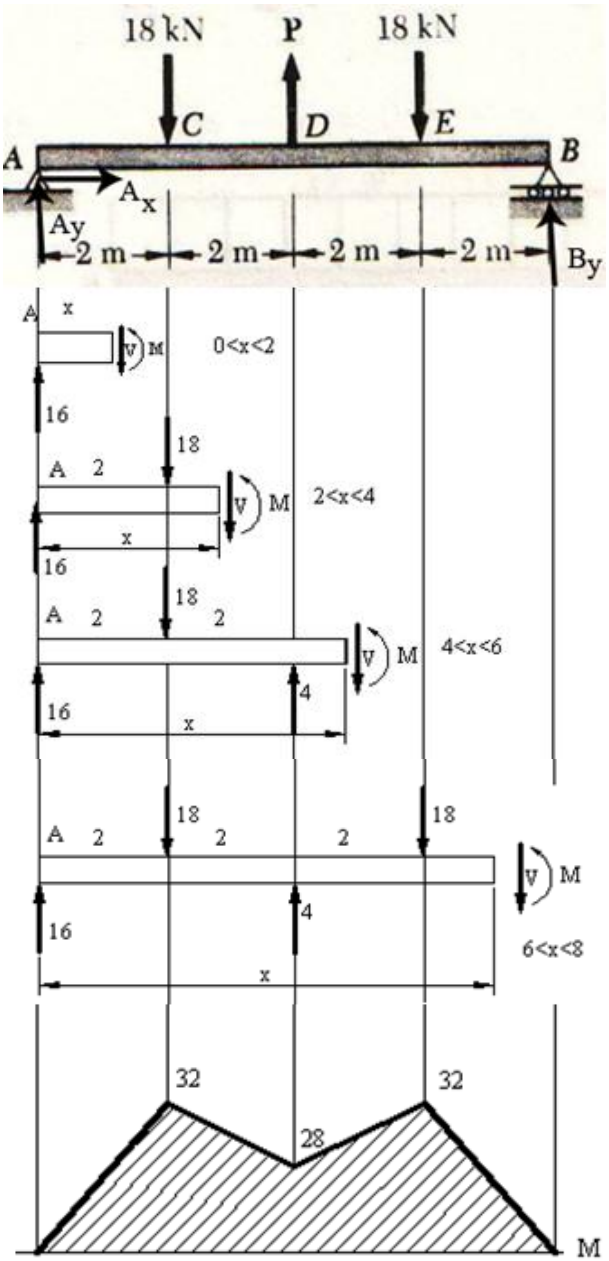
$$M = -75x^2 + 2400 - 19200$$

$$\begin{cases} X = 12 \\ V = -1200 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 16 \\ M = 0 \end{cases}$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{800}{1200} = 2/3 \qquad \frac{8}{x_2} = 5/3 \qquad x_2 = 4.8$$

$$x_1 = 3.2$$

7.26 دیاگرام آزاد برشی و گشت‌آور خمشی را برای تیر AB رسم کنید. هر گاه P به طرف بالا برابر با ۴KN باشد



$$\sum M_A = 0 \ \curvearrowleft^+$$
$$-8By + 18(6) - 4(4) + 18(2) = 0$$
$$By = 16$$
$$\sum Fy = 0$$
$$Ay + 16 - 18 - 18 + 4 = 0$$
$$Ay = 16 \quad Ax = 0$$

$\underline{0 < x < 2}$

$$V = 16 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ v = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 2 \\ M = 32 \end{cases}$$
$$M = 16x$$

$\underline{2 < x < 4}$

$$-V - 18 + 11 = 0 \qquad V = -2$$
$$-M + v(x) + 18(2)$$
$$M = -2x + 36$$
$$\begin{cases} X = 2{,}4 \\ V = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 2 \\ M = 32 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 4 \\ M = 28 \end{cases}$$

$\underline{4 < X < L}$

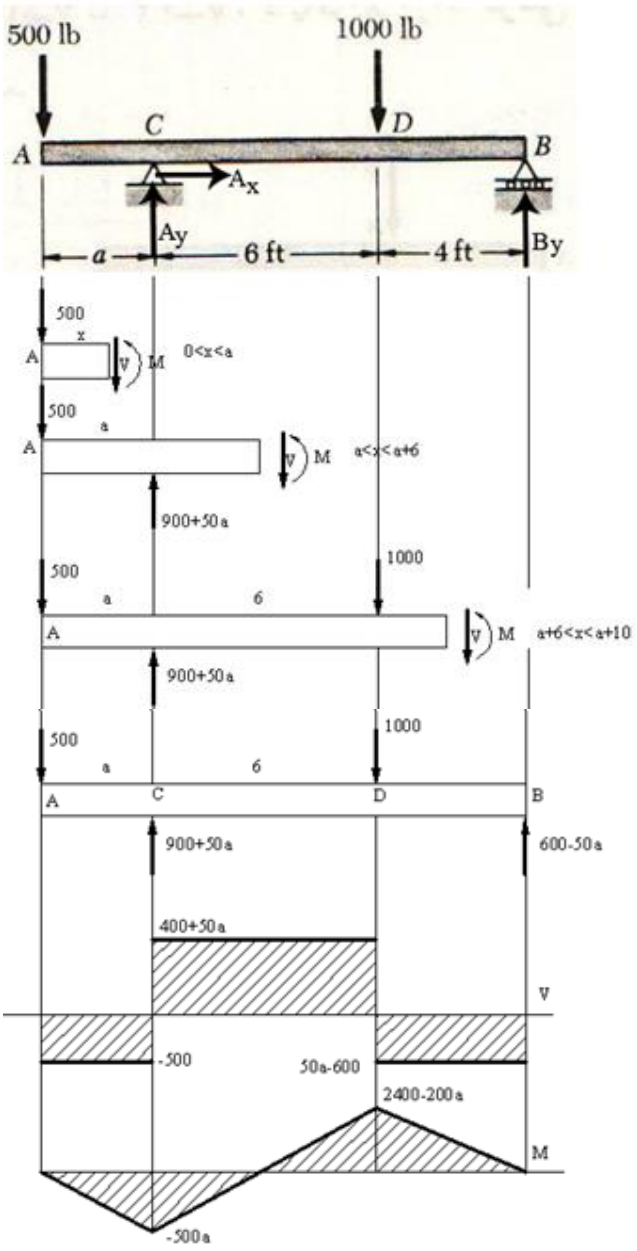
$$-V + 4 - 18 + 16 = 0$$
$$V = 2$$
$$-M + v(x) - 4(4) + 18(2) = 0$$
$$M = 2x + 20$$
$$\begin{cases} X = 4{,}6 \\ V = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 4 \\ M = 28 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 6 \\ M = 32 \end{cases}$$

$\underline{6 < X < 8}$

$$\sum Fy = 0 \qquad -V - 18 + 4 - 18 + 16 = 0$$
$$V = -16$$
$$\sum M_A = 0 \ \curvearrowleft^+$$
$$-M + v(x) + 18(60 - 4(4) + 8(2) = 0$$
$$M = -16x + 128$$

$$\begin{cases} X = 6{,}8 \\ V = -16 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 6 \\ M = 32 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 8 \\ M = 0 \end{cases}$$

7-27معین کنید فاصله a را برای وقتی که حـداکثر قـدر مطلـق گشت‌آور خمشی در تیر باندازه ممکن کوچک شود.



$$-By\ (10)+1000\ \ (6)-500\ \ a=0$$

$$By=600-50\ \ a$$

$$Cy+By-1500=0$$

$$Cy=900+50a$$

$\underline{0<x<a}$

$$V=-500$$

$$M=-500x$$

$\underline{a<x<a+b}$

$$-V-500+900+50a=0$$

$$V=50a+400$$

$$-m+v(x)-(900+50a)a=0$$

$$M=(500+400)\ \ x-900a-50a^2$$

$$\begin{cases}X=a\\M=-500a\end{cases}\qquad\begin{cases}X=6+a\\M=2400-200a\end{cases}$$

$\underline{a+6<X<a+10}$

$$-V-500+900+50a-1000=0$$

$$V=50a-600$$

$$-M+v(x)+1000\ \ (a+6)-(900+50a)a=0$$

$$M=X(50a-600)+1000a$$

$$+6000-900a-50a^2$$

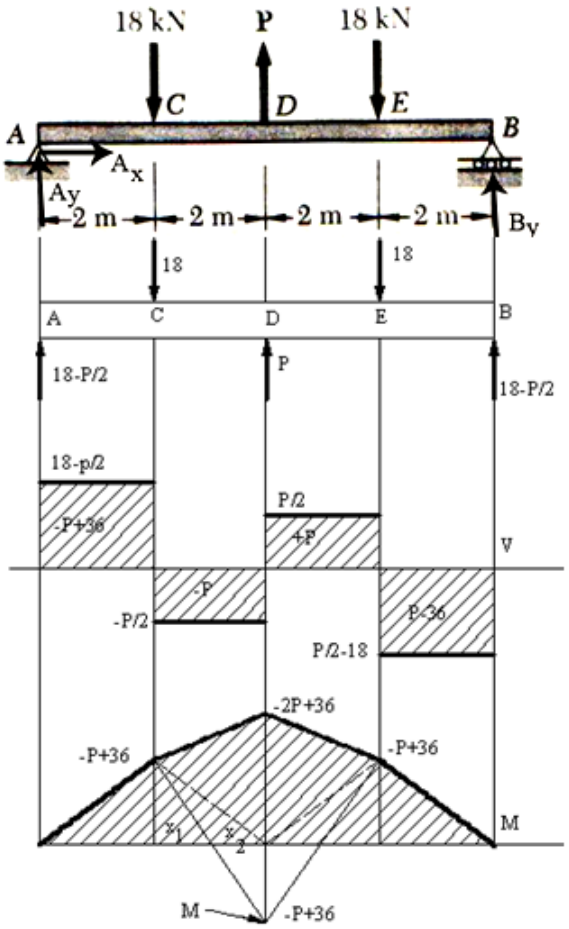
$$\begin{cases}X=a+b\\M=2400-200a\end{cases}\qquad\begin{cases}X=a+10\\M=0\end{cases}$$

$$M=0\ \ \rightarrow 2400-200a=0$$

تیر باندازه ممکن کوچک شود

$$a=12$$

7-28 معین کنید مقدار نیروی P بطرف بـالا را بـرای وقتـی کـه مقدار حداکثر قدر مطلق گشت‌آور خمشی در تیر به اندازه ممکن کوچک شود (با توجه به راهنمایی مسئله ۲۷-۷).



$$\sum MA=0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$-8\ By+6\ (18)+18(2)-4\ (p)=0$$

$$8By=-4p+144$$

$$By=-\frac{P}{2}+18$$

$$\sum Fy=0$$

$$Ay-\frac{p}{2}+18-18-18+p=0$$

$$Ay+P/2-18=0$$

$$Ay=-P/2+18$$

$$\sum Fx=0$$

$$Ax=0$$

$$-2p+36=0 \quad \sum Fy=0$$

$$p=18 \text{ جواب}$$

$M \to Min$ $\quad X_1=X_2=K$ خواهد شد.

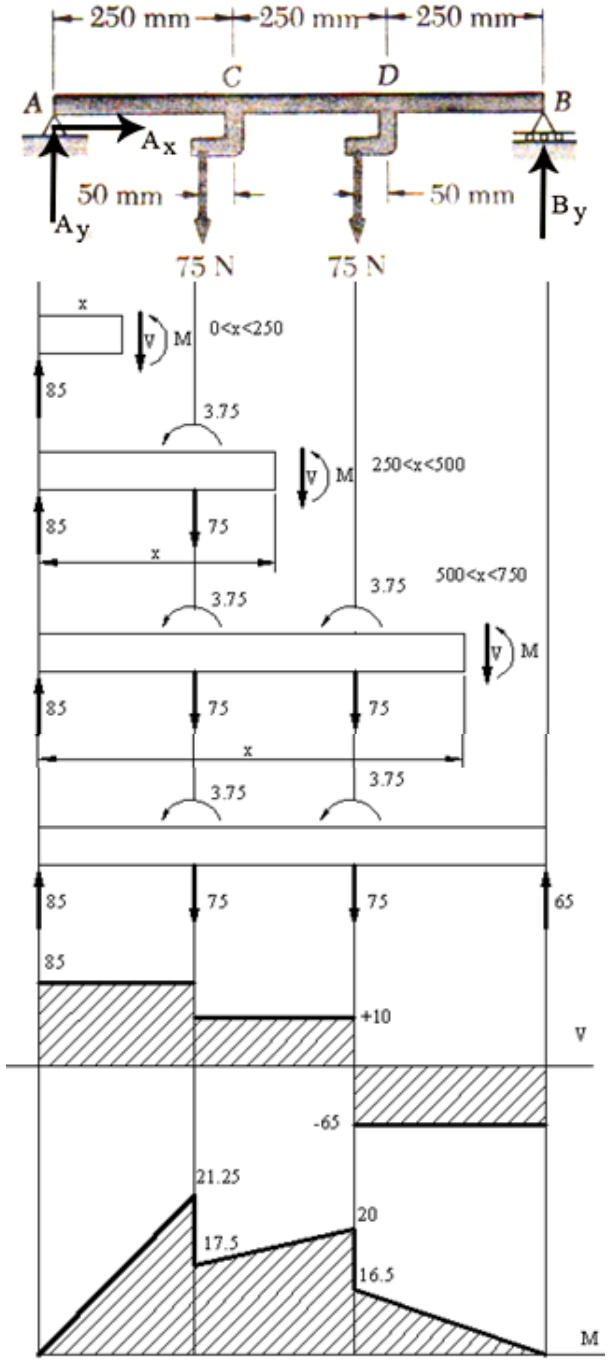
$$-2P+36=-(-P+36)$$

$$-2P+36=+P-36$$

$$3P=72$$

$$P=24 \text{ جواب}$$

7-31 دیاگرام آزاد برشی و گشتاور خمشی را برای تیر AB رسم کنید.



$$\sum M_A = 0$$

$$-3By\ (0.25) + 75\ (0.45) + 75\ (0.20) = 0$$

$$0.75By = 33.75 + 15$$

$$By = 65$$

$$Ay + 65 - 75 = 0$$

$$Ay = 85$$

$$Ax = 0$$

$0 < X < 250\ ^{mm}$

$$-V + 85 = 0 \qquad V = 85$$

$$M = 85\ x$$

$$\begin{cases} X = 0, 0.25 \\ V = 85 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 0.25 \\ M = 21.25 \end{cases}$$

$250 < X < 500$

$$-M + V(X) + 75\ (0.25)$$

$$-3.75 = 0$$

$$-V + 85 - 75 = 0$$

$$V = 10$$

$$M = 10x + 15$$

$$\begin{cases} X = 0.25\ ,\ 0.5 \\ V = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 0.25 \\ M = 17.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 0.5 \\ M = 20 \end{cases}$$

$500 < X < 750$

$$-V - 75 - 75 + 85 = 0$$

$$V = -65$$

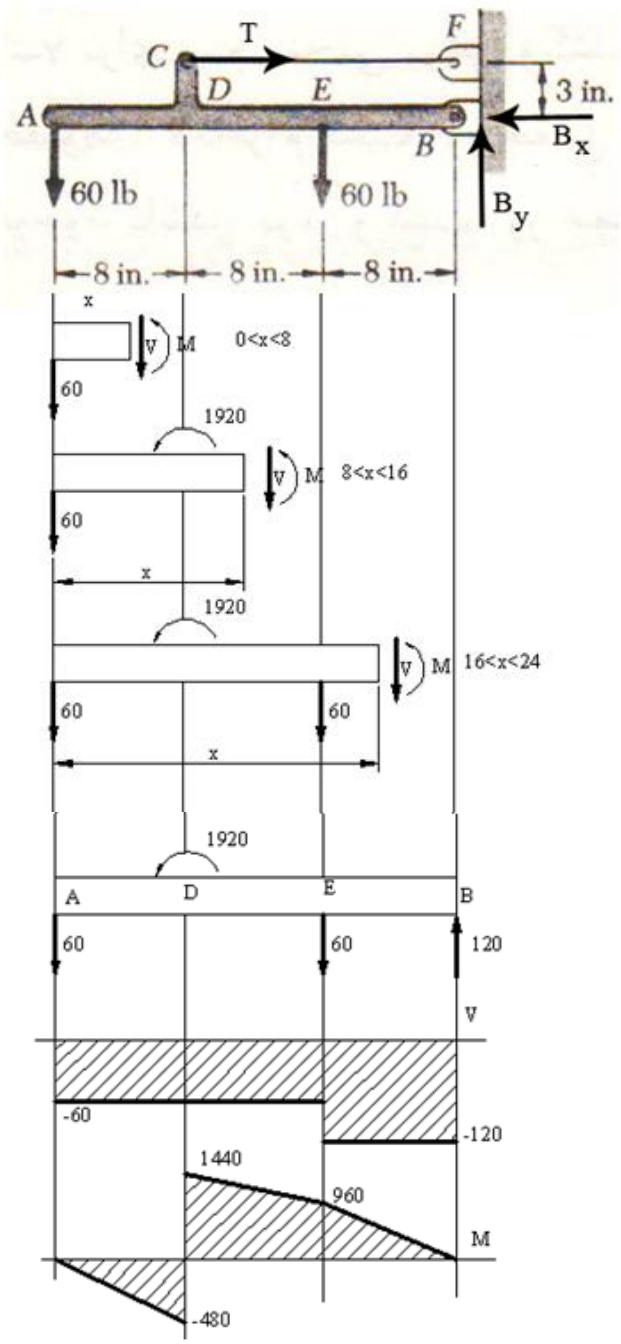
$$-M + Vx + 75\ (0.5) - 3.75$$

$$+ 75\ (0.25) - 3.75 = 0$$

$$M = -65x + 48.75$$

$$\begin{cases} x = 0.5\ ,\ 0.75 \\ v = -65 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 0.5 \\ M = 16.25 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 0.75 \\ M = 0 \end{cases}$$

7-32 دیاگرام آزاد برشی و گشت‌اور خمشی را برای تیر AB رسم کنید.



$$\sum MB = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$-60(24) + 3T - 60(8) = 0$$

$$3T = 1920$$

$$T = 6\ 40$$

$$Bx = 640$$

$$By = 120 \uparrow$$

$\underline{0 < x < 8}$

$$-V - 60 = 0$$

$$V = -60$$

$$M = -60\ x$$

$$\begin{cases} X = 0{,}8 \\ V = -60 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 8 \\ M = -480 \end{cases}$$

$\underline{8 < X < 16}$

$$-V - 60 = 0 \qquad V = -60$$

$$M = -60X + 1920$$

$$\begin{cases} X = 8 \\ V = 1440 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 16 \\ V = 960 \end{cases}$$

$\underline{16 < X < 24}$

$$+V = -120$$

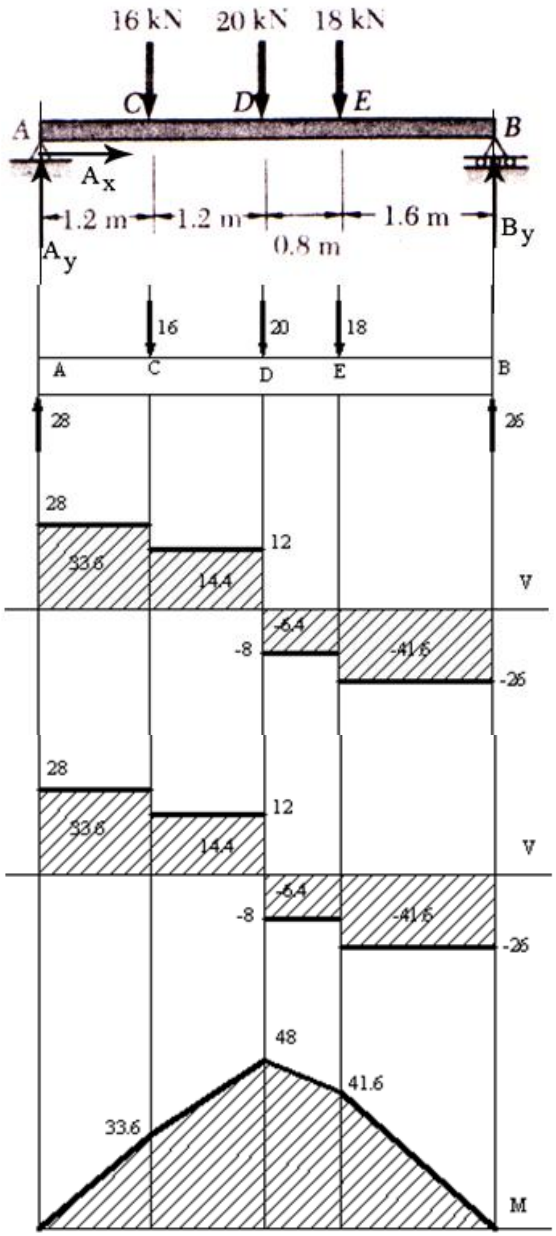
$$-M + V(x) + 60\ (16) + 1920 = 0$$

$$M = -120X + 2880$$

$$\begin{cases} X = 16 \\ V = 960 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 24 \\ M = 0 \end{cases}$$

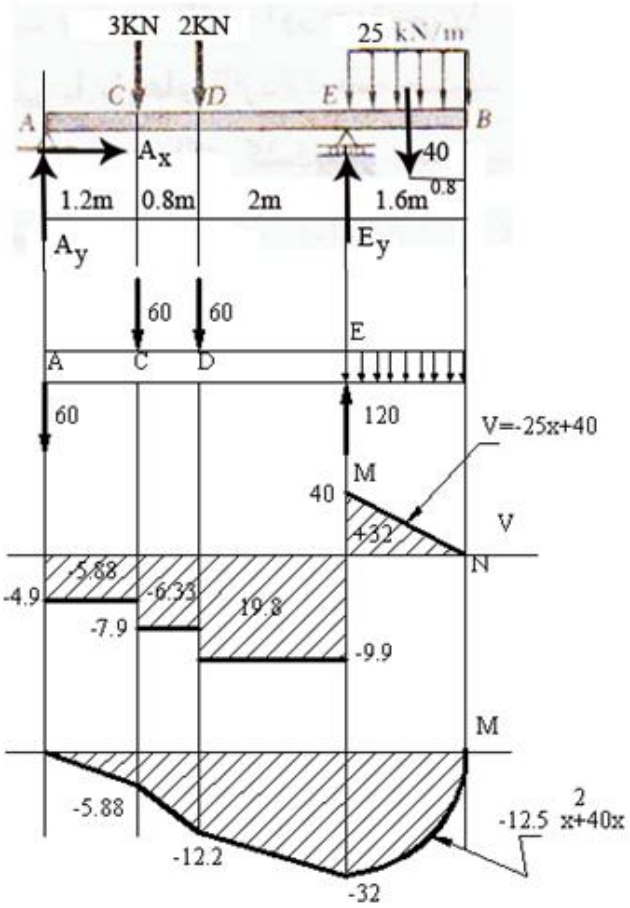
7-46دیاگرام برشی و گشتآور خمشی را برای تیر با بارهای وارده رسم نمائید.

$$\sum M_A = 0 \quad +\circlearrowleft$$
$$-4.8By + 18(3.2) + 20\ (2.4) + 16\ (1.2) = 0$$
$$By = 26$$
$$Ay - 16 - 20 - 18 + 26 = 0$$
$$Ay = 28$$
$$VA = +28$$
$$VC - VA = -16 + 0$$
$$VC = 28 - 16 = 12$$
$$VD - VC = -20 + 0$$
$$VD = -20 + 12$$
$$VD = -8$$
$$VE - VD = -18 + 0$$
$$VE = -18 - 8$$
$$VE = -26$$
$$VB - VE = 26 + 0$$
$$VB = 0$$

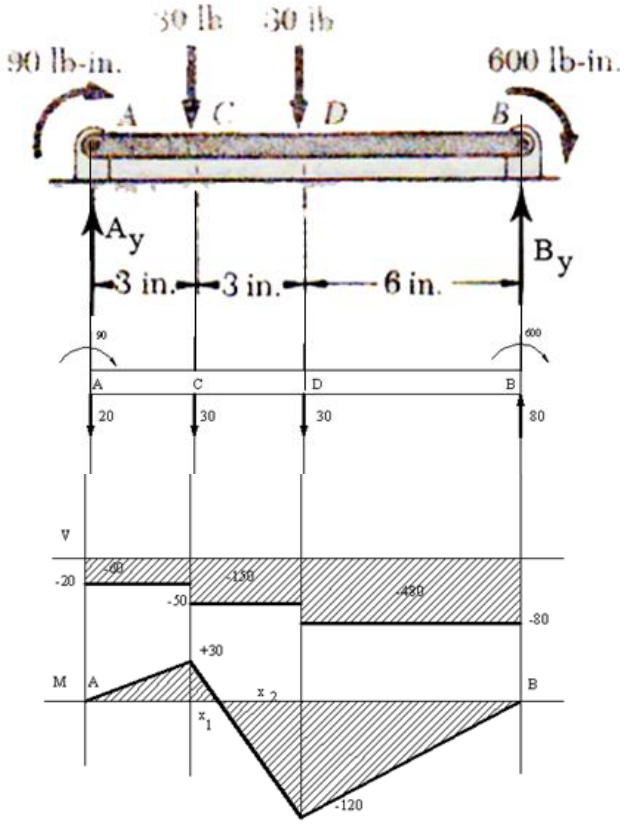


7-47دیاگرام برشی و گشت‌آور خمشی را برای تیر با بارهای وارده رسم نمائید.

$$\sum MA=0 \quad \curvearrowleft^{+}$$
$$(40)(4-8)-Ey(4)$$
$$+2(2)-3(1.2)=0$$
$$4\ \ Ey=199.C$$
$$Ey=49.9$$
$$Ay-3-2+49.9-40=0$$
$$Ay=-4.9$$
$$VC-VA=-3$$
$$VA=-4.9$$
$$VC=-3-4.9=-6.9$$
$$VD-VC=-2$$
$$VD=-2-6.9=-9.9$$
$$VE-VD=49.9$$
$$VE=49.9-9.9=40$$
$$VB-VE=-40$$
$$VB=-40+40=0$$
$$M(D,40) \qquad N(1.6,0)$$
$$m=\frac{40}{-1.6}=-25$$
$$V-40=25(x)$$
$$V=-25x+40$$
$$M=-12.5x^2+40x$$



7-48دیاگرام برشی و گشتآور خمشی را برای تیر با بارهای وارده رسم نمائید



$$\sum M_A = 0$$

$$-12By + 30(6) + 30(3) + 90 + 600 = 0$$

$$By = 80$$

$$Ay = -20$$

$$VA = -20$$

$$VC - VA = 0$$

$$VC = VA - 20$$

$$VD - VC = -30 + 0$$

$$V_D = -30 - 20 = -50$$

$$V_B - V_D = -30$$

$$V_B = -30 - 50 = -80$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{30}{120} = 1/4$$

$$\frac{3}{X_2} = \frac{5}{4}$$

$$X_2 = 2.4$$

$$X_1 = 0.6$$

$$MC - MA = -60$$

$$MC = -60 + 90 = 30$$

$$MD - MC = -150$$

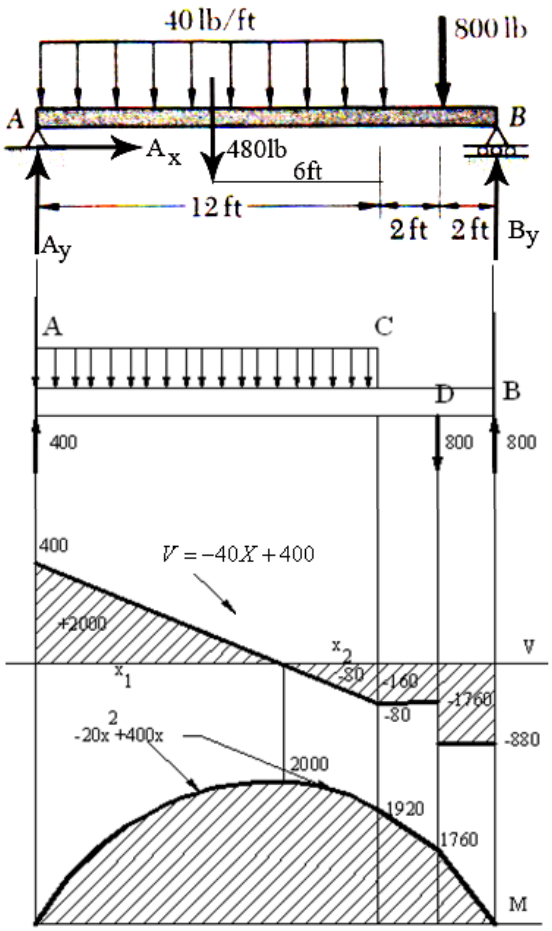
$$MD = -120$$

$$MB - MD = -480 + 600$$

$$MB = -120 - 480 + 600$$

$$MB = 0$$

7-50دیاگرام برشی و گشت‌آور خمشی را برای تیر با بارهای وارده را رسم کرده و محل و مقدار حداکثر گشت‌آور خمشی را معین کنید.



$$\sum M_A = 0$$
$$-16By + 800\ \ (14) + 480\ \ (6) = 0$$
$$By = 880$$
$$Ay - 480 - 800 + 880 = 0$$
$$Ay = 400\ \ lb$$

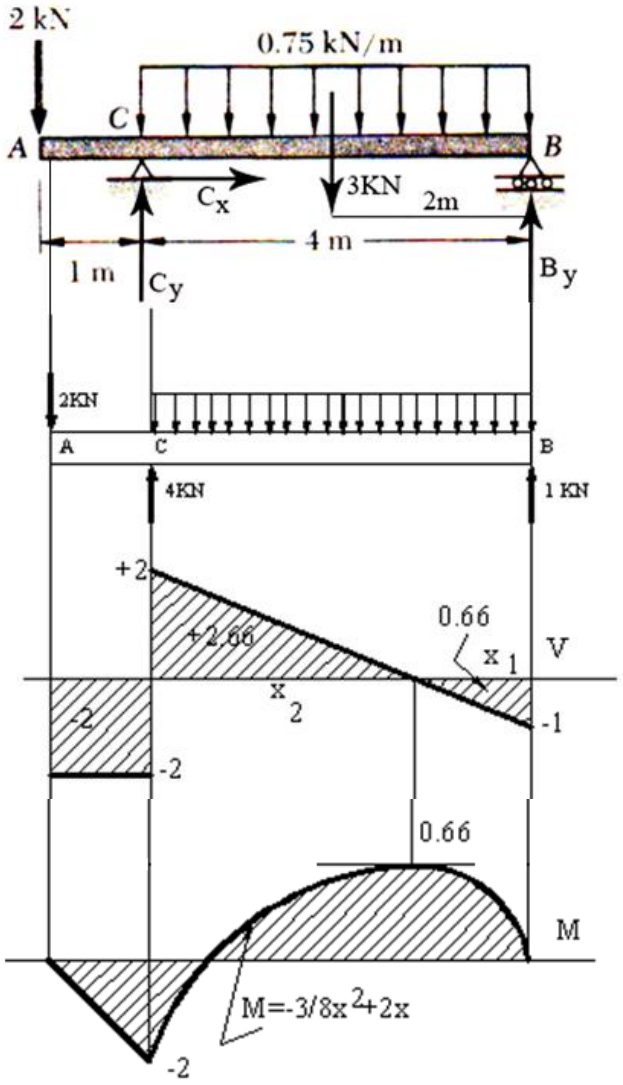
$$VA = 400$$
$$VC - VA = -487$$
$$VC = -480 + 400 = -80$$
$$VD - VC = -800$$
$$V_D = -800 - 80 = -880$$
$$V_B - V_D = 880$$
$$V_B = 0$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{400}{80} = 5$$
$$\frac{12}{X_2} = 6$$
$$X_2 = 2$$
$$X_1 = 10$$
$$m = -40$$
$$V = -40X + 400$$
$$M = -20X^2 + 400\ \ X$$

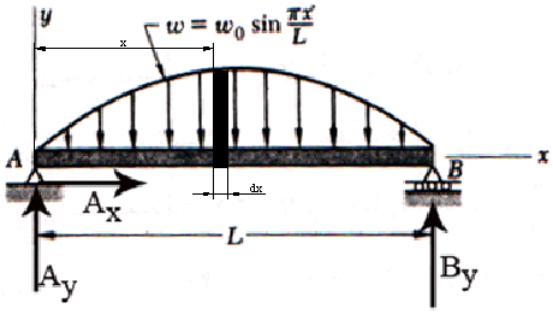
7-52 دیاگرام برشی و گشتآور خمشی را برای تیر با بارهای وارده رسم کرده و محل و مقدار حداکثر گشتآور خمشی را معین کنید.

$$\sum M_C = 0 \ \curvearrowleft^{+}$$
$$-4By + 3(2) - 2(1) = 0$$
$$4By = 6 - 2 = 4$$
$$By = 1 \ KN$$
$$-2 + Cy - 3 + 1 = 0$$
$$Cy = 4$$
$$Cx = 0$$
$$VC - VA = 0 + 4$$
$$VA = -2$$
$$VC = 4 - 2 = 2$$
$$VB - VC = -(0.75)(4)$$
$$V_B = -3 + 2 = -1$$
$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{2}{1} = 2$$
$$\frac{4}{x_1} = \frac{3}{1}$$
$$X_1 = 2.66$$

$$m = -\frac{2}{2.66} = 0.75$$
$$V - 2 = -0.75x$$
$$V = -\frac{3}{4}x + 2$$
$$M = -\frac{3}{8}X^2 + 2X$$



7-56 معین کنید معادلات برشی و گشت‌آور خمشی را برای تیر با بارهای وارده. هم چنین مقدار و محل حداکثر گشت‌آور خمشی را تعیین نمائید.



$$w = wo\ Sin\pi\, X/L$$

$$d\ A = y\ dx$$

$$A = \int_0^l w_o \frac{\sin \pi x}{l} dx \quad V = \frac{wol}{\pi} Cos\frac{\pi x}{L}$$

$$A = wo\left[-\frac{L}{\pi} Cos\frac{\pi x}{L}\right]_0^L$$

$$A = \frac{2\ wol}{\pi}$$

$$\overline{X}.A = \int x_{el}\ d\ A$$

$$\overline{X}.A = \int_0^L\ wox\ \frac{Sin\pi x}{L}\ dx$$

از جدول $\int x\ Sinx\ dx = Sinx - x\ Cosx$

$$\frac{L\ wo}{\pi}\int_0^L x\frac{Sin\pi x}{L} = \frac{Lwo}{\pi}\left[\frac{Sin\pi x}{L} - x\frac{Cos\pi x}{L}\right]_0^L$$

$$\overline{X}.\frac{2wol}{\pi} = \frac{wol}{\pi}\ [Sin\pi - LCos\pi - Sin0]$$

$$\overline{X}.\frac{2wol}{\pi} = \frac{L^2 wo}{\pi}$$

$$\overline{X} = L/2$$

$$M = \int\ Vdx = \frac{wol}{\pi}\int\ \frac{Cos\pi x}{L}$$

$$M = \frac{woL^2}{\pi^2} Sin\ \pi x/L$$

$$-L(By) + \frac{2wol}{\pi}(L/2) = 0$$

$$By = \frac{wol}{\pi} \quad , Ay = \frac{wol}{\pi}$$

$$V_B - V_A = -\int wdx = \frac{-2wol}{\pi}$$

$$V_A = \frac{+wol}{\pi}$$

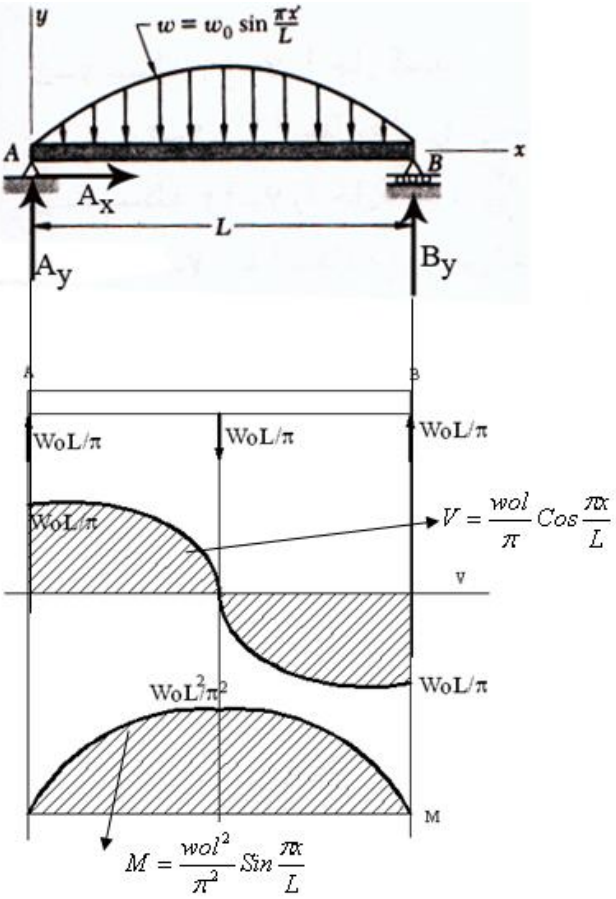
$$VB = \frac{-2wol}{\pi} + wol/\pi = -wol/\pi$$

$$V = -\int w\ dx$$

$$V = -w\left[\frac{-L}{\pi} Cos\frac{\pi X}{L}\right]$$

$$V = \frac{wol}{\pi} Cos\frac{\pi x}{L}$$

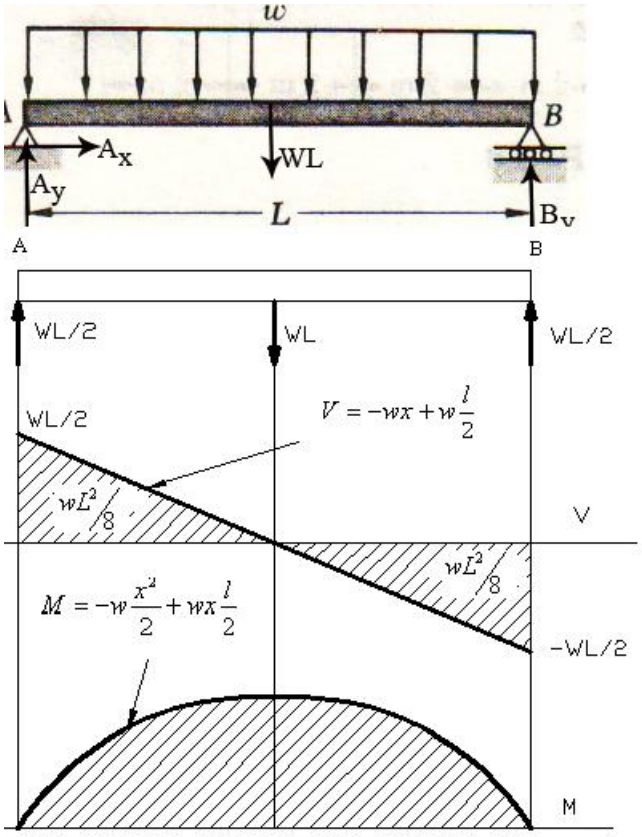
$$M = \frac{wol^2}{\pi^2} Sin\frac{\pi x}{L}$$



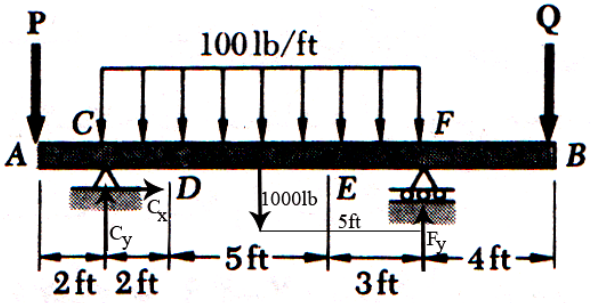
7-54معادلات برشی و گشتآور خمشی را برای تیر و بارهای وارده در مسئله ۱۷-۷ تعیین کنید (مبدأ مختصات را در نقطه A در نظر بگیرید).

$$By\ (l) = wl\ (l/2)$$
$$By = wl/2$$
$$Ay = wl/2$$
$$V_B - V_A = -\int_0^l w\ dx$$
$$V_B - V_A = -wl$$
$$V_A = wl/2$$
$$V_B = wl/2 - wl$$
$$V_B = -wl/2$$

$$m = \frac{-wl/2}{l/2} = -w$$
$$V = -mx + wl/2$$
$$M = -\frac{wx^2}{2} + \frac{wl}{2}x$$
$$\begin{cases} x = l/2 \\ M = -\frac{wl^2}{8} + \frac{wl^2}{4} \end{cases}$$
$$M = wl^2/8$$



7-58 بر تیر AB باری یکنواخت ۱۰۰lb/ft و نیروهای متمرکز P و Q وارد می‌شود. گشتآور خمشی آن معلوم و برابر lb/ft ۴۰۰+ در نقطه D، ۱۵۰lb.ft+ در نقطه E می‌باشد. دیاگرام برشی و گشتآور خمشی آن را رسم کنید.



$$M_D = 400 \quad 1b - ft$$

$$M_E = 150$$

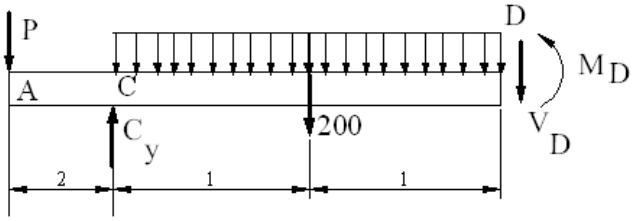
$$\sum M_C = 0$$

$$-10 \ (Ey) + 14Q + 1000 \ (5) - 2p = 0$$

$$Ey = 1.4Q - 0.2P + 500$$

$$-P + Cy - 1000 + 1.4Q - 0.2P + 500 - Q = 0$$

$$Cy = 1.2P - 0.4Q + 500$$



$$\sum Fy = 0 \quad -V_D - 200 + 1.2P - 0.4Q + 500 - P = 0$$

$$V_D = 0.2P - 0.4Q + 300$$

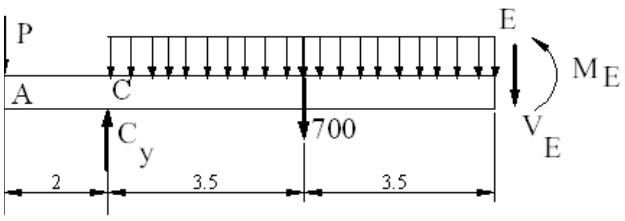
$$\sum MA = 0 \ \curvearrowleft^{+}$$

$$-M_D + V_D(4) + 200(3) - 2Cy = 0$$

$$M_D = 0.8P - 1.6Q + 1200 + 600 - 2.4P + 0.8 - 1000$$

$$M_D = -1.6P - 0.8Q + 800 = 400$$

$$1.6P + 0.8Q = 400$$



$$\sum Fy = 0 \quad -V_E - 700 + 1.2P - 0.4Q + 500 = 0$$

$$V_E = 0.2P - 0.4Q - 200$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-M_E + 9VE + 700 \ (5.5) - 2 \ (1.2P - 0.4Q + 500) = 0$$

$$M_E = 1.8P - 3.6Q - 1800 + 3350 - 2.4P + 0.8Q - 1000$$

$$M_E = -0.6P - 2.8Q + 1050 = 150$$

$$\begin{cases} -0.6p - 2.8Q = -900 \\ 1.6P + 0.8Q = 400 \end{cases}$$

$$5.6P + 2.8Q = 1400$$

$$5P = 500$$

$$P = 100$$

$$0.8Q = 400 - 160$$

$$Q = 300$$

$$VE = 0.2 \ (100) - 0.4 \ (300) - 200$$

$$VE = 20 - 120 - 200 = -300$$

$$VD = 0.2 \ (100) - 0.4 \ (300) + 300$$

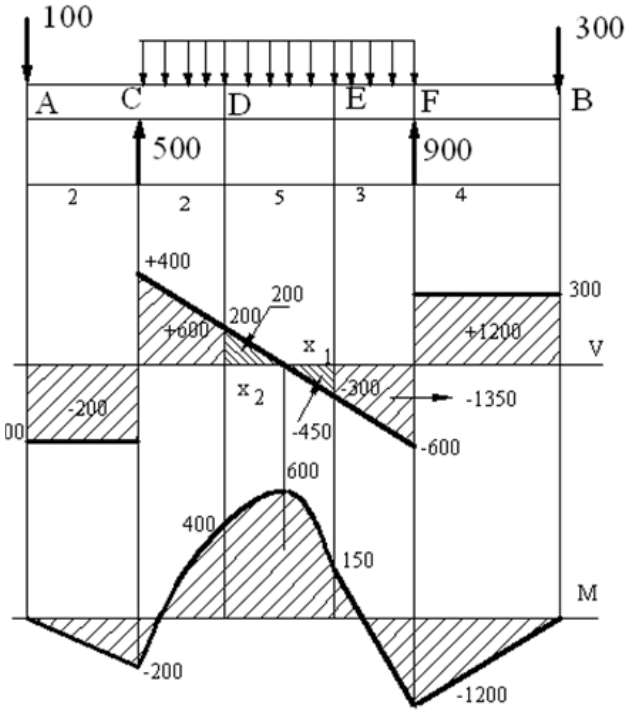
$$VD = 20 - 120 + 300 = +200$$

$$Cy = 1.2 \ (100) - 0.4 \ (300) + 500$$

$$Cy = 120 - 120 + 500 = 500$$

$$Ey = 1400 - 500 = 900$$

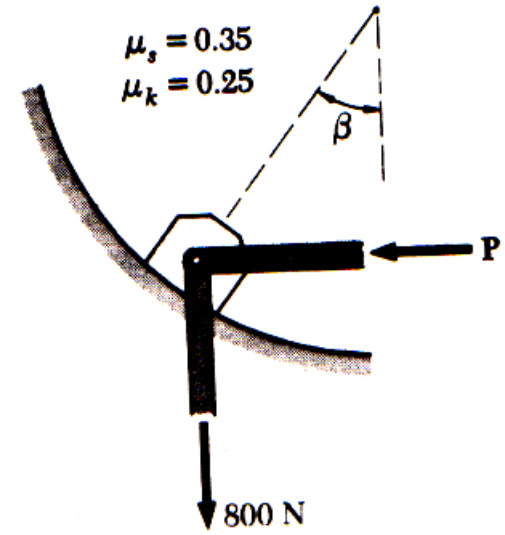
$$V_C - V_A = 0 + 500$$
$$V_A = -100$$
$$V_C = 500 - 100 = 400$$
$$V_D = 200$$
$$V_E = -300$$
$$V_F - V_C = 0 - 1000$$
$$V_F = -1000 + 400$$
$$V_F = -600$$
$$V_B - V_F = 900 - 300$$
$$V_B = -600 + 600 = 0$$
$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{300}{200} = 3/2$$
$$\frac{5}{X_2} = 5/2$$
$$X_2 = 2$$
$$X_1 = 3$$



فصل ۸

اصطکاک

8-2 دو نیرو بر جسمی برای حالتی مطابق شکل وقتی $\beta = 30^\circ$ است وارد می شود،معین کنید(a)نیروی لازم Pرا برای شروع حرکت جسم بطرف بالا،(b)حداقل نیروی Pکه از حرکت جسم بطرف پائین جلو گیری نماید.



$u_s = 0.35 \quad \varphi_s = 19.2^\circ \quad u_k = 0.25$

B=30+19.29=49.29

A=90-49.29=40.71

$$\frac{800}{Sin\ 40.71} = \frac{P}{Sin\ 49.29}$$

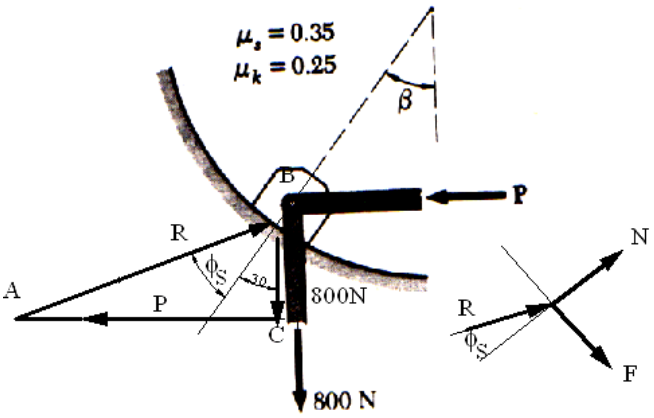
$$a) \quad p = 800\ (\frac{Sin49.29}{Sin40.71})$$

$$P = 930 \quad N$$

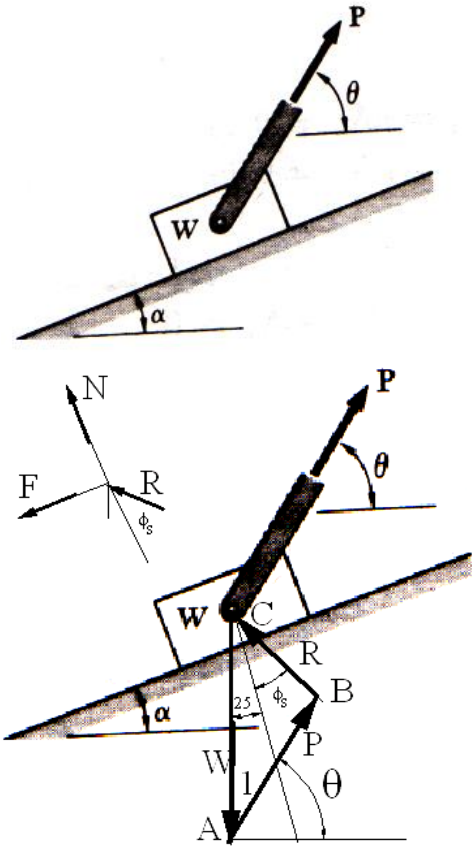
$$E = 30 - \phi_S = 30 - 19.29 = 10.71$$

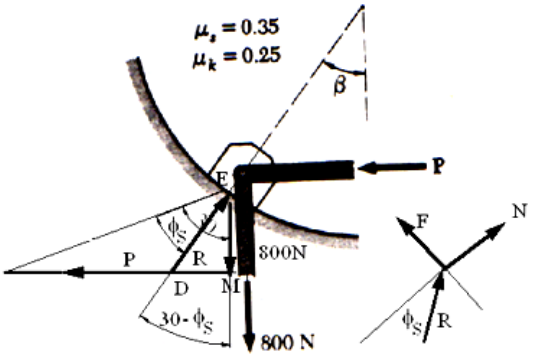
$$D = 90 - 10.71 = 79.29$$

$$b) \quad \frac{800}{Sin79.29} = \frac{P}{Sin10.71} \Rightarrow P = 151.3\ N$$



8-4 جسمی بوزن W=۴۰lb روی سطح ناصافی مطابق شکل قرار گرفته. می‌دانیم که $\mu_S = 0/25, \alpha = 25^\circ$ معین کنید مقدار و جهت حداقل نیروی لازم P را (a) برای شروع حرکت بطرف بالا، (b) نیروی لازم برای جلوگیری حرکت جسم بطرف پایین.





$$P=\frac{40\ Sin\ 36.3}{Sin\ 90}$$

$P=23.7\ lb\quad As\ shown\quad \theta=36.3$

$DEM\Rightarrow M_1=25-\phi_S=25-11.3=13.7$

$D_1=90-\theta$

$E=180-90+\theta-13.7=76.3+\theta$

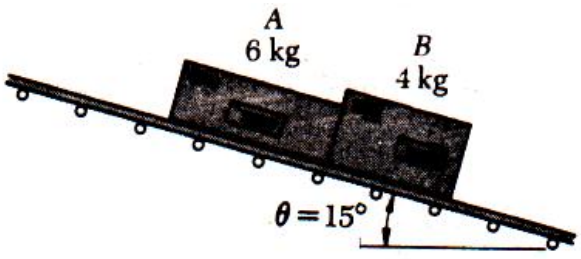
$$\frac{P}{Sin\ 13.7}=\frac{R}{Sin\ (90-\theta)}=\frac{40}{Sin\ (76.3+\theta)}$$

$\theta=13.7^\circ$ به دلیل حل بالا

$$P=\frac{40Sin\ 13.7}{Sin90}$$

$P=9.47\ lb\quad As\ Shown\quad \theta=13.7$

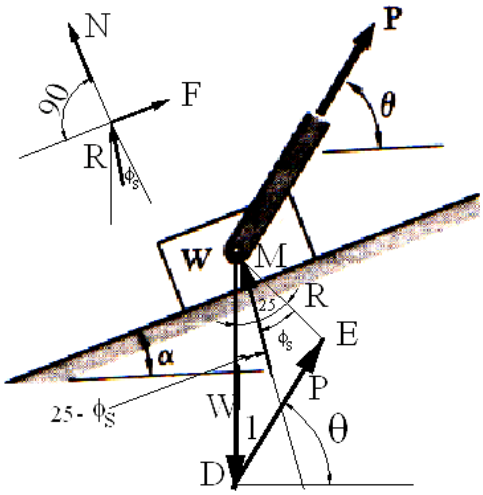
8-6 دو بسته روی تسمه ناقل در وضع سکون قرار گرفته، ضریب اصطکاک بین بسته A و سطح تسمه $\mu_S=0/2$ و $\mu_K=0/15$ و ضریب اصطکاک بین بسته B و تسمه $\mu_S=0/3$ و $\mu_K=0/25$ می‌باشد. بسته‌ها مطابق شکل به یکدیگر در تماس و روی تسمه در حالت سکون می‌باشند، معین کنید (a) آیا یکی یا هر دو از بسته حرکت خواهند کرد. (b) نیروی اصطکاک وارد بر هر بسته را.



$us=0.2\qquad uk=0.15\quad A$

$us=0.3\quad uk=0.25\qquad B$

فرض می شودB و A می لغزد پس A و B با هم به پائین نمی توانند بلغزند، چون u_B و u_A متفاوت هستند.



$w=40\ 1b$

$\alpha=25^\circ$

$\mu=0.2\qquad \tan\varphi_s=0.2$

$\varphi_s=11.3^\circ$

$ABC\Rightarrow A_1=90-\theta$

$C=25+\varphi_S=25+11.3=36.3$

$B=180-90+\theta-36.3=53.7+\theta$

$$\frac{P}{Sin36.3}=\frac{R}{Sin\ (90-\theta)}=\frac{40}{Sin\ (53.7+\theta)}$$

$\sum Fx=0$

$pCos\theta=R\ Sin36.3$

$\sum Fy=0\qquad pSin\theta-40+RCos36.3=0$

$p\ Sin\theta=40-R\ Cos6.3$

$$\frac{(Sin\theta)(40)\ \ Sin36.3}{Sin\ (53.7+\theta)}=40-\frac{40\cos\theta\cos36.3}{Sin\ (53.7+\theta)}$$

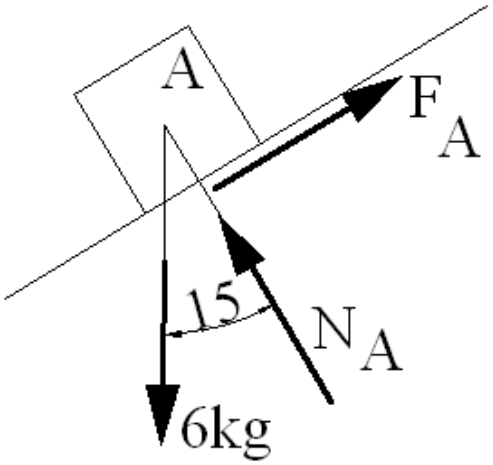
$Sin\theta\ Sin36.3=Sin\ (53.7+\theta)-Cos\theta\ Cos36.3$

$Sin\theta\ Sin36.3+Cos\theta\ Cos36.3=Sin\ (53.7+\theta)$

$Cos\ (\theta-36.3)=Sin\ (53.7+\theta)$

$90+36.3-53.7=2\theta\qquad \theta=36.3$

$$P=\frac{40\ Sin\ 36.3}{Sin\ (53.7+\theta)}$$



$\sum Fy = 0$

$NA - 6\ Cos15 = 0$

$NA = 5.8\ kg$

$\sum Fx = 0$

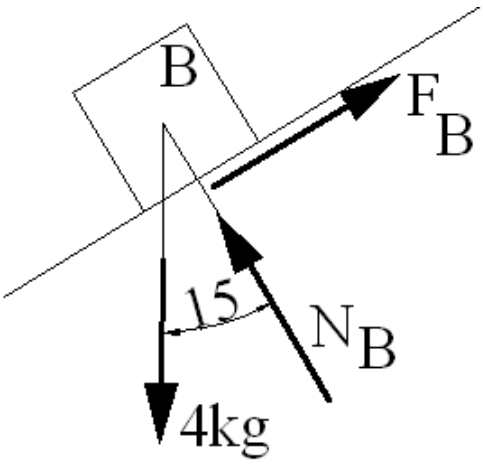
$FA - 6\ Sin15 = 0$

$FA = 1.55\ kg$

$F'_A = \mu_A N_A = 5.8x0.2 = 1.16\ kg$

$F'A < FA$ چون

است،پس به پائین می لغزد و به پائین حرکت می کند



$FA = FK = \mu_K N_A = 0.15\ (5.8)\ (9.81)$

$FA = 8.5\ N \Rightarrow \theta = 15$

$FB = 4\ Sin15 = 1.035\ kg$

$N_B = 4Cos15 = 3.86\ Kg$

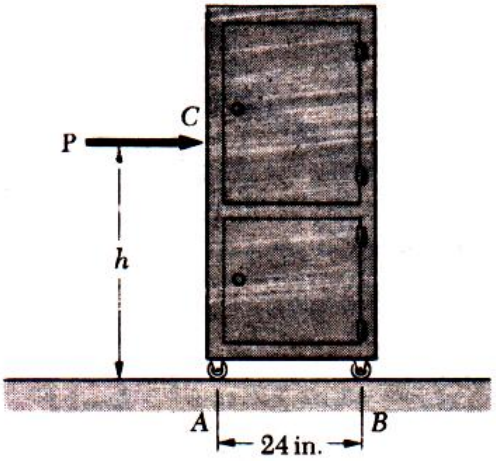
$F'B = 3.86 \times 0.3 = 1.16\ kg$

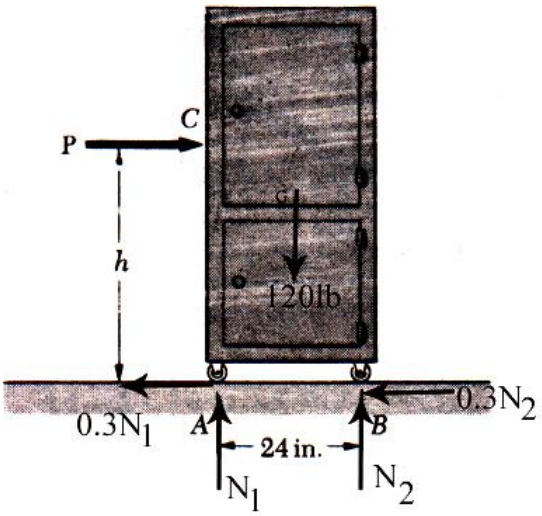
$F'B > FB$ چون است

پس حرکت نمی کند نمی لغزد ،بنابراین

$F'B = 1.16 \times 9.81 = 11.37\ N \quad \theta = 15$

8-10 در مسئله ۹-۸ بفرض اینکه چرخها در نقاط A و B با قفسه قفل و درگیر باشند، معین کنید (a) نیروی لازم P را برای حرکت دادن قفسه بطرف راست (b) حداکثر ارتفاع مجاز h را تا آنجا که قفسه واژگون نشود.





$$\sum Fy = 0$$

$$N_1 + N_2 = 120$$

$$\sum Fx = 0$$

$$p = 0.3\ N_1 + 0.3\ N_2$$

$$p = 0.3\ (N_1 + N_2)$$

$$p = 0.3\ (120)$$

$$p = 36\ lb$$

اختصاص به h ندارد پس فرض گرفته می شود،در B واژگون شود.

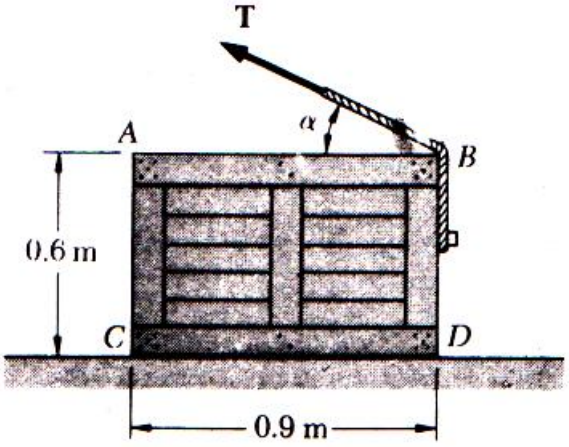
$$\sum M_B = 0 \curvearrowleft^{+}$$

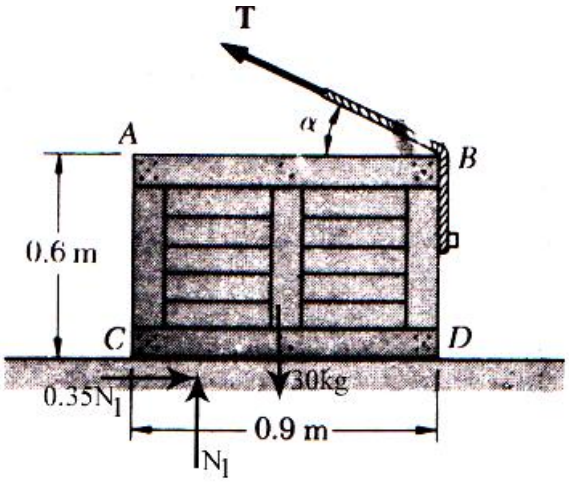
$$36\ h - 120\ (12) = 0$$

$$36\ h = 120\ (12)$$

$$h = 40\ in$$

8-11صندوقی به جرم ۳۰kg را می‌خواهند به سمت چپ در روی زمین بدون کج شدن حرکت دهند می‌دانیم که ضریب اصطکاک بین صندوق و سطح زمین ۰/۳۵ می‌باشد معین کنید (a) حداکثر مقدار زاویهٔ α مجاز را، (b) کشش T نظیر این حالت را.





فرض گرفته می شود که بدون واژگون شدن بطرف چپ برود

$$\mu_S = 0.35$$

$$\sum Fx = 0$$

$$T\ Cos\alpha = 0.35\ N_1$$

$$\sum Fy = 0$$

$$N_1 = -30 + T\ Sin\alpha = 0$$

$$\frac{T\ Cos\alpha}{0.35} - 30 + T\ Sin\alpha = 0$$

اگر α حداکثر شود ، مشتق صفر می شود.

$$\frac{T}{0.35}\ (-Sin\alpha) + T\ Cos\alpha = 0$$

$$\frac{Sin\alpha}{0.35} = Cos\alpha \qquad \tan\alpha = 0.35$$

$$\alpha = 19.29^{\circ}$$

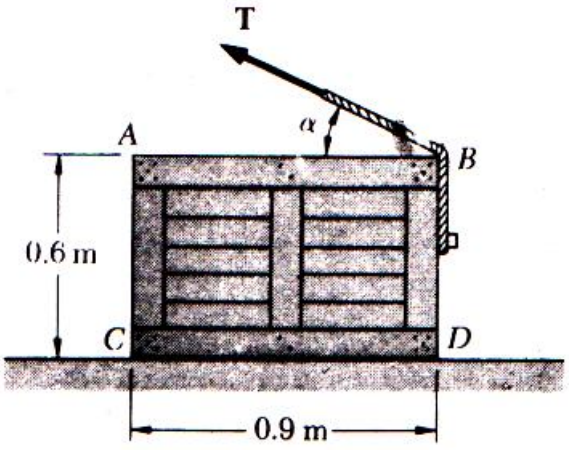
$$\frac{T\ Cos\ 19.29}{0.35} - 30 + T\ Sin\ 19.29 = 0$$

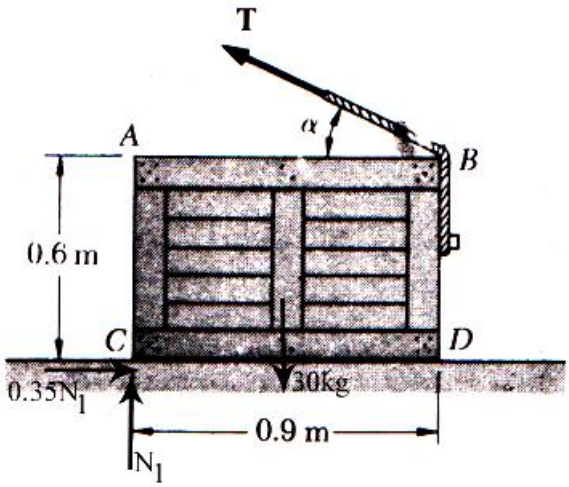
$$T\ (2.696) = 30 - T\ (0.33)$$

$$T\ (3.0263) = 30$$

$$T = 9.913\ kg$$

8-12 صندوقی بـه جـرم ۳۰kg بواسـطه طنـابی مطـابق شـکل کشیده می‌شود. ضریب اصـطکاک بـین صـندوق و سـطح زمـین ۰/۳۵ می‌باشد، هر گاه $\alpha = 30^\circ$ باشد، معین کنید (a) کشـش T لازم برای حرکت صندوق (b) آیا صندوق می‌لغزد و یا واژگـون می‌شود.





فرض گرفته می شود در نقطه C واژگون شود.

$$\sum M_C = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

$$-T\,Cos30\ (0.6) - T\,Sin30\ (0.9) + 30\ (0.45) = 0$$

$$T\,(0.5196) + T\,(0.45) = 13.5$$

$$0.9696\ \ T = 13.5$$

در این نیرو واژگون می شود $T = 13.42\ \ kg$

$$\sum Fy = 0$$

$$N_1 - 30 + T\ Sin30 = 0$$

$$T\,Cos30 = 0.35\ \ N_1$$

$$\frac{T\,Cos30}{0.35} - 30 + T\ Sin30 = 0$$

$$2.474\ \ T + 0.5\ \ T = 30$$

$$T\ (2.474) = 30$$

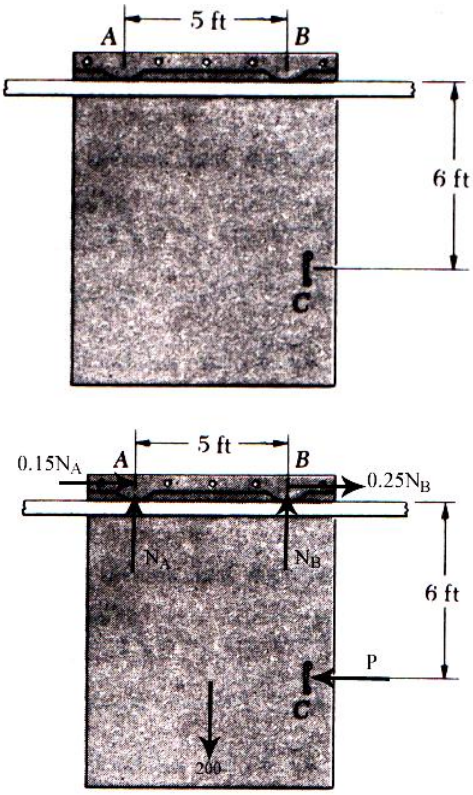
$$T = 10.08\ \ Kg$$

پس در $T = 10.08$ می لغزد، یعنی

$$T = 10.08 \times 9.81$$

$T = 98.9\ \ N$ می لغزد، یعنی

8-14 دربی به وزن 200lb روی شیارهای افقـی شـکل کشـیده میشود. ضریب اصطکاک استاتیکی بین شیار و درب در نقطه A و Bبترتیب برابر 0.15و0.25 می باشد.معین کنید نیروهای افقـی که باید بر دسته وارد کرد که درب به طرف چپ حرکت نماید .



$\mu_A = 0.15 \qquad \mu_B = 0.25$

$w = 200 \quad 1b$

$\sum M_B = 0 \quad \curvearrowleft^+$

$6\ P - 200\ (5/2) + NA\ (5) = 0$

$\sum Fy = 0$

$NA + NB = 200$

$\sum Fx = 0$

$0.15\ NA + 0.25\ NB = P$

$0.25\ (200 - N_A) + 0.15 N_A = P$

$50 - 0.25\ N_A + 0.15\ N_A = P$

$50 - 0.1\ N_A = P$

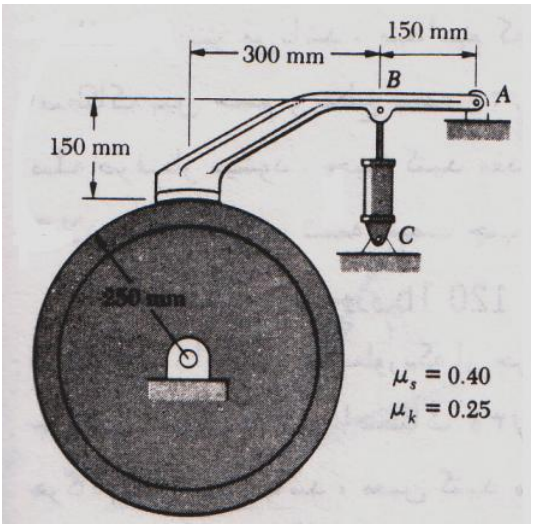
$6P - 500 + 5\ (\frac{50 - P}{0.1}) = 0$

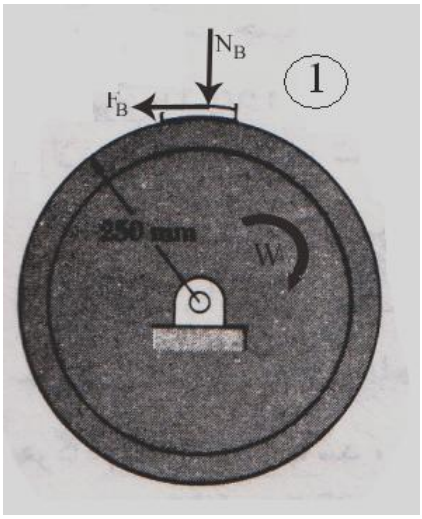
$6P - 500 + 2500 - 50P = 0$

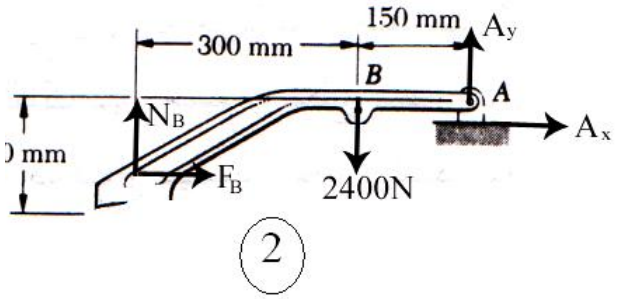
$44P = 2000$

$P = 45.45 \quad 1b \leftarrow$

8-16 استوانه هیدرولیکی بر نقطه B نیروی ۲۴۰۰ N بطرف پایین وارد می‌کند، معین کنید گشتاور نیروی اصطکاک حول محور استوانه وقتی استوانه در حال چرخش است (a) در جهت حرکت عقربه ساعت (b) در خلاف جهت حرکت عقربه ساعت.







$\mu_K = 0.25 \qquad \mu_S = 0.4$

۱ـموافق عقربه ساعت

$From \Rightarrow 2\ \sum M_A = 0 \quad \curvearrowleft^+$

$M_B\ (0.45) - F_B\ (0.15) - 2400\ (0.15) = 0$

چون دیسک حرکت می کند پس

$F_B = \mu N_B = 0.25\ \ N_B$

$N_B\ (0.45) - 0.25\ (0.15)\ (0.15)\ (N_B) = 360$

$0.45\ N_B - 0.0375\ N_B = 360$

$0.4125\ N_B = 360$

$N_B = 872.7\ N$

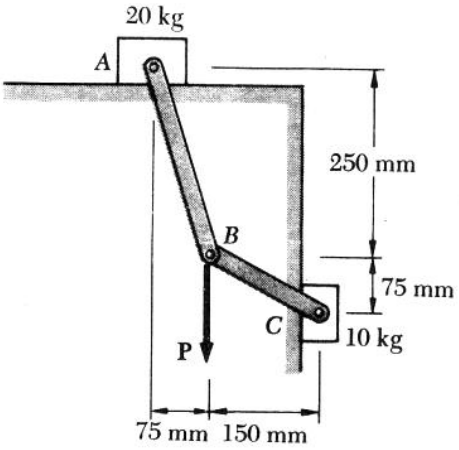
$F_B = 218.18\ N$

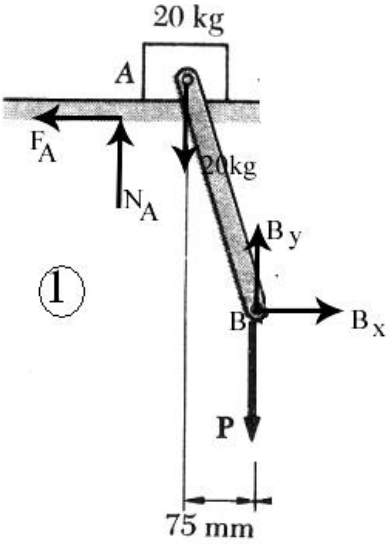
$From \Rightarrow 1\ \sum M_O = 0 \quad \curvearrowleft^+$

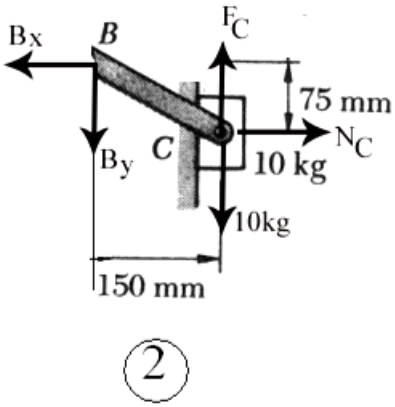
$w = 0.25 F_B = 0.25\ (218.18)$

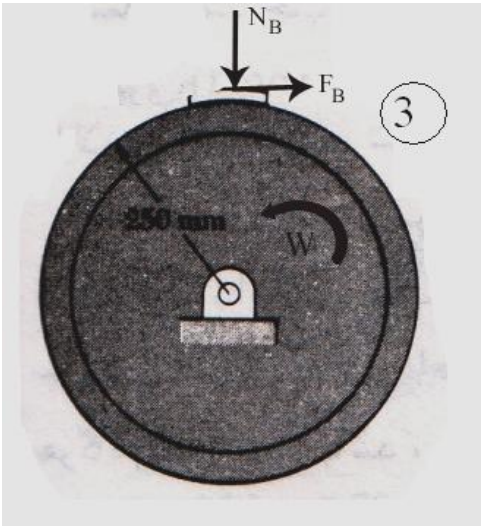
$w = 54.5\ N - m \curvearrowleft$

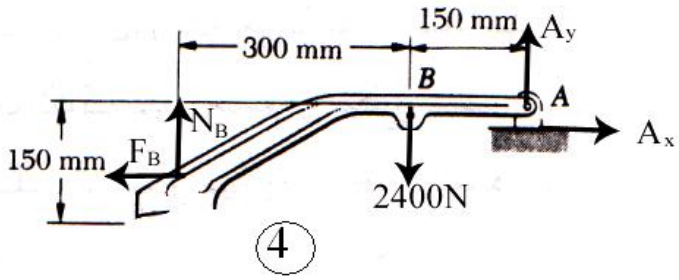
8-22 در مسئله ۲۱-۸ معین کنید مقدار حداقل نیـروی P کـه باید در نقطه B وارد نمود تا اینکه دو وزنه حرکت نکنند.











۲- خلاف عقربه ساعت ،از شکل ۴

$$\sum M_B = 0$$

$$N_B(0.45) + F_B(0.15) - 2400\ (0.15) = 0$$

$$F_B = 0.25\ NB$$

$$0.45\ N_B + 0.0375\ N_B = 360$$

$$0.4875\ N_B = 360$$

$$N_B = 378.46\ N$$

$$F_B = 184.6\ N$$

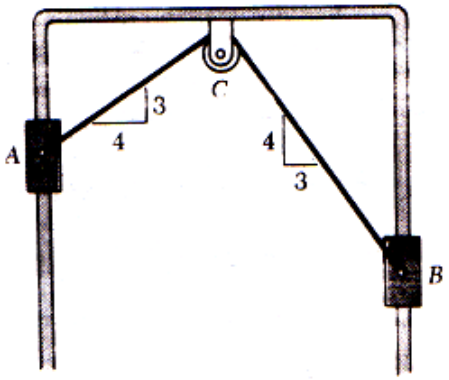
$$\sum M_O = 0 \quad From \Rightarrow 3$$

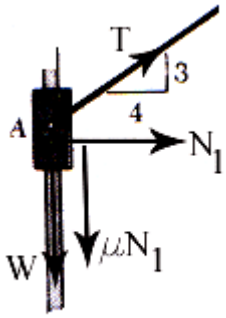
$$F_B\ (0.25) - W = 0$$

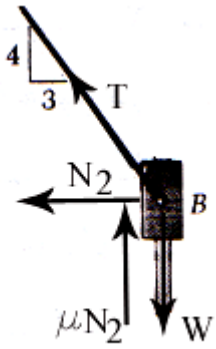
$$(184.6)(0.25) - W = 0$$

$$w = 46.2\ \ M - m\hookleftarrow$$

8-23 دو مهره هر یک بـه وزن W بواسـطه طنـابی کـه از روی قرقره بدون اصطکاک (C) عبور می‌کند متصل می‌باشـند. معـین کنید حداقل مقدار μ بین مهره‌ها و میله‌هـای عمـودی را بـرای اینکه دستگاه در موقعیت شکل در حال تعادل باقی بماند.







فرض ۱) A ثابت C حرکت

۲) // A حرکت C ثابت

۳) // A حرکت C حرکت

فرض اوّل $F_A \le \mu_A N_A$

$u = 0.25$

$(1) \Longrightarrow \sum M_B = 0 \ \curvearrowleft^+$

$$-20\ (0.075) + N_A(0.075) - F_A(0.25) = 0$$
$$-1.5 + 0.075\ N_A - 0.25\ F_A = 0$$
$$F_A = Bx$$
$$N_A - 20 - P + By = 0$$

$$2 \Rightarrow \sum M_B = 0 \ \curvearrowleft^+$$
$$10\ (0.15) - F_C(0.15) - N_C(0.075) = 0$$

چون C حرکت می کند پس $F_C = 0.25\ N_C$

$$1.5 = 0.075\ N_C + 0.25\ (0.15)\ N_C$$
$$N_C = 13.33\ kg$$
$$-By - 10 + FC = 0$$
$$By = 0.25\ N_C - 10 = 0.25\ (13.33) - 10$$
$$By = -6.67\ kg$$
$$Bx = NC = 13.33\ kg$$

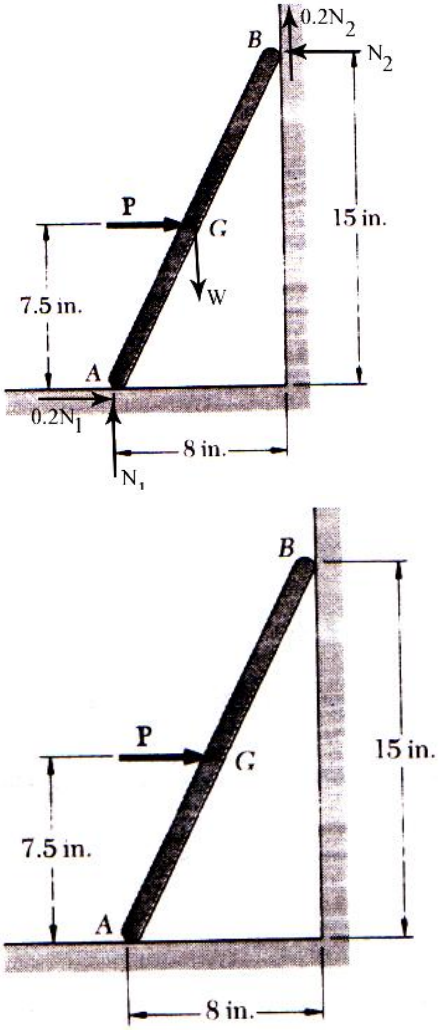
در شکل 1 $Bx = F_A = 13.33$

$$-1.5 + 0.075\ N_A - 0.25\ (13.33) = 0$$
$$N_A = 64.4kg$$
$$N_A\mu_A = 64.4 \times 0.25 = 16.1$$
$$F_A = 13.33 < N_A\mu_A$$

$F_A = 13.33 < 16.1$ پس فرض درست است

$$From\ 1 \Rightarrow \sum Fy = 0 \ \rightarrow 64.4 - 20 - P - 6.67 = 0$$
$$P = 37.73\ kg$$
$$P = 37.73 \times 9.81$$
$$P = 370\ N$$

8-24 دو مهره هر یک بـه وزن W بواسـطه طنـابی کـه از روی قرقره بدون اصطکاک (C) عبور می‌کند متصل می‌باشـند. معـین کنید حداقل مقدار μ بین مهره‌ها و میله‌هـای عمـودی را بـرای اینکه دستگاه در موقعیت شکل در حال تعادل باقی بماند.



P حداقل باشد که به پائین نه لغزد

$$\sum M_G = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$-0.2\ N_1(7.5) + N_1(4)$$

$$-N_2(7.5) - 0.2N_2(4) = 0$$

$$\sum Fy = 0$$

$$N_1 + 0.2N_2 - W = 0$$

$$2.5N_1 = 8.3N_2$$

فرض اوّل : A بطرف بالا
B بطرف پائین

$$N_1 = -\tfrac{4}{5}T \qquad N_2 = -\tfrac{3}{5}\ T$$

$$(A) \quad \sum Fy = 0$$

$$-\mu N_1 - W + T\ (\tfrac{3}{5}) = 0$$

$$(B) \quad \mu N_2 + T\ (\tfrac{4}{5}) - W = 0$$

$\mu N_2 - W - N_1 = 0$ جای گزین کردن

$$-\mu N_1 - W - N_2 = 0$$

$$W = -\mu N_1 - N_2$$

$$W = \mu N_2 - N_1$$

$$\mu N_2 - N_1 = -\mu N_1 - N_2$$

$$\mu(N_1 + N_2) = N_1 - N_2$$

$$\mu = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

$$\mu = \frac{-\tfrac{4}{5} + \tfrac{3}{5}T}{(-\tfrac{4}{5}T - \tfrac{3}{5}T)} = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{7}{5}}$$

$$\mu = \frac{1}{7}$$

$N_1 = 3.32\ N_2$

$w = N_1 + 0.2N_2$

$w = 0.2N_2 + 3.3N_2 \qquad w = 3.52\ N_2$

$N_2 = 0.284\ w$

$N_1 = 0.943\ w$

$\sum Fx = 0$

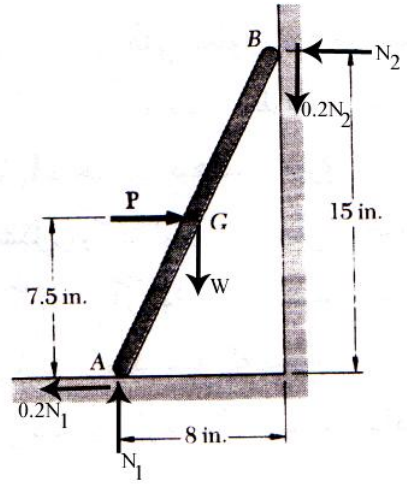
$p + 0.2N_1 - N_2 = 0$

$P = N_2 - 0.2N_1 = 0.284\ w - 0.2(0.943\ w)$

$p = 0.284\ w - 0.188\ w$

$p = 0.096\ w$

8-25 در مسئله ۲۴-۸ معین کنید حداکثر نیروی P را برای اینکه میله در وضع تعادل قرار بگیرد.



حداکثرP برای اینکه میله به حلت تعادل قرار گیرد.

$\sum M_G = 0 \ \curvearrowleft^{+}$

$0.2N_1\ (7.5) + 4(N_1) - N_2\ (7.5) + 0.2\ N_2(4) = 0$

$\sum Fy = 0$

$N_1 - 0.2N_2 - W = 0$

$1.5N_1 + 4N_1 - 7.5N_2 + 0.8N_2 = 0$

$5.5N_1 = 6.7N_2$

$N_1 = 1.22\ N_2$

$W = N_1 - 0.2\ N_2$

$W = 1.22N_2 - 0.2N_2 = 1.02N_2$

$N_2 = 0.98\ W$

$N_2 = 1.196\ W$

$\sum Fx = 0$

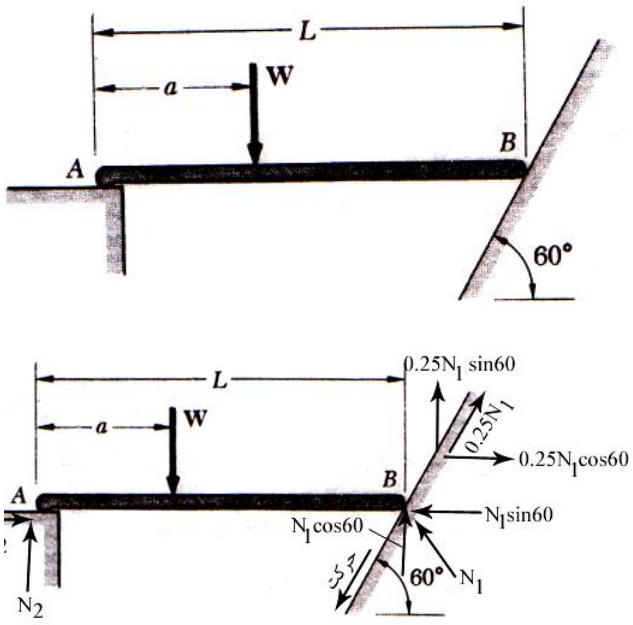
$p - 0.2N_1 - N_2 = 0$

$P = 0.2\ N_1 + N_2$

$P = 0.2\ (1.196) + 0.98\ W$

$P = 1.22\ W$

8-26میله AB روی دو نقطه A و B در حال سکون مطابق شکل قرار گرفته. ضریب اصطکاک در نقاط تماس 0.25 است. معین کنید حداکثر فاصله a را که بتواند وزنه w را تحمل کند. از وزن میله صرفنظر می‌شود.



$\sum Fy = 0$

$N_2 - W + 0.25\ N_1\ Sin60 + N_1\ Cos60 = 0$

$\sum Fx = 0$

$0.25N_2 + 0.25N_1\ Cos60 - N_1\ Sin60 = 0$

$\sum M_A = 0$

$(0.25N_1 + Sin60 + N_1\ Cos60\ (L) = w\ a$

$\sum Fx = 0 \qquad 0.25N_2 + 0.125N_1 - 0.866N_2 = 0$

$$0.25N_2 = 0.741\ N_1$$

$$N_2 = 2.964\,N_1$$

$$\sum Fy = 0$$

$$W = 2.964N_1 + 0.25N_1\ Sin60 + N_1\ Cos60$$

$$W = 2.964\,N_1 + 0.2165\,N_1 + 0.5N_1$$

$$W = 3.68\,N_1$$

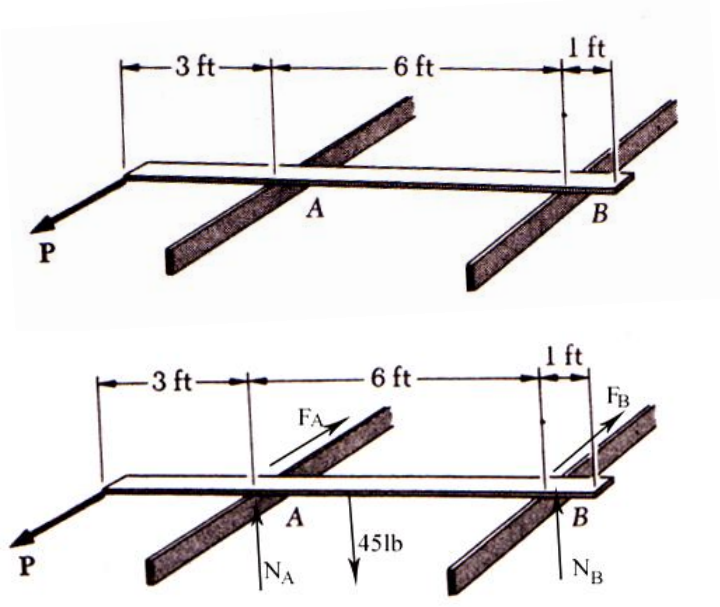
$$W = 3.68\ (\frac{N_2}{2.964}) = 1.24N_2$$

$$L\ (0.25\ \frac{W}{3.68}\ (0.866) + \frac{W}{3.68}\ (0.5) = W\,a$$

$$L\ (0.059 + 0.136) = a$$

$$a = 0.195\ \ l$$

8-32 الواری یکنواخت بطول ft ۱۰ و به وزن lb ۴۵ روی دو تیر آهن مطابق شکل قرار دارد. ضریب اصطکاک نقاط تماس 0.4 می‌باشد. (a) معین کنید مقدار نیروی افقی P لازم برای حرکت دادن الوار را (b) قسمت (a) را بفرض اینکه میخی برای جلوگیری از حرکت در نقطه A قرار بدهند حل کنید.



$$w = 45\ \ kg \qquad L = 10\ \ ft$$

فرض اوّل: B ثابت A حرکت

// دوّم A ثابت B حرکت

// سوّم A حرکت B حرکت

$$\mu = 0.4$$

فرض اوّل:

$$F_B < \mu_B N_B$$

$$\sum M_B = 0 \ \ \curvearrowleft^{+}$$

$$9(p)\,j - F_A\ (6)\,j + N_A(6)\ (-k)\ + N_A(6)(-k) + 45\ (4)\ (k) = 0$$

$$j: \quad 9p = 6\ \ F_A$$

$$k: \quad 45\ (4) = 6\ \ N_A$$

$$N_A = 30 \quad 1b$$

چون حرکت می کند $F_A = 0.4\ (30) = 12 \quad 1b$

$$9\,p = 6\ (12)$$

$$p = 8 \quad 1b$$

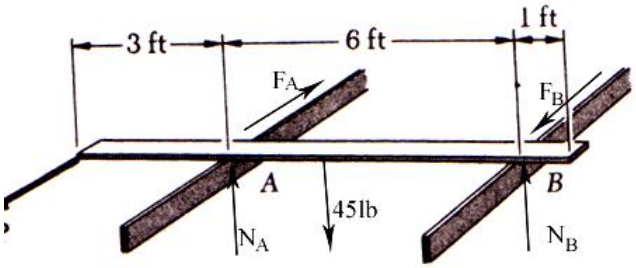
$$\sum Fz = 0$$

$$p = F_A + F_B$$

$$8 = 12 + F_B$$

$F_B = -4$ منفی نشان می دهد که حرکت جهت مخالف است ، پس

F.B.D



$$\sum FZ = 0$$

$$p + F_B = F_A$$

$$8 + F_B = 12 \qquad F_B = 4 \quad 1b$$

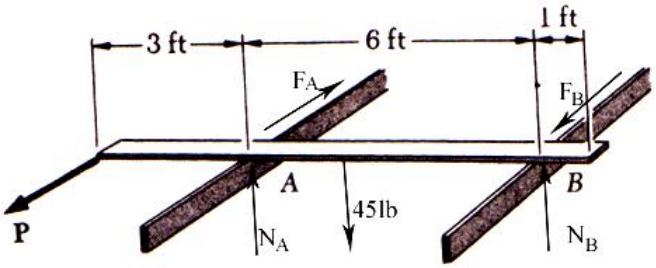
$$F_B = 4 \ < \ \mu_B N_B$$

$M_A + N_B = 45 \qquad N_B = 15$

$F_B = \ 4 < 15 \times 0.4 = 6$

پس فرض اول درست است. $P = 8\ 1b$

در حالت دوم، در نقطه A میخ است پس F, B, D



$F_B = 0.4\ N_B$

$FA < \mu_A N_A$

$\sum M_A = 0 \ \curvearrowleft^+$

$(p)\ (3) j + 45\ (2)\ (-k) + 6N_B\ (K) + F_B\ (6)\ (-j) = 0$

$j: \qquad 3p = 6\ F_B \qquad N_B = 15 \quad 1b$

$k: \qquad 90 = 6\ M_B \qquad F_B = 0.4 \quad (15)$

$F_B = 6 \quad 1b$

$3p = 6\ (6)$

$P = 12\ 1b$

$N_A + N_B = 45$

$N_A = 30$

$\sum Fz = 0$

$P + F_B = F_A$

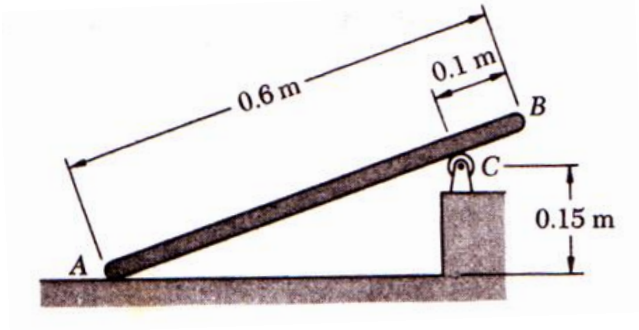
$12 + 6 = F_A \qquad F_A = 18 \ \ lb$

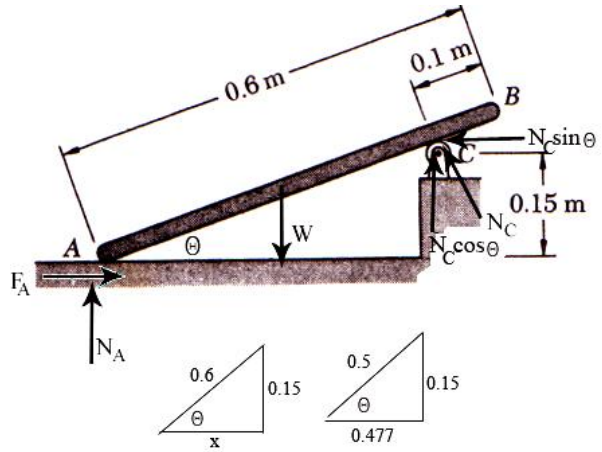
$F'A = \mu_A N_A = 0.4\ (30) = 12$

$F'_A < F_A$ است.

$p = 12\ 1b$

8-34 میله نازک و یکنواخت AB از یک طرف روی سطح افقی در نقطه A و از طرف دیگر روی چرخ کوچک C قرار دارد. چرخ بطور آزاد دوران می‌کند. معین کنید حداقل ضریب اصطکاک بین میله و سطح زمین را برای اینکه میله در وضعی مطابق شکل قرار گیرد.





$\mu_A = 0$

$\frac{x}{0.6} = Cos\theta$

$\frac{0.477}{0.5} = Cos\theta$

$x = 0.5724$

$N_A - W + N_C\ Cos\theta = 0$

$\sum M_A = 0 \ \curvearrowleft^+$

$-N_C\ (0.5) + w\ (\frac{0.5724}{2}) = 0$

$N_A - W + 0.5724\ W\ Cos\theta = 0$

$N_A - W + 0.5724\ W\ (\frac{0.477}{0.5}) = 0$

$N_A = 0.454\ W$

$$\sum Fx = 0$$

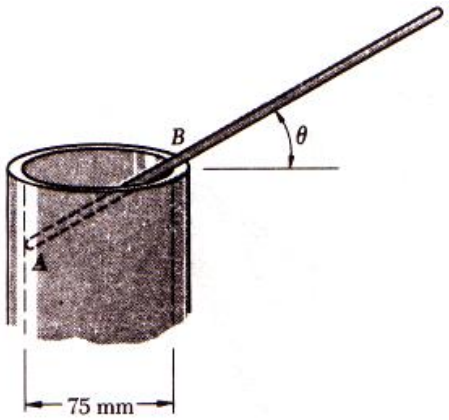
$$F_A = N_C \sin\theta = 0.572Wx\frac{0.15}{0.5}$$

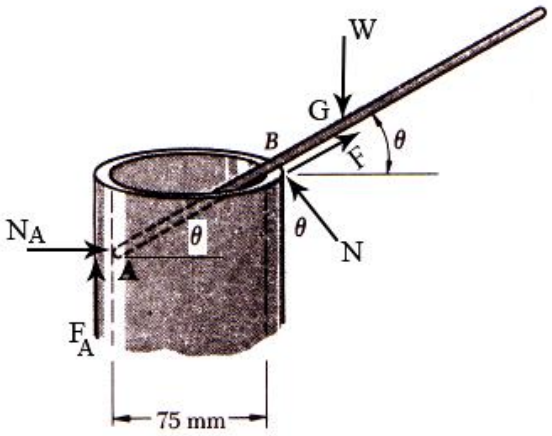
$$F_A = 0.1717\ W$$

$$\mu_A = \frac{F_A}{N_A} = \frac{0.1717\ W}{0.454\ W}$$

$$\mu_A = 0.378$$

8-44 میله نازک فـولادی بطـول ۵۰۰ mm در داخـل لولـه‌ای مطابق شکل قرار داده شده. ضریب اصطکاک استاتیکی بین میلـه و لوله 0.25 می‌باشد. معین کنید حـداکثر زاویـه θ را بـرای اینکه میله در داخل لوله نیفتد.





$$\mu = 0.2 \qquad AC = 0.5\ ^m$$

فرض گرفته می شود که

میله در داخل لوله نه لغزد

$$Cos\theta = \frac{0.075}{AB}$$

$$\sum M_A = 0 \ \curvearrowleft^+$$

$$W(\frac{0.5}{2})\ Cos\theta - N_B(AB) = 0$$

$$W(\frac{0.5}{2})\ Cos\theta - N_B(\frac{0.075}{Cos\theta}) = 0$$

$$N_B = 3.33WCos^2\theta$$

$$\sum Fy = 0$$

$$F_A - W + N_B\ Cos\theta + F_B\ (Sin\theta) = 0$$

$$F_A = 0.2N_A$$

$$F_B = 0.2N_B$$

$$N_A - N_B\ Sin\theta + F_B\ Cos\theta = 0$$

$$\begin{cases} 0.2N_A - W + N_B\ Cos\theta + 0.2N_B\ Sin\theta = 0 \\ N_A = N_B\ Sin\theta - F_B\ Cos\theta \\ N_A = N_B\ Sin\theta - 0.2N_B\ Cos\theta \end{cases}$$

$$0.2\ \left[3.33w\ Cos^2\theta\ Sin\theta - 0.2\ (3.33)\ (w)\ Cos^3\theta\right]$$

$$-W + 3.33\ w\ Cos^3\theta\ + 0.2\ (3.33)\ (w)\ Cos^2\theta\ Sin\theta =$$

$$0.666\ w\ Cos^2\theta\ Sin\theta - 0.1332w\ Cos^3\theta - w$$

$$+3.33\ w\ Cos^3\theta + 0.666\ w\ Cos^2\theta\ Sin\theta = 0$$

$$1.332\ Cos^2\theta\ Sin\theta - 1 + 3.197\ Cos^3\theta = 0$$

$$1.332\ (1 - Sin^2\theta)\ Sin\theta - 1 + 3.197\ Cos^3\theta = 0$$

$$1.332\ Sin\theta - 1.332\ Sin^3\theta - 1 + 3.197\ Cos^3\theta = 0$$

$$3.197\ Cos^3\theta - 1.332\ Sin^3\theta + 1.332\ Sin\theta = 1$$

برای حل معادله از روش سعی و خطاء استفاده می شود

$$\begin{cases}\theta = 40 \\ 1.437 - 0.354 + 0.856 = 1 \quad 1.293 \approx 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\theta = 50 \\ 0.85 - 0.598 + 1.02 = 1 \quad 1.27 \approx 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\theta = 60 \\ 0.4 - 0.865 + 1.15 \cong 1\end{cases} \quad 0.685 \approx 1$$

$$\begin{cases}\theta = 55 \\ 0.6 - 0.732 + 1.091 = 1\end{cases} \quad 0.959 \approx 1$$

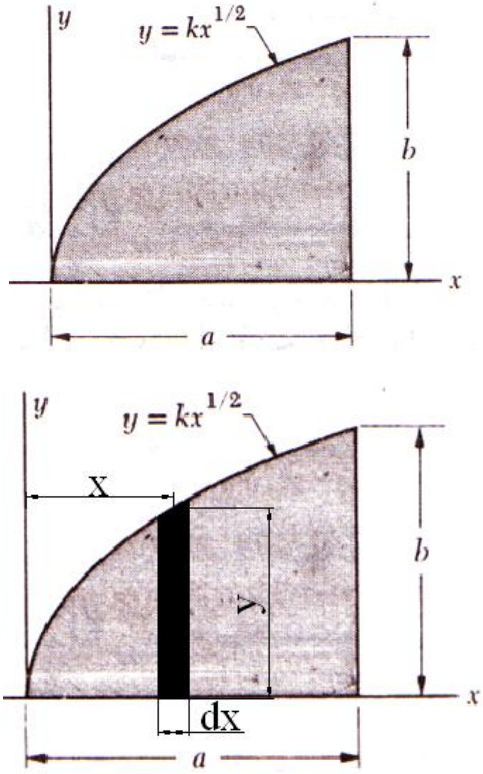
$$\begin{cases}\theta = 54 \\ 0.65 - 0.705 + 1.077 = 1\end{cases} \quad 1.022 \approx 1$$

$$\begin{cases}\theta = 54.5 \\ 0.626 - 0.713 + 1.076 = 1\end{cases} \quad 0.998 \approx 1$$

فصل ۹

گشت آور لختی ،حاصل ضرب لختی

9-2 بروش مستقیم انتگرال‌گیری گشت‌آور اینرسی سطوح هاشور زده را نسبت به محور y بدست آورید.



$Iy = ?$

$Iy = \int x^2 \; d\; A$

$d\; A = y\; dx$

$Iy = \int x^2 (y)\; dx \qquad b = k\; a^{\frac{1}{2}}$

$K = b/a^{1/2}$

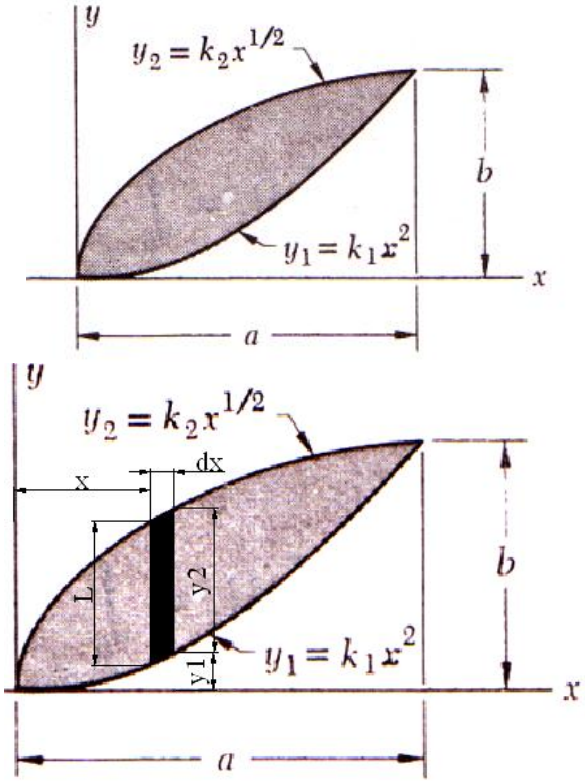
$Iy = \int_0^a \; x^2 (K)\; x^{\frac{1}{2}} dx = K \int_0^a \; x^{\frac{5}{2}}\; dx$

$Iy = K \left[\frac{x^{3.5}}{3.5} \right]_0^a = \frac{K}{3.5}\; a^{3.5}$

$Iy = \frac{1}{3.5} \frac{b}{a^{1/2}}\; a^{3.5} = \frac{b}{3.5}\; a^3$

$Iy = \frac{2b}{7}\; a^3$

9-4 بروش مستقیم انتگرال‌گیری گشت‌آور اینرسی سطوح هاشور زده را نسبت به محور y بدست آورید.



$y_1 = K_1\; x^2$

$y_2 = k_2 x^{\frac{1}{2}}$

$dA = L\; dx$

$dA = (y_2 - y_1)\; dx$

$b = k_1 a^2 \qquad b = K_2 a^{\frac{1}{2}}$

$Iy = \int x^2 dA = \int_0^a (K_2 x^{\frac{1}{2}} - K_1 x^2)\; x^2\; dx$

$Iy = \int_0^a (K_2 x^{\frac{5}{2}} - K_1 x^4)\; dx$

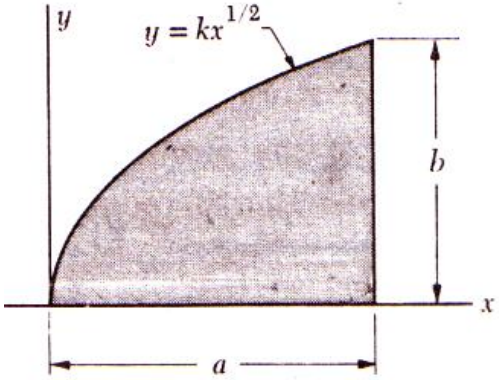
$Iy = \frac{2k_2}{7}\; a^{\frac{7}{2}} - \frac{K_1}{5}\; a^5$

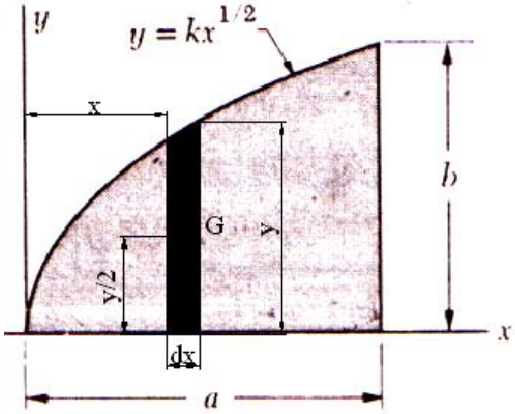
$Iy = \frac{2}{7}\; \left(\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}\right)\; a^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{5}\; \left(\frac{b}{a^2}\right)\; a^5$

$Iy = \frac{2b}{7}\; a^3 - \frac{b}{5}\; a^3$

$Iy = \frac{10b - 7b}{35}\; a^3 = \frac{3b}{35}\; a^3$

9-6 بروش مستقیم انتگرال‌گیری گشت‌آور اینرسی سطوح هاشور زده را نسبت به محور x بدست آورید.





$b = K\ a^{1/2}$

$d\ I_{Gx} = \frac{1}{12} y^3\ dx$

$d\ Ix = \frac{1}{3}\ y^3\ dx$

$Ix = \int_0^a \frac{1}{3}\ y^3\ dx = \frac{1}{3}\ \int_0^a K^3 X^{3/2}\ dx$

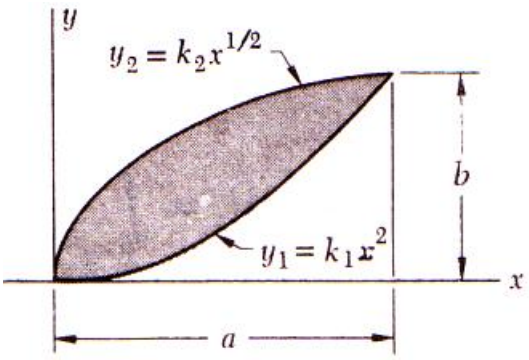
$Ix = \frac{K^3}{3}\ \left[\frac{2}{5}\ x^{5/2}\right]_0^a$

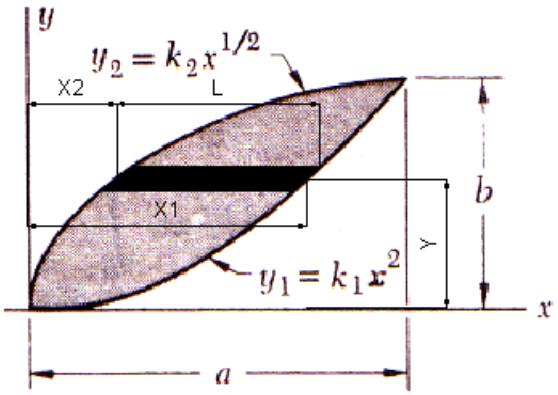
$Ix = \frac{K^3}{3} \times \frac{2}{5}\ a^{5/2}$

$Ix = \frac{2}{15}\ (\frac{b^3}{a^{3/2}}\ )\ a^{5/2}$

$Ix = \frac{2}{15}\ b^3\ a$

9-8 بروش مستقیم انتگرال‌گیری گشت‌آور اینرسی سطوح هاشور زده را نسبت به محور x بدست آورید.





$y = y_2 = K_2 x^{1/2}$

$y = y_1 = K_1\ x^2$

$K_2\ a^{1/2} = b$

$b = K_1\ a^2$

$d\ A = L\ dy$

$dA = (x_1 - x_2)\ dy$

$Ix = \int y^2\ dA = \int_0^b y^2\ (x_1 - x_2)\ dy$

$Ix = \int_0^a\ y^2 \left[\frac{y^{1/2}}{K_1^{1/2}} - \frac{y^2}{K_2^{\ 2}}\right] dy$

$Ix = \frac{1}{K_1^{1/2}}\ \int\ y^{5/2} dy - \frac{1}{K_2^{\ 2}}\ \int_0^b y^4\ dy$

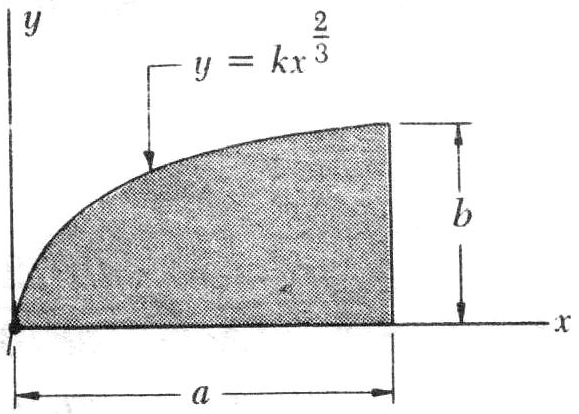
$Ix = \frac{1}{K_1^{1/2}}\ \left[\frac{2}{7} b^{7/2}\right] - \frac{1}{K_2^{\ 2}}\ \left[\frac{1}{5} b^5\right]$

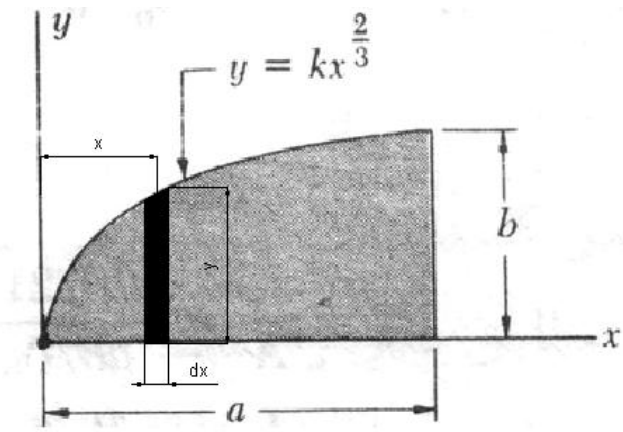
$$Ix = \frac{2}{7} \times \frac{b}{\frac{b^{1/2}}{a}} - \frac{b^5}{5} \times \frac{1}{b^2/a}$$

$$Ix = \frac{2}{7}\ a\ b^3 - \frac{1}{5}\ a\ b^3$$

$$I_x = \frac{(10-7)}{35}\ a\ b^3 = \frac{3}{35}\ a\ b^3$$

9-10 معین کنید گشت‌آور اینرسی و شعاع چرخش سطوح هاشورزده را نسبت به محور x.





$Ix\ ,\ Kb$

$$d\ Ix = \frac{1}{3} y^3\ dx$$

$$Ix = \frac{1}{3} \int_0^a y^3\ dx$$

$$Ix = \frac{1}{3} \int_0^a x^2\ dx = \frac{K^3}{3} \int_0^a x^2\ dx$$

$$Ix = \frac{K^3}{3} \left[\frac{1}{3} a^3\right] \qquad b = k a^{2/3}$$

$$Ix = \frac{1}{9} \left[\frac{b^3}{a^2}\right] (a^3) = \frac{1}{9}\ ab^3$$

$$dA = y\ dx \qquad A = \int_0^a Kx^{2/3}\ dx$$

$$A = K \left[\frac{3}{5} x^{5/3}\right]_0^a = \frac{3}{5}\ K\ a^{5/3}$$

$$A = \frac{3}{5}\ (\frac{b}{a^{2/3}})\ a^{5/3} = \frac{3}{5} b\ a$$

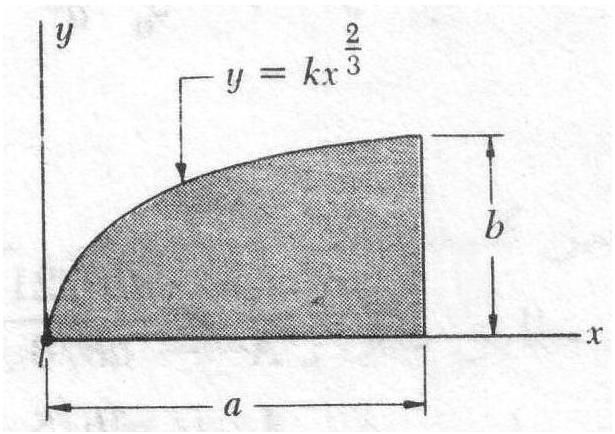
$$K^2 b\ \ A = I_X$$

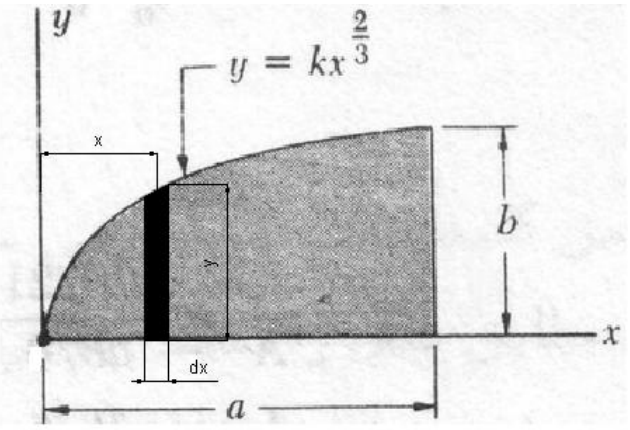
$$K^2 b = \frac{1}{9} ab^3 \times \frac{5}{3ba} = \frac{5}{27}\ b^2$$

$$K_b = b\ \sqrt{5/27}$$

$$K_b = 0.43\ b$$

9-12 معین کنید گشت‌آور اینرسی و شعاع چرخش سطوح هاشور زده را نسبت به محور y.





$$d_A = y\ dx$$

$$Iy = \int x^2\ dA$$

$$Iy = \int_0^a x^2 y\ dx$$

$$Iy = \int_0^a x^2 (K) x^{2/3}\ dx$$

$$Iy = K \int_0^a x^{8/3}\ dx = K\ (\frac{3}{11} x^{11/3})^9$$

$$Iy = \frac{3b}{11}\ a^3$$

$$K^2 b\ A = Iy$$

از مسئله ۱۰-۹ داریم $A = \frac{3ab}{5}$

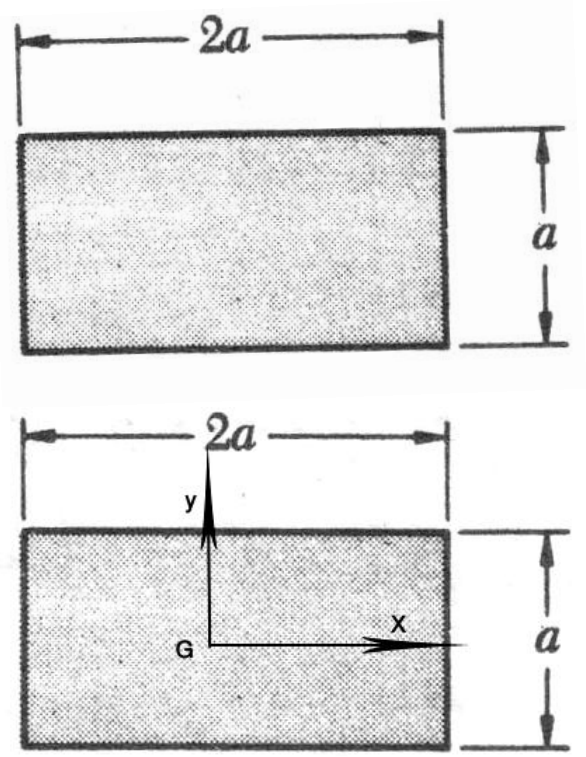
$$K^2 b = \frac{3\ ba^3}{11} \times \frac{5}{3ab}$$

$$K^2{}_b = \frac{5}{11}\ a^2$$

$$K_b = a\ \sqrt{5/11}$$

$$K_b = 0.67\ a$$

9-14 گشت آور اینرسی و شعاع چرخش را برای مستطیلی مطابق شکل نسبت به وسط ضلع بزرگترو وسط ضلع کوچکتر بدست آورید.



$$I_{Gx} = \frac{1}{12}\ b\ h^3$$

$$I_{Gx} = \frac{1}{12}\ (2a)\ (a)^3 = \frac{1}{6}\ a^4$$

$$I_{Gy} = \frac{1}{12}\ b\ h^3 = \frac{1}{12}\ (a)\ (2a)^3$$

$$I_{Gy} = \frac{2}{3}\ a^4$$

$$K_b{}^2 x\ \ A = I_{Gx}$$

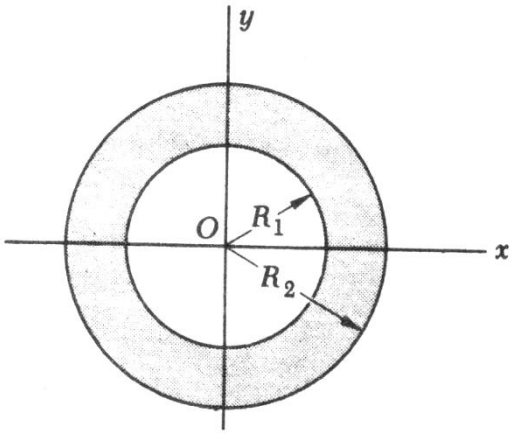
$$K_b{}^2 x = \frac{a^4}{6} \times \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{12}\ a^2$$

$$K_{bx} = a\ \sqrt{1/12}$$

$$K_b{}^2 y = I_G y / A = \frac{2a^4}{3} \times \frac{1}{2a^2}$$

$$K_{by} = a\ \sqrt{1/3}$$

9-16 نشان دهید که شعاع چرخش $K_\circ$ سطح هاشور زده در مختصات قطبی تقریباً برابر با شعاع متوسط $R_m = \frac{(R_1 + R_2)}{2}$ و برای ضخامت کوچکی برابر با $t = R_2 - R_1$ می‌باشد. (b) معین کنید محاسبه درصد خطای حاصله را با بکار بردن R_m بجای k_o برای مقادیر t / R_m بترتیب برابر با ۱، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{10}$.



$$J_o = \frac{1}{2}\pi\ R^4$$

$$J_o = J_2 - J_1$$

$$J_0 = \frac{1}{2}\pi\ (R_2{}^4 - R_1{}^4)$$

$$J_o = K_o{}^2\ A$$

$$\frac{1}{2}\ \pi\ (R_2{}^2 - R_1{}^4) = K_o{}^2 \pi\ (R_2{}^2 - R_1{}^2)$$

$$K_o{}^2 = \frac{1}{2}\ (R_2{}^2 + R_1{}^2)$$

$$t = R_2 - R_1 \qquad R_m = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$\frac{t}{R_m} = \frac{2\ (R_2 - R_1)}{R_1 + R_2}$$

(a) $\quad t/R_m = 1$

$$\frac{2\ (R_2 - R_1)}{R_1 + R_2} = 1$$

$$2R_2 - 2R_1 = R_1 + R_2$$

$$R_2 = 3R_1$$

$$K_o{}^2 = \frac{1}{2}\ (9R_1{}^2 + R_1{}^2) = \frac{10}{9} R_1{}^2 = 5R_1{}^2$$

$$K_o = R_1\ \sqrt{5}$$

$$R_m = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{4R_1}{2} = 2R_1$$

$$\%E = \frac{K_o - R_m}{K_o} \times 100$$

$$\%E = \frac{R_1\sqrt{5} - 2R_1}{R_1\sqrt{5}} \times 100 = 10.55\%$$

$$t/Rm = 1/2 \qquad 4R_2 - 4R_1 = R_1 + R_2$$

$$R_2 = \frac{5}{3} R_1$$

$$k_0{}^2 = \frac{1}{2}\ (\frac{25}{9} R_1{}^2 + R_1{}^2) = \frac{1}{2}\ (\frac{34}{9})\ R_1{}^2$$

$$K_0 = 1.374\ R_1$$

$$R_m = \frac{1}{2}\ (R_1 + R_2) = \frac{8}{6}\ R_1 = 1.333\ R_1$$

$$\%E = \frac{1.374 - 1.333}{1.374} \times 100 = 2.99\%$$

C) $\quad t/Rm = \frac{1}{10} \qquad 20R_2 - 20R_1 = R_1 + R_2$

$$19R_2 = 21R_1$$

$$R_2 = 1.1053\ R_1$$

$$k_0{}^2 = \frac{1}{2}\ (R_1{}^2 + 1.221\ R_1{}^2)$$

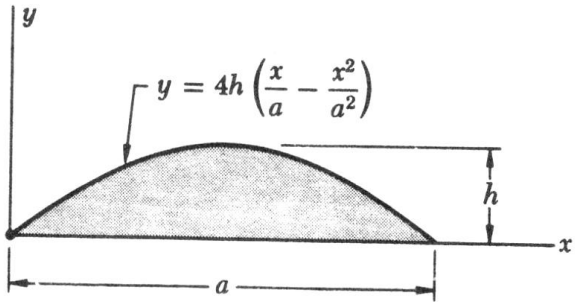
$$R_m = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) = \frac{1}{2}\ (R_1 + 1.1053\ R_1)$$

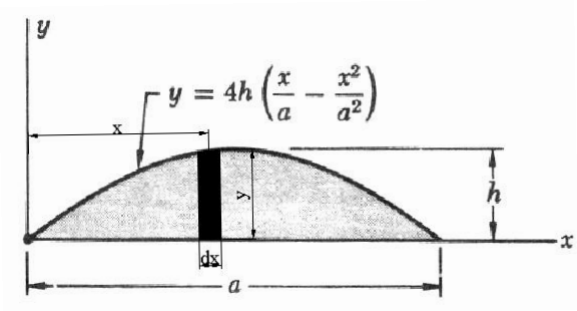
$$R_m = 1.05265\ R_1$$

$$\%E = \frac{1.054 - 1.05265}{1.054} \times 100$$

$$\%E = 0.125\%$$

9-18 معین کنید گشتآور اینرسی سطح هاشور زده را نسبت به محور x, y





$$dIx = \frac{1}{3} y^3 \, dx$$

$$Ix = \int_0^a \frac{1}{3} (64) (h^3) \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{x^6}{a^6} - \frac{3x^4}{a^4} + \frac{3x^5}{a^5} \right] dx$$

$$Ix = \frac{64}{3} h^3 \left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{7}a - \frac{3}{5} + \frac{3}{6}a \right]$$

$$Ix = \frac{64 \, h^3}{3} \left(\frac{35 - 20 - 84 + 70}{140}\right) a$$

$$Ix = \frac{64}{140 \times 3} a \, h^3 = 0.152 \, ah^3$$

$$Iy = \int x 2dA = \int_0^a x^2 y \, dx$$

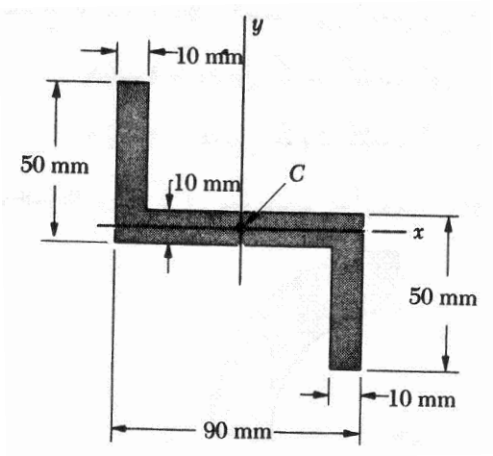
$$Iy = 4h \int_0^a \left({}^{x^3}\!/_{a} - {}^{x^4}\!/_{a2} \right) dx$$

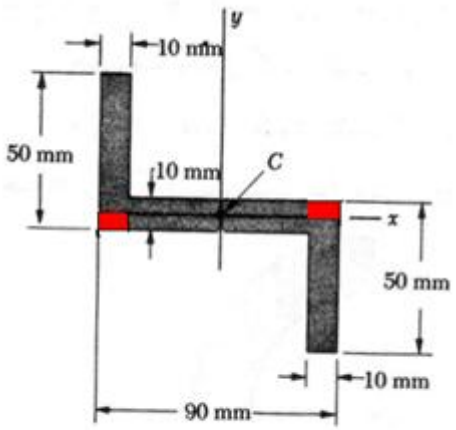
$$Iy = 4h \left[\frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{5}a^3 \right]$$

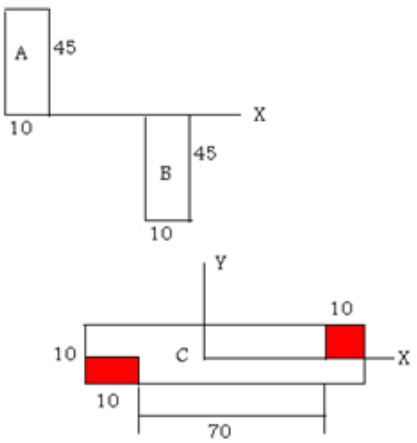
$$Iy = 4h \left(\frac{1a^3}{20} \right]$$

$$Iy = \frac{h \, a^3}{5}$$

9-20 معین کنید گشتآور اینرسی و شعاع چرخش سطح هاشور زده را نسبت به محور x.







$$I_{Ax} = \frac{1}{3}\ b\ h^3 = \frac{1}{3}\ (10)\ (45)^3 = 303750 \quad mm^4$$

$$I_{Bx} = \frac{1}{3}\ b\ h^3 = \frac{1}{3}\ (10)\ (45)^3 = 303750 \quad //$$

$$I_{CX} = \frac{1}{12}\ bh^3 + 2\ (\frac{1}{3}bh^3)$$

$$I_{CX} = \frac{1}{12}\ (70)(10)^3 + \frac{2}{3}(10)\ (5)^3$$

$$I_{CX} = 5833.33 + 833.33 = 6666.66 \quad mm^4$$

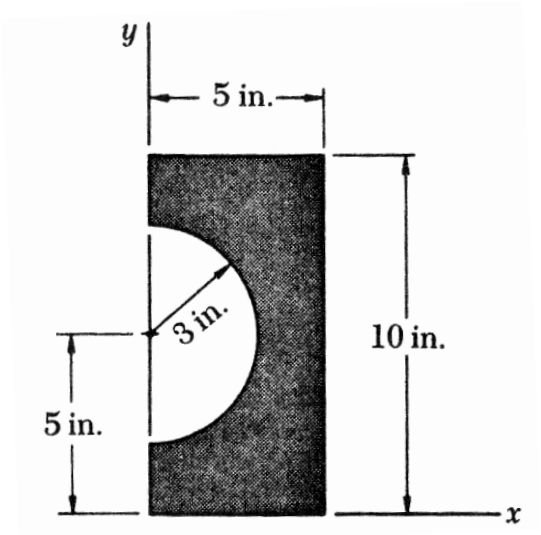
$$I_X = I_{CX} + I_{BX} + I_{AX} = 614166 \quad mm^4$$

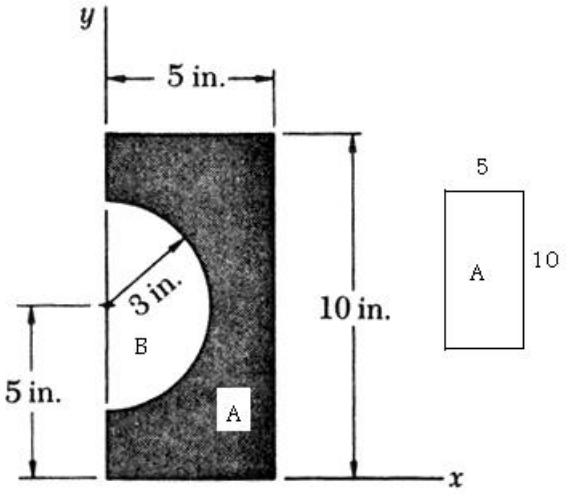
$$A = (50)\ (10)\ (2) + 70 \times 10 = 1700 \quad mm^2$$

$$Kb^2 = \frac{Ix}{A} = \frac{614166}{1700} = 361.21$$

$$Kb = 19^{\ mm}$$

9-22 معین کنید گشت‌آور اینرسی و شعاع چرخش سطح هاشور زده را نسبت به محور x.





$$I_x = I_{Ax} - I_{Bx}$$

$$I_{Ax} = \frac{1}{3}\ (5)\ (10)^3 = 1666.66\ 1n^4$$

نیم دایره $I_{cx} = \frac{1}{8}\pi\ r^4$

$$I_x = I_{Gx} + Ad^2$$

$$I_x = \frac{1}{8}\ (\pi)\ (3)^4 + \frac{\pi(9)}{2}\ (5)^2$$

$$I_{CX} = 31.81 + 353.42$$

$$I_{CX} = 385.22$$

$$I_x = 1666.66 - 385.232 = 1281.4 \quad 1n^4$$

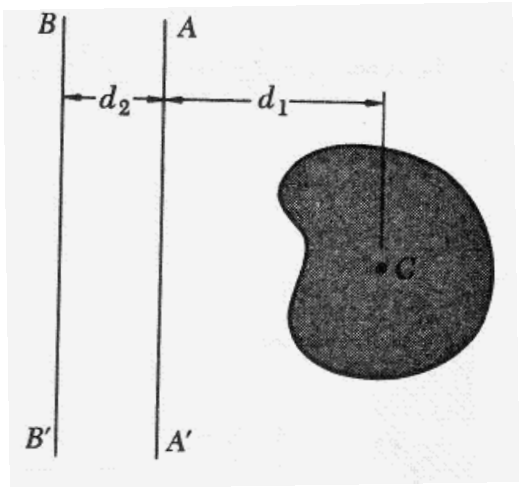
$$A = 50 - \pi\ (\tfrac{9}{2}) = 50 - 14.14 = 35.86 \quad 1n^2$$

$$Kb^2\ A = Ix$$

$$K^2 b = \frac{1281.4}{35.86}$$

$$K_b = 5.98\ in$$

9-24 معین کنید سطح هاشورزده و گشتآور اینرسی را نسبت به محور مرکز سطحی که موازی، AA می‌باشد. می‌دانیم که گشتآور اینرسی آن نسبت به محور 'AA و 'BB بترتیب برابر با $2000\ in^4$ و $4000\ in^4$ و $d_1 = 8in$ و $d_2 = 4in$ می‌باشد.



$I_{AA'} = 2000 \quad in^4$

$I_{BB'} = 4000 \quad in^4$

$d_1 = 8 \quad in \qquad d_2 = 4 \quad in$

$I_{AA'} = I_G + A\, d_1^{\,2}$

$I_{AA'} = I_G + A\ (8)^2$

$I_{BB'} = I_G + A\ (d_1 + d_2)^2$

$I_{AA'} - I_{BB'} = A\ (64 - 144)$

$A = \dfrac{+2000 - 4000}{64 - 144} = \dfrac{-2000}{-80}$

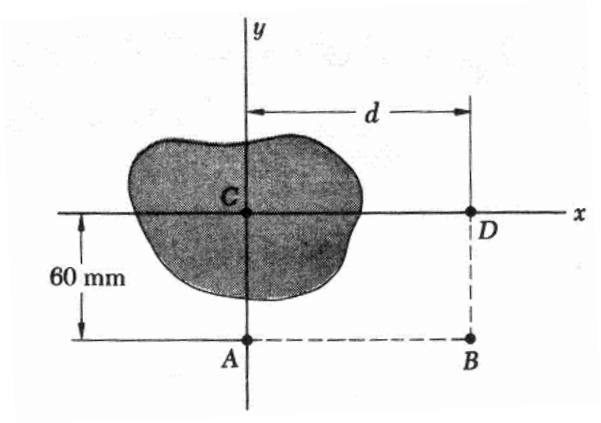
$A = 25\ in^2$

$2000 = I_G + (25)\ (8)^2$

$I_G = 2000 - 1600$

$I_G = 400\ in^4$

9-26 سطح هاشور زده برابر $5000mm^2$ می‌باشد. معین کنید گشتآورهای مرکزی اینرسی $\bar{I}_x$ و $\bar{I}_Y$ آن را. می‌دانیم که $2\bar{I}_x = \bar{I}_Y$ وگشتآور اینرسی قطبی سطح حول نقطه A برابر است با: $J_A = 22/5 \times 10^6\ mm^4$.



$A = 5000 \quad mm^2$

$I_G x, I_G y$

$2I_G x = I_G y$

$J_A = 22.5 \times 10^6 \quad mm^4$

$J_G = I_G x + I_G y$

$J_A = J_G + Ad^2$

$J_A = I_G x + I_G y + 5000\ (60)^2$

$I_G x + I_G y = 22.5 \times 16^6 - 18 \times 10^6$

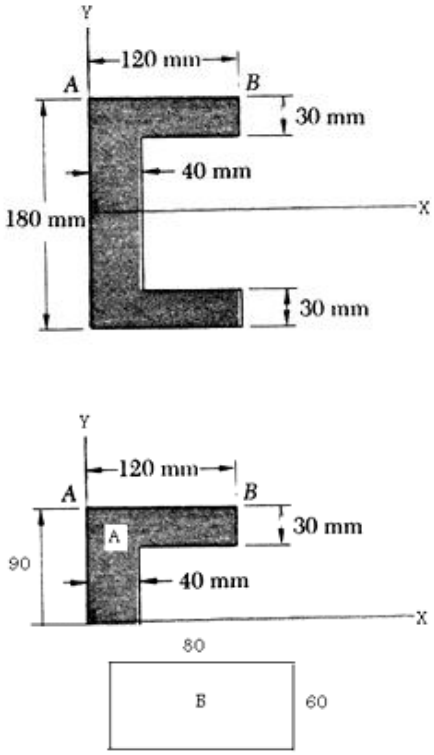
$I_G x + I_G y = 4.5 \times 10^6$

$3\ I_G x = 4.5 \times 10^6$

$I_G x = 1.5 \times 10^6 \quad mm^4$

$I_G y = 3 \times 10^6 \qquad //$

9-28 معین کنید گشت‌آور اینرسی سطح هاشور زده را در مختصات قطبی .



$$I_A x = \frac{1}{3}\ (120)\ (90)^3 = 29./610^{\,6}\ \ mm^4$$

$$I_B x = \frac{1}{3}\ (80)\ (90)^3 = 5.7610^{\,6}\ \ //$$

$$2Ix^{/} = I\ x$$

$$Ix = 2\ (29.16 - 5.76)\times 10^6$$

$$Ix = 46.8\times 10^6 \quad mm^4$$

$$I_A y = \frac{1}{3}\ (90)\ (120)^3 = 51.84\times 10^6 \quad mm^4$$

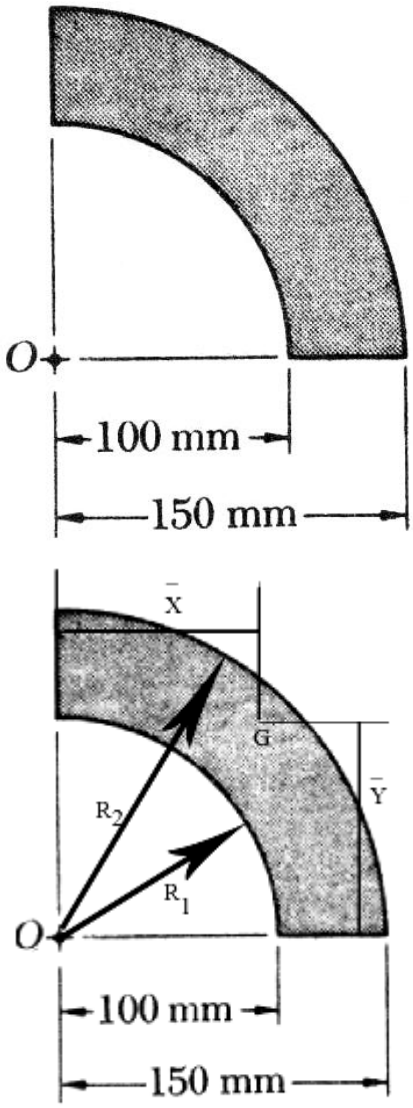
$$I_B y = \frac{1}{3}\ (60)\ (80)^3 = 10.24\times 10^6 \quad mm^4$$

$$Iy = 2\ (51.84 - 10.24)\times 10^6 = 83.2x10^6\ \ mm^4$$

$$J_o = Ix + Iy = 46.8\times 10^6 + 83.2\times 10^6$$

$$J_o = 130\times 10^6 \quad mm^4$$

9-30 معین کنید گشت‌آور اینرسی سطح نشان داده شده را در مختصات قطبی نسبت به (a) نقطه O و (b) مرکز سطحی آن.



$$J_o = \frac{1}{8}\ \pi\ r^4$$

$$J_o = \frac{1}{8}\pi\ (R_2{}^4 - R_1{}^4)$$

$$J_o = \pi/8\,(150^4 - 100^2)$$

$$J_o = 1.595\times 10^8\ \ mm^4$$

$$J_o = J_G + A\,d^2$$

$$d = \overline{OG}$$

$$A \Rightarrow \bar{x} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4x150}{3\pi} = 63.66\ mm$$

$$B \Rightarrow \bar{x} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{ax100}{3\pi} = 42.44\ mm$$

$$Area \Rightarrow A = \frac{\pi r^2}{4} = 17670.9\ \ mm^2$$

$$Area \Rightarrow B = \frac{\pi r^2}{4} = 7853.8\ \ mm^2$$

شکل	A_{rea}	X_1	AX_1
A	17670.9	63.66	1124929.5
B	-7853.8	42.44	-333315.3
مجموع	9817.1		791614.2

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{791614.2}{9817.1} = 80.64$$

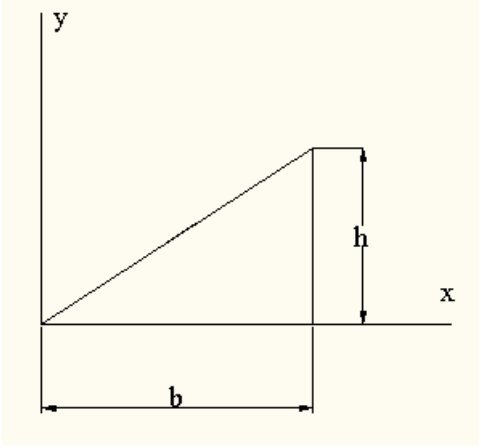
$$d = \sqrt{(\bar{x}\ )^2 + (\ \bar{y}\ )^2} = 80.64\ \sqrt{2}$$

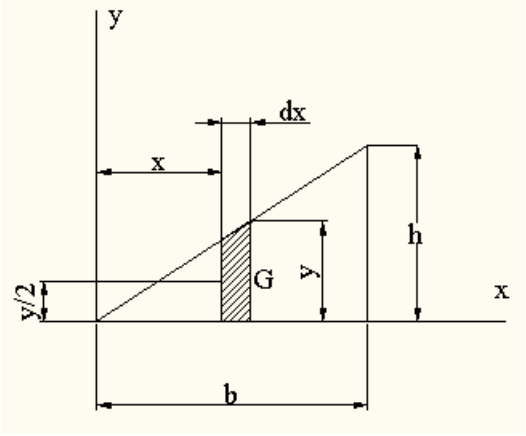
$$1.595\times10^8 = J_G + 9817.2\ (80.64)^2\ \ (2)$$

$$1.595\times10^8 = J_G + 1.276\ \times10^8$$

$$J_G = 31.8\times10^6\ \ mm^4$$

9-44 بروش مستقیم انتگرال‌گیری حاصل ضرب اینرسی سطح زیر را نسبت به محورهای x و y بدست آورید.(I_{xy})





$$I_{xy} = \int xy\ d\ A$$

$$d\ A = y\ dx$$

$$I_{xy} = \int_0^b (x)\ (y/2)\ (y)\ dx$$

$$I_{xy} = \int_0^b \frac{x}{2}\ \ y^2\ dx$$

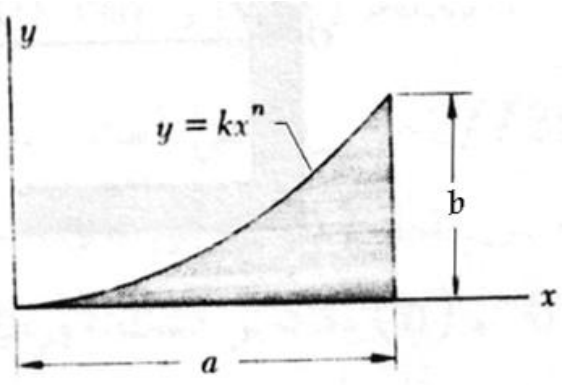
$$\text{مثلث} \Rightarrow \frac{y}{h} = \frac{x}{b} \qquad y = \frac{xh}{b}$$

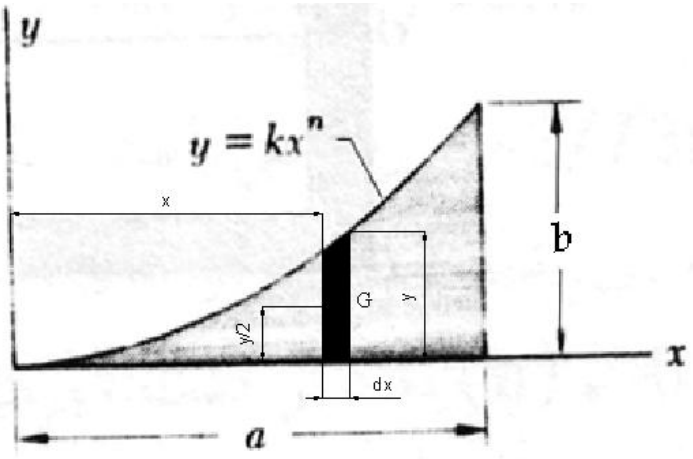
$$I_{xy} = \frac{1}{2}\ \int_0^b x\ (\frac{xh}{b})^2 dx$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\ (\frac{h^2}{b^2}) \left[\frac{1}{4}\ b^4\right]$$

$$I_{xy} = \frac{h^2 b^2}{8}$$

9-45 بروش مستقیم انتگرال‌گیری حاصل ضرب اینرسی سطح زیر را نسبت به محورهای x و y بدست آورید.(I_{xy})





$$d\ A = y\ dx$$

$$I_{xy} = \int_0^a xy\ dA$$

$$I_{xy} = \int_0^a x\ (\frac{y}{2})\ (y\ dx)$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\ \int_0^a x\ (y^2)\ dx$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\ \int_0^a x\ (k^2\ x^{2n})\ dx$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\ K^2\ \int_0^a x^{2n+1}\ dx$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\ K^2\ \left[\frac{1}{2n+2}\ x^{2n+2}\right]_0^a$$

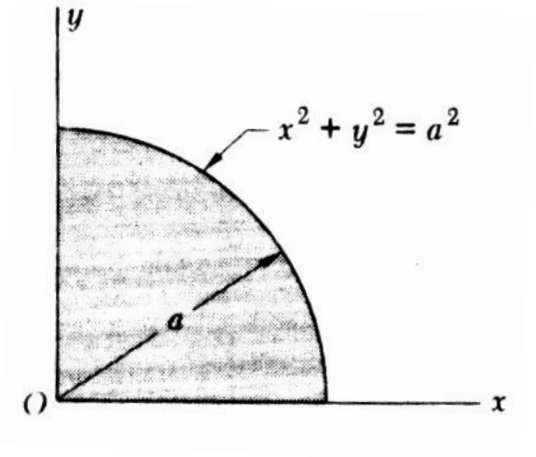
$$I_{xy} = \frac{1}{2}\ K^2\ \frac{1}{2n+2}\ a$$

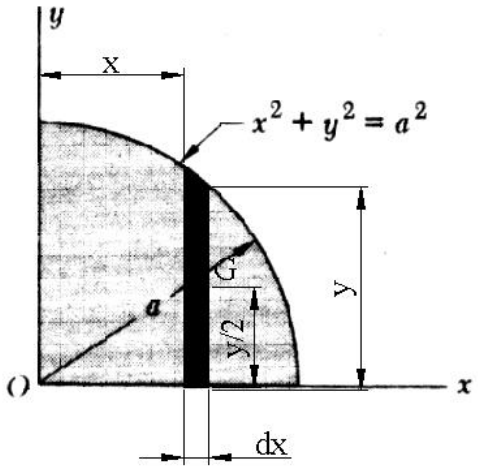
$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \qquad b = k\ a^{\,n} \qquad K = \frac{b}{a^n}$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{b^2}{a^{2n}})\ (\frac{1}{2(n+1)}a^{2n}.a^2$$

$$I_{xy} = \frac{b^2\ a^2}{4(n+1)}$$

9-46بروش مستقیم انتگرال‌گیری حاصل ضرب اینرسی سطح زیر را نسبت به محورهای x و y بدست آورید.(I_{xy})





$$dA = y\ dx$$

$$I_{x,y} = \int_0^a\ x\ (y/2)\ (y)\ dx$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\ \int_0^a xy^2\ dx$$

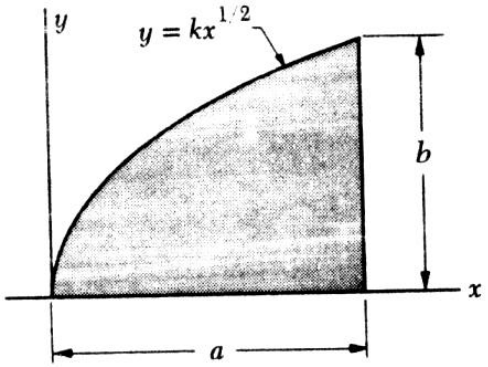
$$I_{xy} = \frac{1}{2}\ \int_0^a x\ (a^2 - x^2)\ dx = \frac{1}{2}\ \int_0^a\ a^2 x dx$$

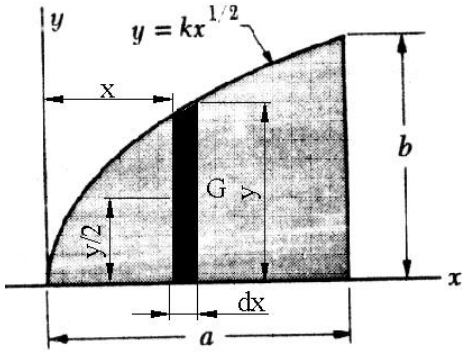
$$-\frac{1}{2}\ \int_0^a\ x^3\ dx$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\ a^2\ \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^a - \frac{1}{2}\ \left[\frac{1}{4}\ x^4\right]_0^a$$

$$I_{xy} = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{8}a^4 = a^4/8$$

9-47بروش مستقیم انتگرال‌گیری حاصل ضرب اینرسی سطح زیر را نسبت به محورهای x و y بدست آورید.(I_{xy})





$$d\ A = y\ dx$$

$$I_{xy} = \int_0^a x\ (y/2)\ (y)\ dx$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\ \int_0^a x\ k^2 x\ dx$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2} K^2\ (\frac{1}{3})\ (x^3)\Big]_0^a$$

$$I_{xy} = \frac{1}{6}\ k^2\ a^3 \qquad b = k\ a^{1/2}$$

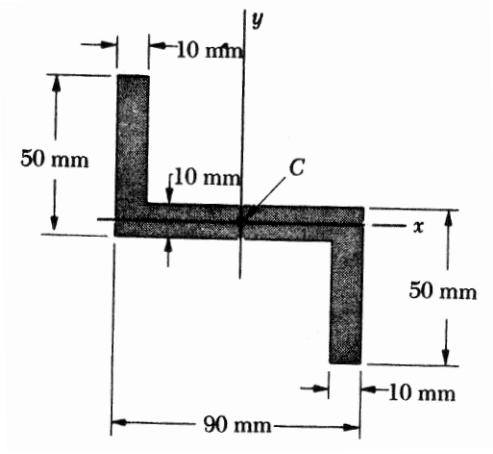
$$I_{xy} = \frac{1}{6}\ (\frac{b^2}{a})(a^3) = \frac{a^2 b^2}{6}$$

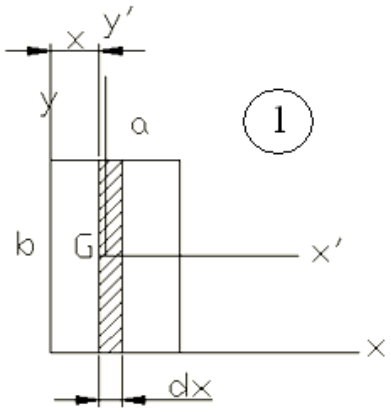
در مسئله۴۵-۹ داریم

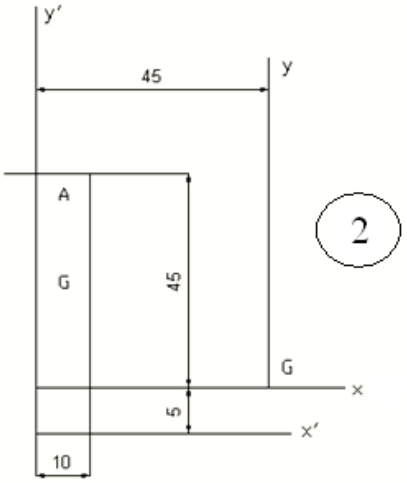
$$I_{xy} = \frac{b^2 a^3}{4\ (n+1)} \Rightarrow \qquad n = 1/2$$

$$I_{xy} = \frac{a^2 b^2}{4\ (\frac{1}{2}+1)} = \frac{a^2 b^2}{6}$$

9-48 با استفاده از قضیه محورهای موازی معین کنید حاصلضرب اینرسی سطوح مطابق شکل را نسبت به محورهای مرکز سطحی x و y.







$I_{xy} = ?$

$d_A = b\ dx$

$1 \Rightarrow \quad I_{xy} = \int_0^a (x)\ (\frac{b}{2})\ (b\ dx)$

$I_{xy} = \frac{b^2}{2}\ \int_0^a x\ dx$

$I_{xy} = \frac{b^2}{2}\ (\frac{1}{2}a^2) = \frac{b^2a^2}{4}$

$I\ x'y' + A\bar{x}\ \bar{y} = I\ xy$

$I\ x'y' + (ab)\ (a/2)\ (b/2) = a^2b^2/4$

$I\ x'y' = a^2b^2/4 - a^2b^2/4 = 0$

از شکل (۲)

$\bar{X} = -40$

$\bar{y} = 25 - 5 = 20$

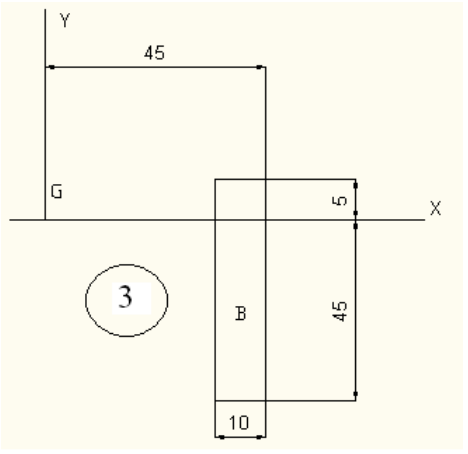
$I\ x'y' = \frac{b^2a^2}{4}$

$I_A\ xy = Ixy_G + A\bar{x}\ \bar{y}$

$I_A\ xy = (10)\ (50)\ (-40)\ (20)$

$I_A\ xy = -400/000\ mm^4$

از شکل (۳)



$\bar{x} = +40$

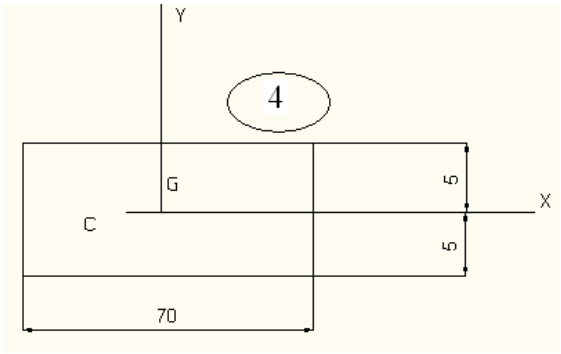
$\bar{y} = -25 + 5 = -20$

$I_B\ xy = I_B\ xy_G + A\ \bar{x}\ \bar{y}$

$I_B\ xy = (0) + (+10)\ (50)\ (40)\ (-20)$

$I_B\ xy = -400/000\ mm^4$

از شکل (۴)



$I\ xy_G = 0$

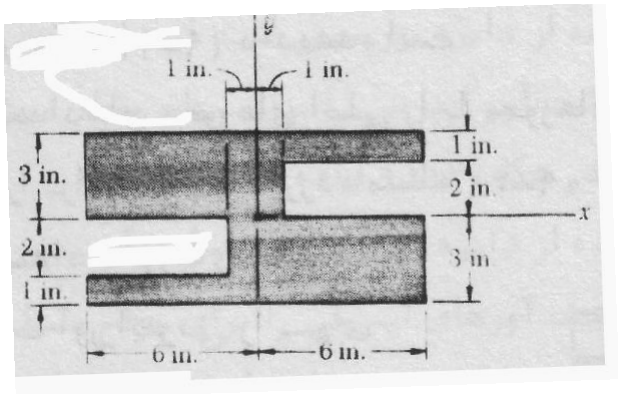
$I_C\ xy = 0$

$I_{xy} = I_A\ xy + I_B\ xy + I_C\ xy$

$I_{xy} = -400000 \quad -400000 \ + 0$

$I_{xy} = -800000 \quad mm^4$

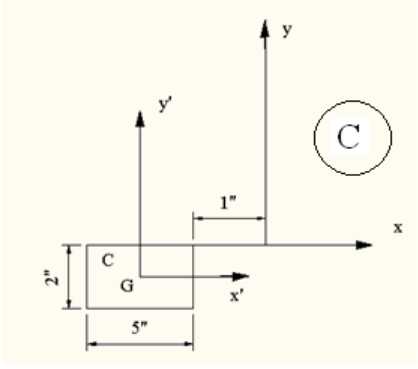
9-50 با استفاده از قضیه محورهای موازی معین کنید حاصلضرب اینرسی سطوح مطابق شکل را نسبت به محوری مرکز سطحی x و y.



$$0 + (36)\ (-3)\ (0) = I_B xy$$

$$I_B xy = 0$$

From C

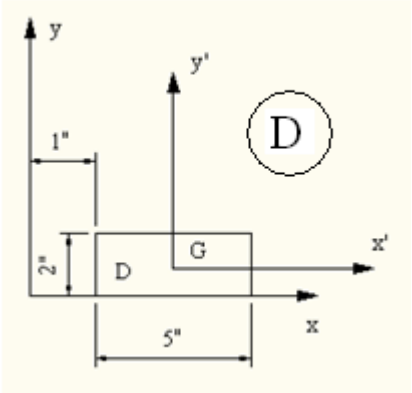


$$I_C\ x'y' + A\bar{x}\ \bar{y} = Ic\ xy$$

$$I_C\ xy = 0 + 10\ (-3.5)\ (-1)$$

$$I_C\ xy = +35\ 1n^4$$

From D



$$I_D\ x'y' + A\bar{x}\ \bar{y} = I_D\ x\ y$$

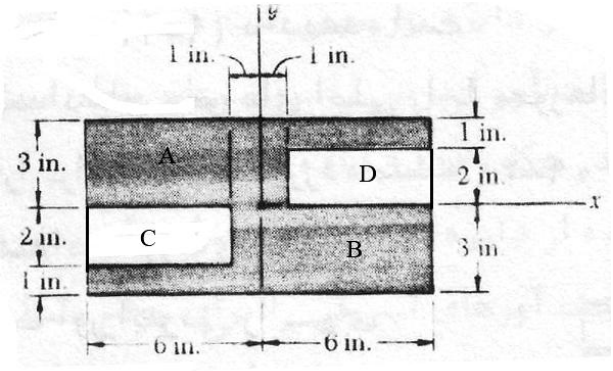
$$I_D\ xy = 10\ (3.5)\ (1) + 0$$

$$I_D\ xy = +35\ 1n^4$$

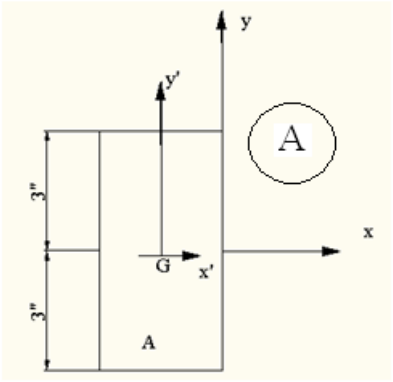
$$Ixy = I_A xy + I_B xy - I_C xy - I_D\ xy$$

$$I\ xy = 0 + 0 - 35 - 35$$

$$I_{xy} = -70\ in^4$$

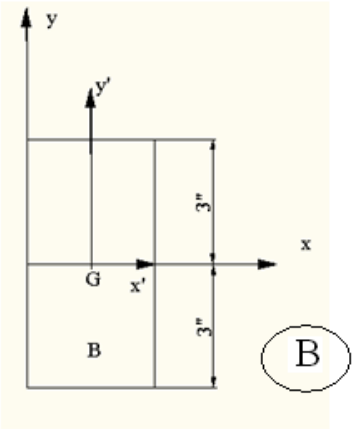


$$Ixy = I_A xy + I_B xy - I_C xy - I_D\ xy$$



$$From\ A:\ I_A x'y' + A\bar{x}\ \bar{y} = I\ xy$$

$$I_A xy = (36)\ (-3)\ (0) = 0$$

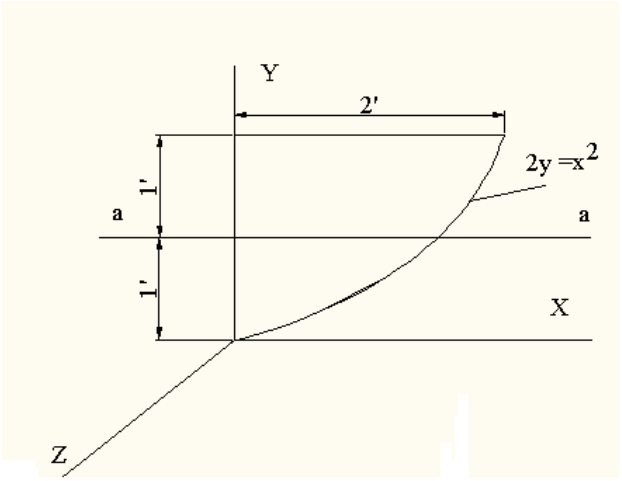


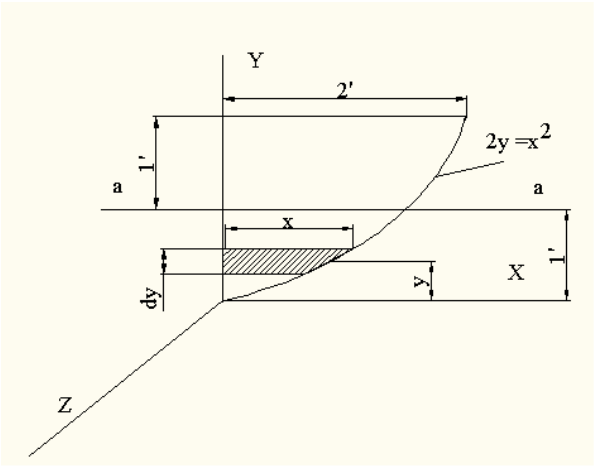
From B

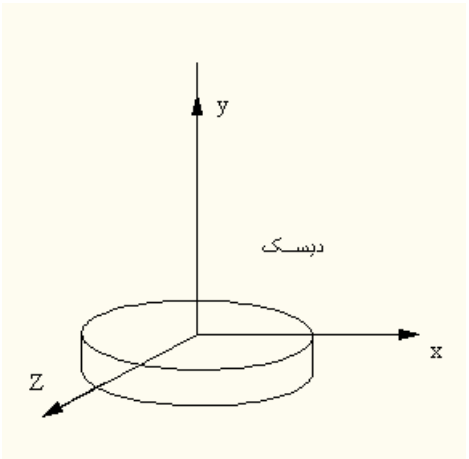
$$I_B x'y' + A\bar{x}\ \bar{y} = I_B xy$$

مسائل متفرقه

مطلوبست گشتاور اینرسی سطح محصور بین معادله $2y = x^2$ و $y = 2$ را حول محور a بدست آورید.







$I_a = ?$

$dm = \rho\ d\ \forall$

$dm = S(\pi\ x^2)\ dy$

$m = \rho\pi \int_0^2 x^2 dy = \rho\pi \int_0^2 2y\ dy$

$m = 2\pi\rho \left[\frac{1}{2}\ y^2\right]_0^2 = 4\ \pi\rho$

از دیسک

$I_X = I_Z = \frac{1}{4} mr^2$

$I_y = \frac{1}{2} mr^2$

$d\ I_G x = \frac{1}{4} dm\ x^2$

$d\ Ia = d\ I_G x + (dm)\ d^2$

$d\ Ia = \frac{1}{4}\ dm\ x^2 + dm\ (1-y)^2$

$d\ Ia = \frac{1}{4}\ (\rho\pi\ x^2)\ dy\ x^2 + (\rho\pi\ x^2)\ (1+y^2-2y)\ dy$

$d\ Ia = \frac{\rho\pi}{4}\ (4y^2)\ dy\ + \rho\pi\ (2y)\ (1+y^2-2y)\ dy$

$Ia = \rho\pi \int_0^2 y^2 dy\ + 2\rho\pi \int_0^2 (y^3 - 2y^2 + y)\ dy$

$Ia = \rho\pi \left[\frac{1}{3} y^3\right]_0^2 + 2\rho\pi \left[\frac{1}{4} y^4 - 3y^3 + \frac{1}{2} y^2\right]_0^2$

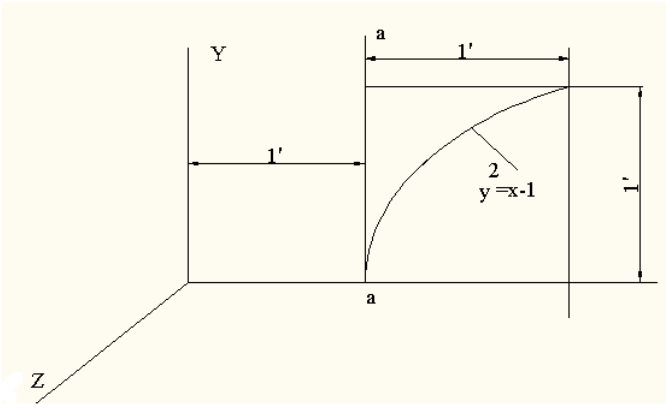
$Ia = \frac{\rho\pi}{3}\ (8) + 2\ \rho\pi \left[4 - \frac{16}{3} + 2\right]$

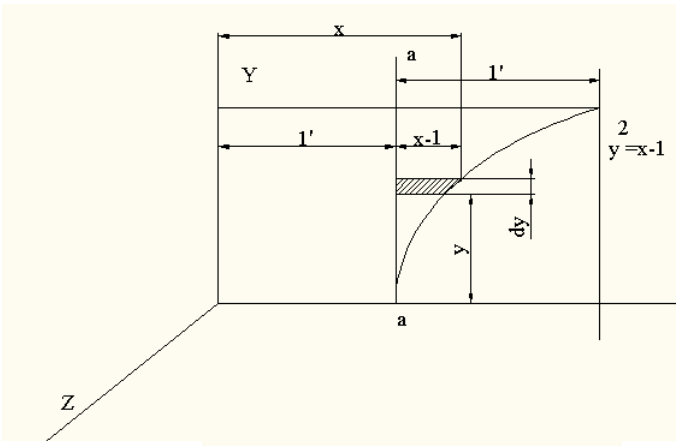
$Ia = \frac{8\rho\pi}{3} + 2\rho\pi\ (\frac{2}{3}) = \frac{12\rho\pi}{3}$

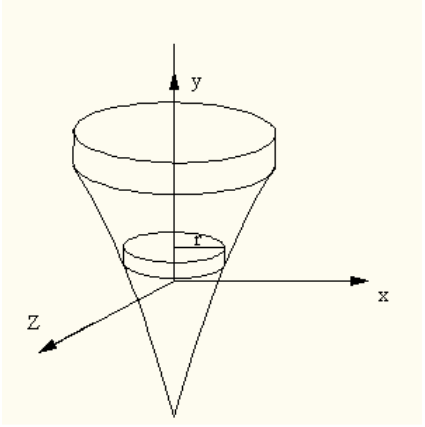
$Ia = \frac{3(4\rho\pi)}{3} = m$

$Ia = m$

مطلوبست گشتاور اینرسی سطح محصور بین معادله $y^2 = x-1$ و $y=1$ $x=2$ را حول محور a بدست آورید.







$Iy = ?$

$dm = \rho d\ \forall$

$dm = \rho\pi(x-1)^2\,dy$

$m = \int_0^{'} \rho\pi(y^4)\ dy$

$m = \rho\pi\int_0^{'} y^4\ dy = \rho\pi(\frac{1}{5}y^5\Big]_0^1$

$m = \frac{\rho\pi}{5}$

$Iy = \frac{1}{2}\ mr^2$

$d\ I_G y = \frac{1}{2}dm\ (x-1)$

$d\ Iy = d\ I_G y + dm\ d^2$

$d\ Iy = \frac{1}{2}\ (\rho\pi)\ (x-1)^2 dy\ (x-1)^2$

$+ \rho\pi\ (x-1)^2 dy\ \left[1+\frac{x-1}{2})\right)$

$d\ Iy = \frac{1}{2}\ \rho\pi\ (x-1)^4 dy\ + \rho\pi\ (x-1)^2\ (\frac{x+1}{2})^2\ dy$

$d\ Iy = \frac{1}{2}\ \rho\pi\ (y)^4 dy\ + \frac{\rho\pi}{2}\ (y^4)\ (y^2+2)^2\ dy$

$d\ Iy = \frac{1}{2}\ \rho\pi\ y^4 dy\ + \frac{\rho\pi}{4}\ (y^8+4y^4+4y^6)\ dy$

$Iy = \frac{\rho\pi}{2}\ \int_0^1 y^4 dy\ + \frac{\rho\pi}{4}\ \int_0^1\ (y^8+4y^4+4y^6)\ dy$

$Iy = \frac{\rho\pi}{2}\ \left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 + \frac{\rho\pi}{4}\ \left[\frac{1}{9}y^9+\frac{4}{5}y^5+\frac{4}{7}y^7\right]_0^1$

$I_y = \frac{\rho\pi}{10} + \frac{\rho\pi}{4}\ \left[\frac{1}{9}+4/5+4/7\right]$

$I_y = \frac{\rho\pi}{10} + \rho\pi/4\ \left[\frac{35+252+180}{315}\right]$

$I_y = \frac{\rho\pi}{10} + \frac{\rho\pi}{4}\times\frac{467}{315}$

$I_y = \frac{5m}{10} + \frac{5m\ (467)}{4(315)}$

$I_y = 0.5m + 1.85m$

$I_y = 2.35\ m$

فصل ۲

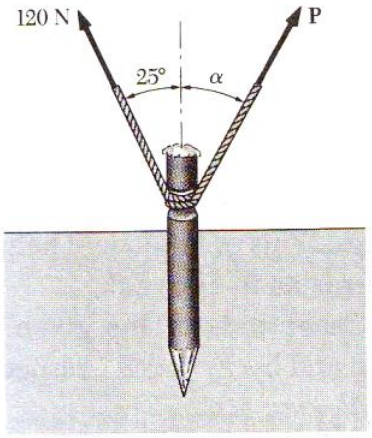
مجموعه ای از مسائل کتاب

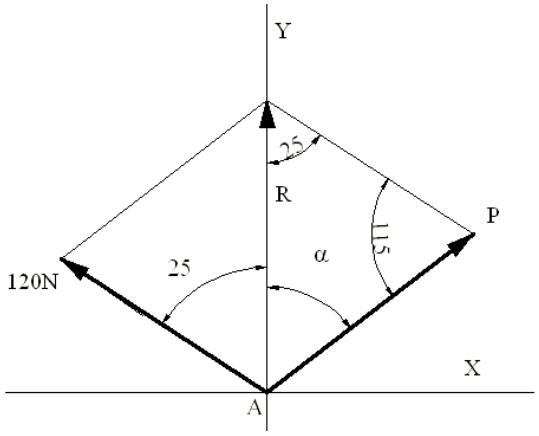
Mechanics
For Engineers

Statics, Fourth Edition

Ferdinand P.Beer
&
E.Russell Johnston,jr

2-10 میخی از زمین بوسیله دو طناب مطابق شکل به بیرون کشیده می شود اگر $\alpha = 40^\circ$باشد ،بوسیله روش مثلثاتی نیروی P را معین کنید، به طوریکه برآیند نیروها در راستای میخ باشد. برآیند نیروها چقدر است؟





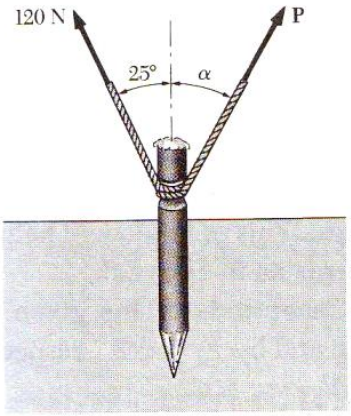
$$\frac{120}{Sin40} = \frac{P}{Sin25} = \frac{R}{Sin115}$$

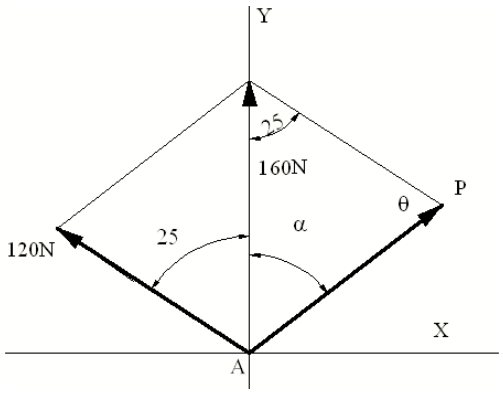
$$P = 120$$

$$\frac{Sin25}{Sin40} = 78.9 \ N$$

$$R = Sin115 \times \frac{120}{Sin40} = 169.2 \ N$$

2-12 میخی از زمین بوسیله دو طناب مطابق شکل به بیـرون کشیده می شود، اگر برآیند نیروها برابـر P=160 Nودر راسـتای میخ باشد،مطلوبست تعین نیروی P و زاویه α





$P = ? \quad \alpha = ?$

$\theta = 180 - 25 - \alpha = 155 - \alpha$

$$\frac{120}{Sin\alpha} = \frac{P}{Sin25} = \frac{160}{Sin\ (155-\alpha)}$$

$$\frac{Sin\ (155-\alpha)}{Sin\alpha} = \frac{160}{120}$$

$$\frac{Sin155\,Cos\alpha - Cos155\ \ Sin\alpha}{Sin\alpha} = \frac{160}{120}$$

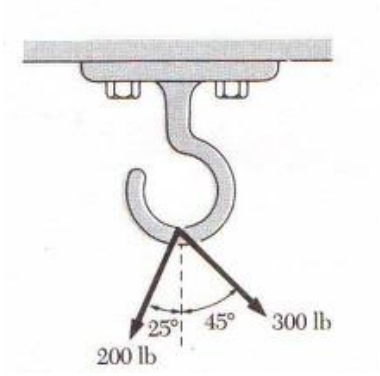
$$Sin155\ \ Cot\alpha - Cos155 = \frac{160}{120}$$

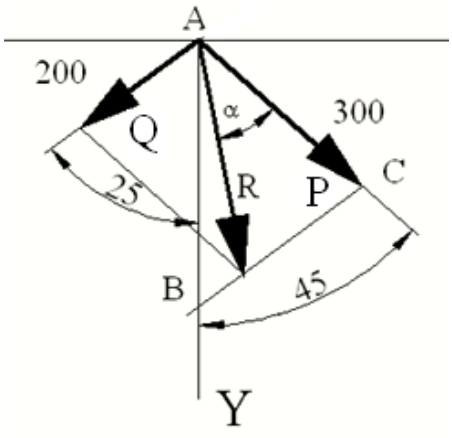
$$Cot\alpha = 1.0104$$

$$\alpha = 44.7$$

$$P = 120 \times \frac{Sin25}{Sin44.7} = 72.1\ \ N$$

2-14 بوسیله روش مثلثـاتی برآینـد نیروهـا و جهـت آن را در شکل زیر بدست آورید.





$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\,Cos\ \ (A)$$

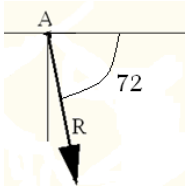
$$R^2 = (300)^2 + (200)^2 + 2\ \ (300)\ \ (200)\ \ Cos\ \ (70)$$

$$R = 413.6$$

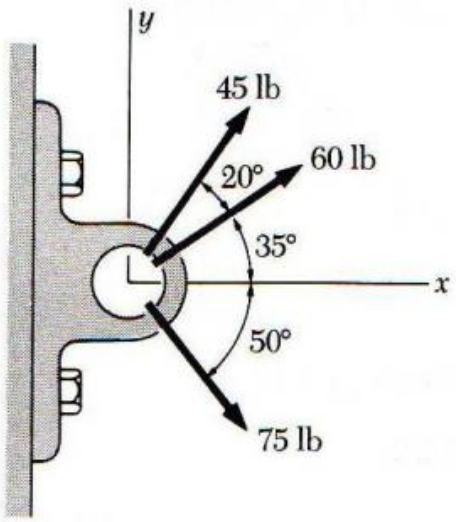
$$\tan\alpha = \frac{QSinA}{P + QCosA} = \frac{200\,Sin70}{300 + 200\,Sin70}$$

$$\tan\alpha = \frac{187.94}{368.41} \qquad \alpha = 27^{\circ}$$

$$A_1 = 27 + 45 = 72$$



2-16 مطلوبست برآیند نیروهای افقی و عمودی شکل زیر.



$Rx\ ,\ Ry = ?$

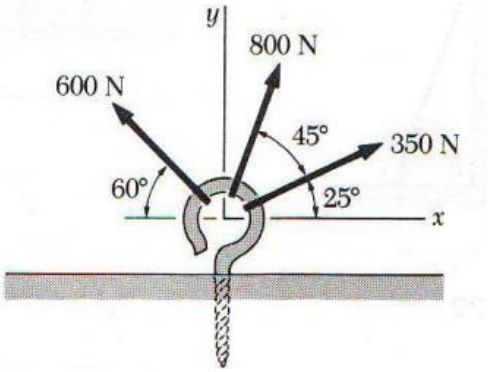
$Rx = 60\ \ Cos35 + 45\ \ Cos55 + 75\ \ Cos50$

$Rx = 123.2\ \ lb$

$Ry = 60\ \ Sin35 + 45\ \ Sin55 - 75\ \ Sin50$

$Ry = 13.82\ \ lb$

2-17 مطلوبست برآیند نیروهای افقی و عمودی شکل زیر.



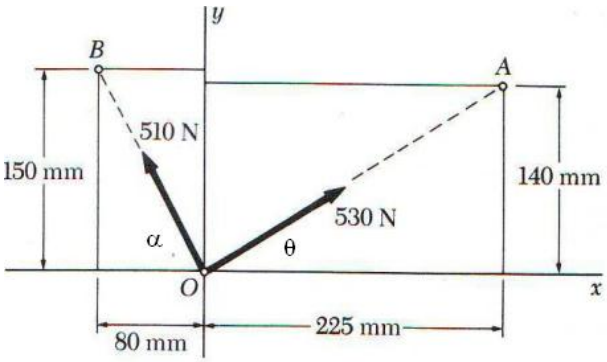
$Rx = 350\ \ Co25 + 800\ \ Cos70 - 600\ \ Cos60$

$Rx = 290.82\ \ N$

$Ry = 350\ \ Sin25 + 800\ \ Sin70 + 600\ \ Sin60$

$Ry = 1419.28\ \ N$

2-18 مطلوبست برآیند نیروهای افقی و عمودی شکل زیر.



$\tan\theta = \frac{140}{225}$

$\theta = 31.89$

$\tan\theta = \frac{150}{80}$

$\alpha = 61.92$

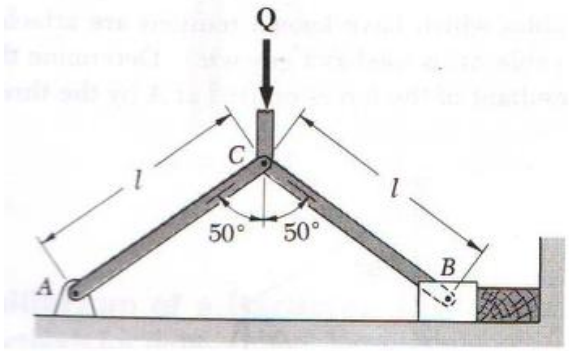
$Rx = 530\ \ Cos\theta - 510\ \ Cos\alpha$

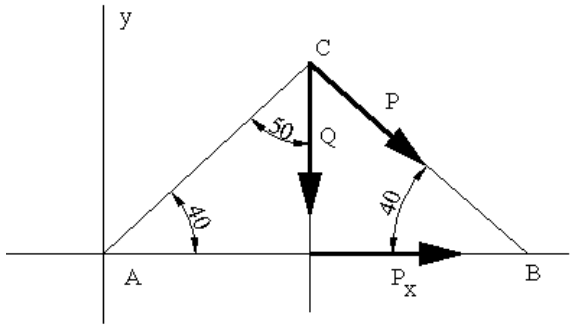
$Rx = 210\ \ N$

$Ry = 530\ \ Sin\theta + 510\ \ Sin\alpha$

$Ry = 730\ \ N$

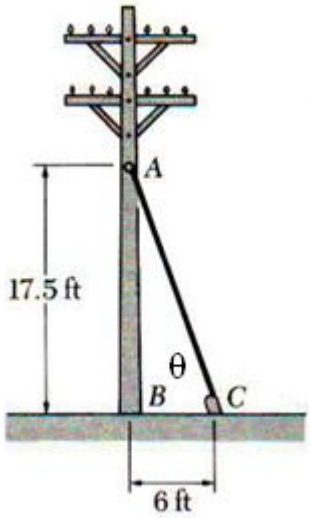
2-20 بازوی BC نیروئی برابر P به بلوک B در راستای BC وارد می کند،اگر تجزیه نیروی افقی P برابر با 200 lb باشد،مطلوبست تعین نیروی P و تعیین نیروی عمودی Q .





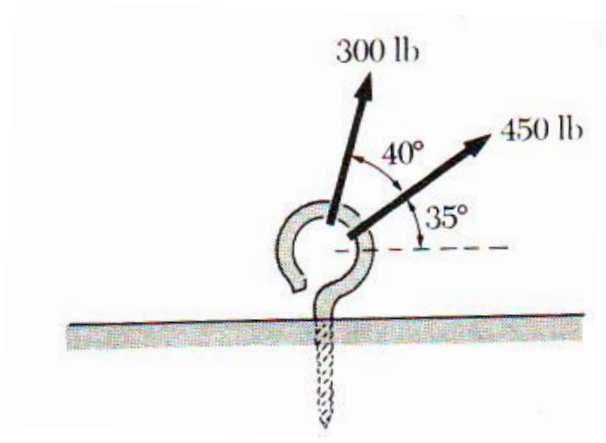
$$P_x\ Cos40 = 200$$
$$P_x = 261 \quad lb$$
$$Q = -P\ Sin40 = 261\ \ Sin40$$
$$Q = -167.8\ \ lb$$

2-22 نیروی کششی سیم در تیر تلفن برابر با 370lb است،مطلوبست تعیین نیروی افقی وعمودی این نیرو

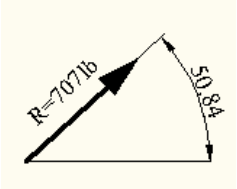


$$T_{AC} = 370\ ^{1b}$$
$$\tan\theta = \frac{17.5}{6}$$
$$\theta = 71.08^{\circ}$$
$$Rx = -370\ \ Cos\theta = -120\ \ lb$$
$$Ry = 370\ \ Sin\theta = 350\ \ lb$$

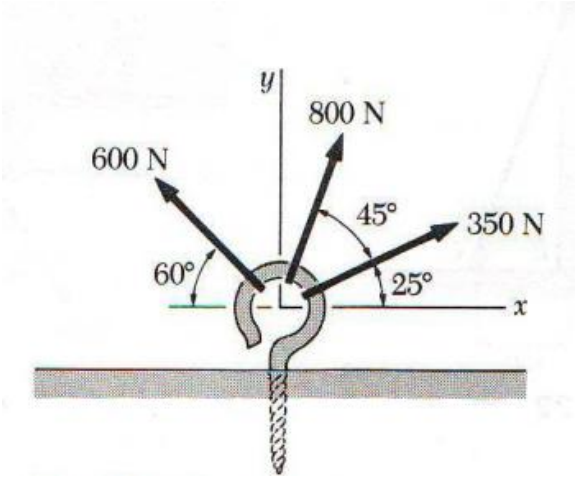
2-24 نیروی افقی و عمودی برآیند نیروهای شکل زیر را بدست آورید.



$$Rx = 450\ \ Cos35 + 300\ \ Cos75$$
$$Rx = 446.26\ \ lb$$
$$Ry = 300\ \ Sin75 + 450\ \ Sin35$$
$$Ry = 547.88\ \ lb$$
$$\tan\theta = \frac{Ry}{Rx} = \frac{547.88}{446.26}$$
$$\theta = 50.84$$
$$R = \frac{446.26}{Cos\theta}$$
$$R = 707\ \ lb$$



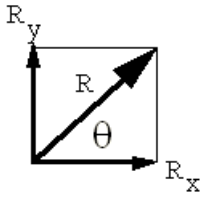
2-26 برآیند نیروهای شکل زیر را بدست آورید.



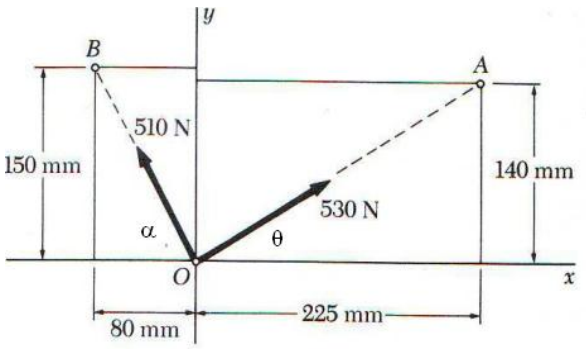
از مسئله قبل(2-17)،داریم

$$Ry = 1419.28 \ \ N$$
$$Ry = 1419.28 \ \ N$$

$$\tan\theta = \frac{1419.28}{290.82}$$
$$\theta = 78.42$$
$$Fx = RCos\theta$$
$$R = \frac{240.82}{Cos\theta}$$
$$R = 1449 \ \ N$$

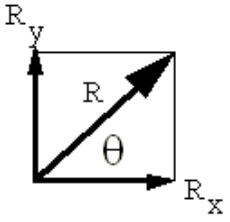


2-28 برآیند نیروهای شکل زیر را بدست آورید.

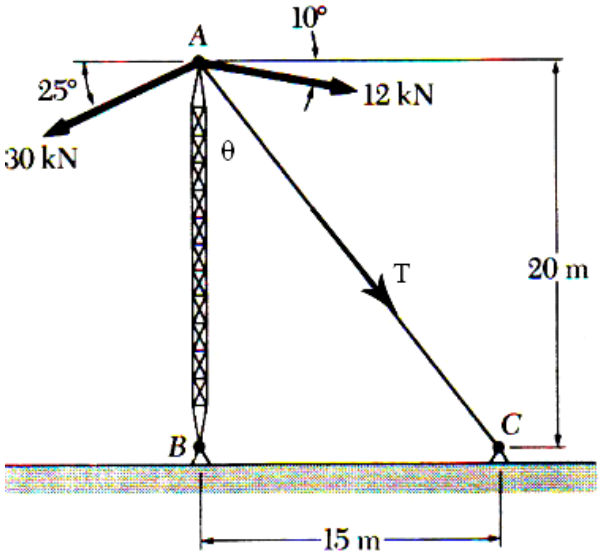


از مسئله قبل(2-18)،داریم $Rx = 210 \ \ N$

$$Ry = 730 \ \ N$$
$$\tan\theta = \frac{Fy}{Fx} = \frac{730}{210}$$
$$\theta = 73.95 = 74$$
$$R \ Cos\theta = Fx$$
$$R = \frac{210}{Cos\theta} = 759.6 = 760 \ \ N$$



2-30 کابلAC دکلAB را مطابق شکل کـه نیروهـائی بـر آن وارد می شود نگهه می دارد،مطلوبست کشش سیم در کابـلAC را به شرط اینکه برآیند نیروها در راستایy ها باشد.

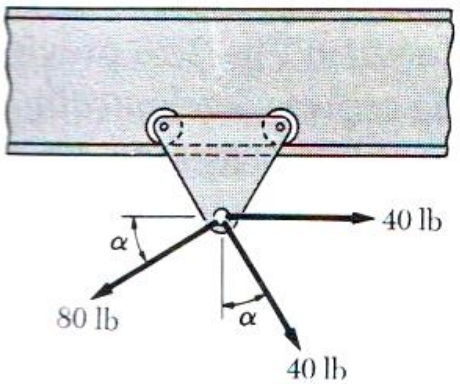


$$\tan\theta = \frac{15}{20}$$
$$\theta = 36.8698$$
$$Rx = 12Cos10 - 30Cos25 + TSin\theta$$
$$Ry = 12Sin10 + 30Sin25 + TCos\theta$$

اگر برآیند نیرو در راستای y،باشد $Rx = 0$

$$TSin\theta = 30 \ \ Cos25 - 12 \ \ Cos10$$
$$TSin\theta = 15.37$$
$$T = 25.6 \ \ KN$$

2-32 برآیند سه نیروی وارد بر شکل زیر در راستای y ها عمل می کند،مطلوبست زاویه α و تعیین برآیند نیروها.



$$R = R_x i + R_y j$$

$$R_x = 0$$

$$R_x = 40 + 40\ Sin\alpha - 80\ Cos\alpha$$

$$Ry = -80\ Sin\alpha - 40\ Cos\alpha$$

$$80\ Cos\alpha - 40\ Sin\alpha = 40$$

$$Cos\alpha - \frac{1}{2} Sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$Cos\alpha - \tan\beta\ Sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$Cos\alpha\ Cos\beta - Sin\beta\ Sin\alpha = \frac{1}{2} Cos\beta$$

$$Cos\ (\alpha + \beta) = \frac{1}{2} Cos\beta$$

$$\tan\beta = \frac{1}{2} \qquad \beta = 26.56$$

$$Cos\ (\alpha + 26.265) = 0.4472$$

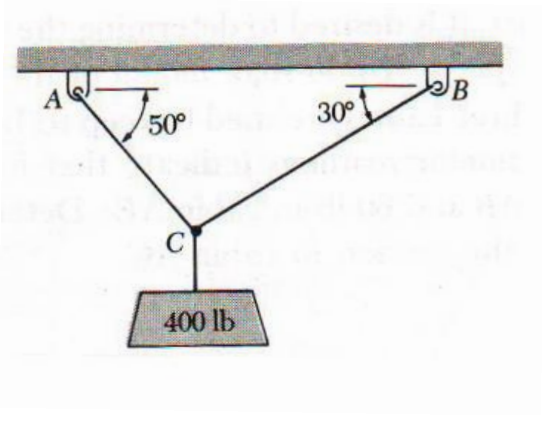
$$\alpha + 26.265 = 63.434$$

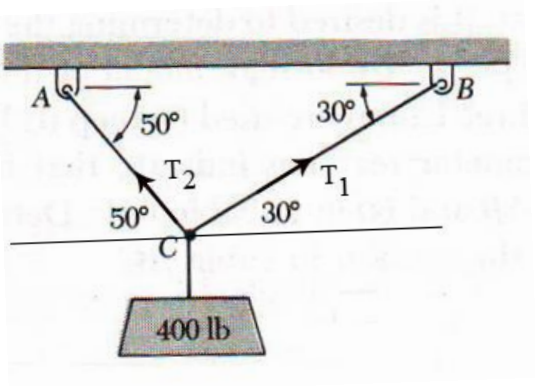
$$\alpha = 36.9$$

$$R = Ry = -80\ Sin\alpha - 40\ Cos\alpha$$

$$R = -80\ 1b$$

2-32 دو کابل در نقطه C گره خورده و مطابق شکل بـه حالـت تعادل قرار گرفته اند،مطلوبست کشش در کابلBC, AC





$$\sum Fy = 0$$

$$-400 + T_1\ Sin30 + T_2\ Sin50 = 0$$

$$\sum Fx = 0$$

$$T_1\ Cos30 - T_2\ Cos50 = 0$$

$$T_2 = T_1\ \frac{Cos30}{Cos50} = \times \frac{Cos30}{Cos50}$$

$$T_2 = 1.347 \quad T_1$$

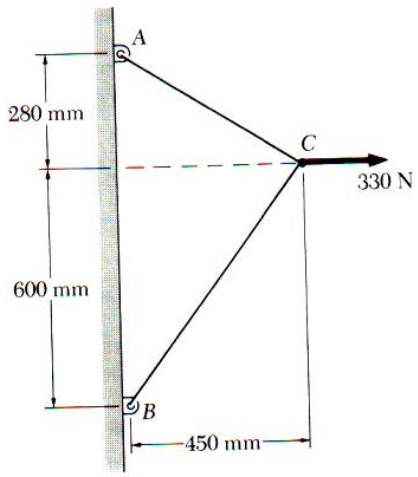
$$400 = T_1\ Sin30 + 1.347\ T_1\ Sin50 = 0$$

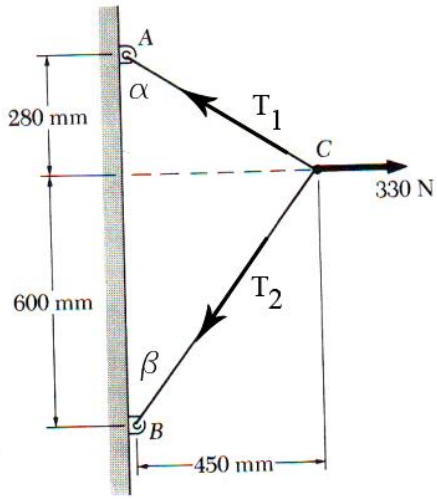
$$400 = T_1\ (1.53186)$$

$$T_1 = 261 \quad lb$$

$$T_2 = 352 \quad lb$$

2-36 دو کابل در نقطه C گره خورده و مطابق شکل بـه حالـت تعادل قرار گرفته اند،مطلوبست کشش در کابلBC, AC





$$\tan\theta = \frac{450}{280} \qquad \underline{\theta = 58.1}$$

$$\tan B = \frac{450}{600} \qquad \underline{B = 36.87}$$

$$\sum Fx = 0$$

$$330 - T_1 Sin58.1 - T_2 Sin36.87 = 0$$

$$\sum Fy = 0$$

$$T_1 Cos58.1 - T_2 Cos36.87 = 0$$

$$T_1 = T_2 \frac{Cos36.87}{Cos58.1} = 1.51 T_2$$

$$330 = T_2 Sin36.87 + 1.51 T_2 Cos36.87$$

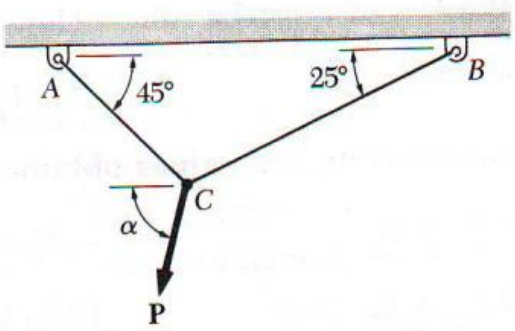
$$33 = 0.6 T_2 + 1.28 T_2 = 1.88 T_2$$

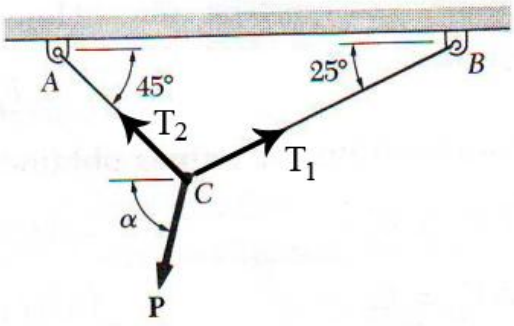
$$T_1 = 175 \times 1.51$$

$$T_1 = 265 \quad N$$

$$T_2 = 175 \quad N$$

2-38 دو کابل در نقطه C گره خورده و مطابق شکل بـه حالـت تعادل قـرار گرفتـه انـداگر $P = 400\ N$, $\alpha = 75^\circ$، باشـد مطلوبست کشش در کابلBC, AC





$$P = 400\ N \qquad \alpha = 75^\circ \qquad T_2,\ T_1 \quad ?$$

$$\sum Fx = 0$$

$$\begin{cases} T_1 Cos - T_2 Cos45 - 400\ Cos75 = 0 \\ \sum Fy = 0 \qquad T_1 Sin25 + T_2\ Sin45 - 400\ Sin75 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1\ Cos25 - T_2\ Cos45 = 400\ Cos75 \\ T_1 Sin25 + T_2\ Sin45 = 400\ Sin75 \end{cases}$$

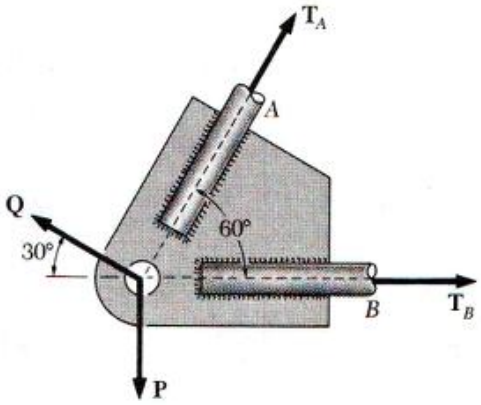
$$\begin{cases} T_1\ Cos25\ Sin45 - T_2\ Cos45 Sin45 = 400 Cos75 Sin45 \\ T_1 Sin25\ Cos45 + T_2\ Sin45\ Cos45 = 400\ Sin75\ Cos45 \end{cases}$$

$T_1(Sin70) = 400\ (Cos75\ Sin45 + Sin75\ Cos45) =$
$400Sin120$
$T1 = 369\ \ N$

$$T_2 = \frac{400\ Sin75 - (369)\ Sin25}{Sin45} = 326$$

$T2 = 326\ N$

2-40دو نیروی Pو Q به یک بال هواپیما مطابق شکل اثر می کند،اگر P=600lb,Q=800lbباشد و جسم به حالت تعادل قرار گیرد،کشش T_AوT_Bرا محاسبه کنید.



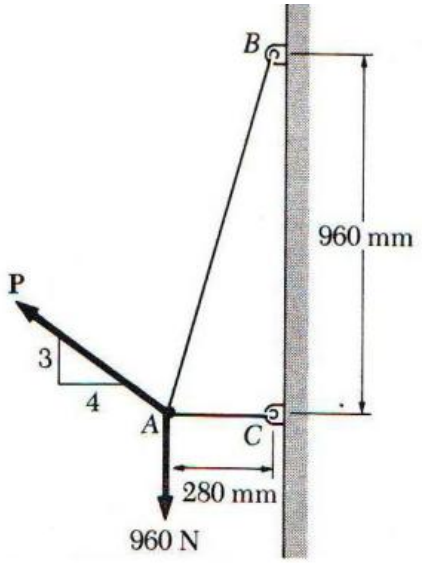
$Q = 800 \quad P = 600$
$TA = ? \quad TB = ?$
$\sum Fx = 0$

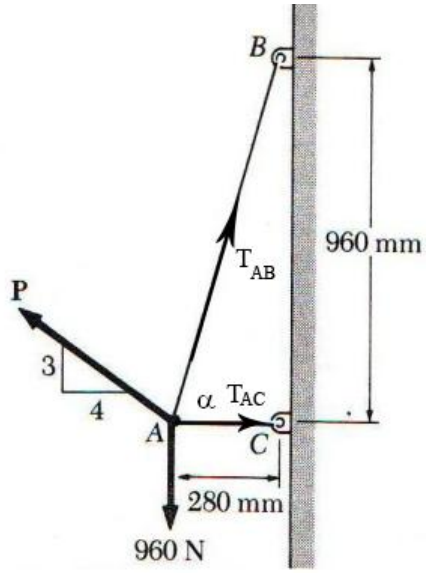
$$\begin{cases} T_B + T_A\ Cos - 800\ Cos30 = 0 \\ \sum Fy = 0 \\ -P + T_A\ Sin60 + 800\ Sin30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_B + T_A\ Cos60 = 800\ Cos30 \\ T_A\ Sin60 = 600 - 800\ Sin30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_B Sin60 + T_A\ Cos60 Sin60 = 800\ Cos30 Sin60 \\ -T_A\ Sin60 Cos60 = -600 Cos60 + 800\ Sin30 Cos60 \end{cases}$$

2-42دو کابل در نقطهA بهم گره خورده اند،سیستم به حالت تعادل است،اگر P=640Nباشد،مطلوبست کشش در کابلAB وAC





$T_B Sin60 = 800\ \ Cos30 Sin60 - 600 Cos60$
$+ 800 Sin30 Cos60$
$T_B Sin60 = 500$
$T_B = 577\ \ lb$
$T_A Cos60 = -577 + 800\ \ Cos30$
$T_A = 231\ \ lb$

$T_{AB} = 600 \quad T_{AC} = 344 \ \ N$

$T_{AB} = ?$

$T_{AC} = ?$

$P = 640 \ \ N$

$\tan\alpha = \dfrac{960}{280} \quad \alpha = 73.73$

$\sum Fx = 0$

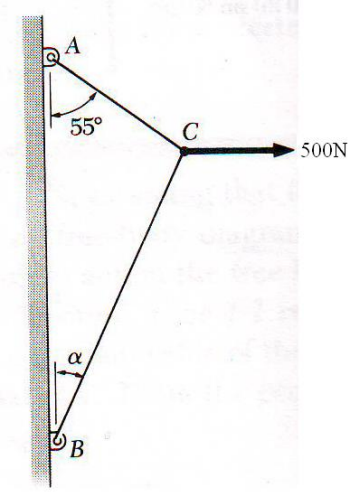
$$\begin{cases} T_{AC} + T_{AB}\ Cos73.73 - 640 \times \frac{4}{5} = 0 \\ T_{AB}\ Sin73.73 + 640 \times \frac{3}{5} - 960 = 0 \end{cases}$$

$T_{AB} = 600 \ \ N$

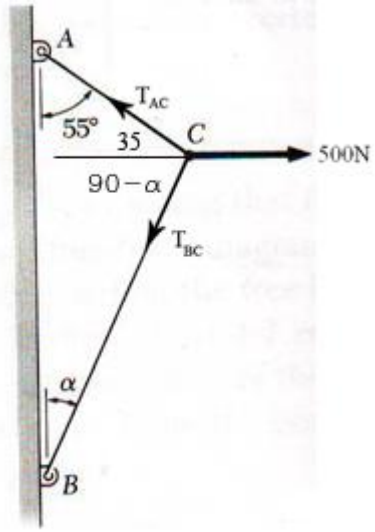
$T_{AC} = 640 \times \dfrac{4}{5} - 600\ \ Cos73.73$

$T_{AC} = 344 \ \ N$

2-44 در شکل زیر زاویه α را طوری تعیین کنید که (a)،کشش در کابلBC مینیمم شود.(b)،کشش در هر دو کابل مینیمم شوند.



$$\begin{cases} \alpha = ? \\ T_{BC} = Min \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = ? \\ T_{BC}, T_{AC} = Min \end{cases}$$



$\sum Fx = 0$

$$\begin{cases} \sum Fx = 0 \ \ 500 - T_{AC}\ Cos35 - T_{BC}\ Cos(90-\alpha) = 0 \\ 500 - T_{AC}\ Cos35 - T_{BC}\ Sin\alpha = 0 \\ \sum Fy = 0 \\ T_{AC}\ Sin35 - T_{BC}\ Sin(90-\alpha) = 0 \\ T_{AC}\ Sin35 - T_{BC}\ Cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$T_{AC} = T_{BC}\ \dfrac{Cos\alpha}{Sin35}$

$500 = T_{BC}\ \dfrac{Cos\alpha}{Sin35}\ \ Cos35 + T_{BC} Sin\alpha$

$500 = T_{BC}(Cot35\ \ Cos\alpha + Sin\alpha)$

$$T_{BC} = \frac{500}{Cot35 Cos\alpha + Sin\alpha}$$

$$T_{BC}{}' = \frac{-Cot35\ \ Sin\alpha + Cos\alpha}{(V^2)} \qquad T_{BC}{}' = 0$$

$$-Cot35 Sin\alpha + Cos\alpha = 0$$

$Cot35 = Cot\alpha$

$\alpha = 35^\circ$

$$T_B = \frac{500}{Cot35 Cos35 + Sin35} = \frac{500}{1.743}$$

$$T_B = 286.8 \quad lb$$

$$T_A = 286.8 \times \frac{Cos35}{Sin35}$$

$$T_B = 409.6 \quad lb$$

$$\frac{T_{AC}}{T_{BC}} = \frac{Cos\alpha}{Sin35}$$

برای اینکه هر دو نیرو

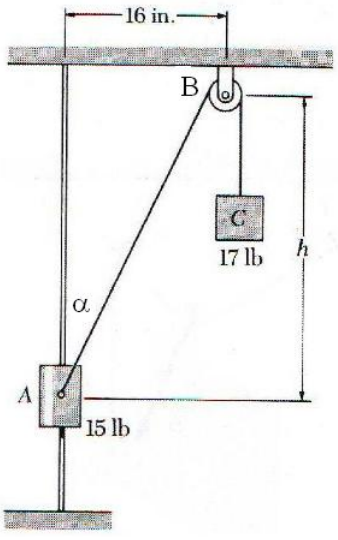
مینیمم شود ،باید دو زاویه برابر شود

$$\alpha = 55$$

$$T_B = T_{AC} = \frac{500}{Cot35 \;\; Cos55 + Sin55}$$

$$T_A = T_{BC} = 305 \quad N$$

2-46 وزنه ۱۵ پوندی Aروی میله عمودی بدون اصطکاک می لغزد،وزنهAبوسیله قرقرهBبه وزن ۱۷ پوندیCمتصل است،مطلوبست ارتفاعhبه شرط اینکه سیستم به حال تعادل قرار گیرد.



$$16 \;\; Cos\alpha = 15$$

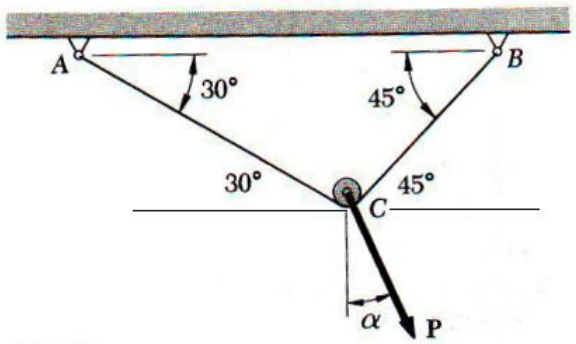
$$Cos\alpha = 15/17 \qquad \alpha = 28.07$$

$$\sum Fy = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{16}{h} \qquad h = \frac{16}{\tan\alpha}$$

$$h = 30 \quad in$$

2-50نیروی P به یک قرقره Cکه روی کابل ACB قرار گرفته است اثر می کند ،مطلوبست تعیین نیروی P وجهت آن.



$$T_{AC} = T_{BC} = 750 \quad N$$

$$P = ?$$

$$\alpha = ?$$

$$\sum Fy = 0$$

$$750 \;\; Cos45 - 750 \;\; Cos30 + P \, Sin\alpha = 0$$

$$750 \;\; Sin45 + 750 \;\; Sin30 - P \, Cos\alpha = 0$$

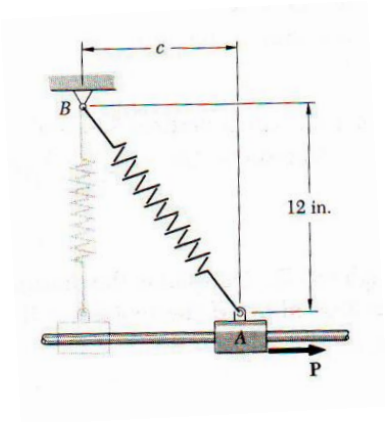
$$-\tan\alpha = \frac{750 \;\; (Cos45 - Cos30)}{750 \;\; Sin45 + Sin30}$$

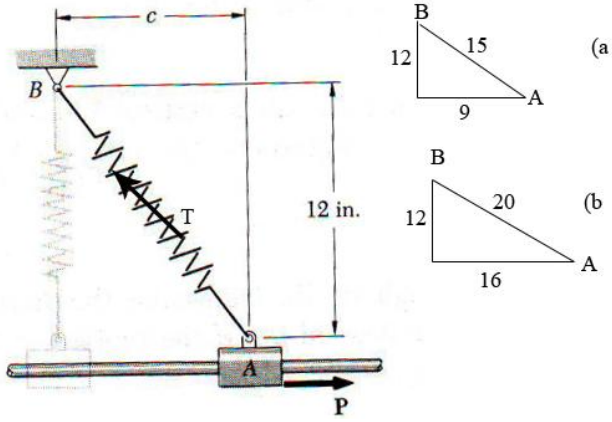
$$-\tan\alpha = \frac{-0.158918}{1.207} \qquad \alpha = 7.5$$

$$P \, Cos\alpha = 750 \;\; (Sin45 + Sin30)$$

$$P = 913 \;\; 1b$$

2-52 سیلندرA روی میله افقی بدون اصطکاک که با نیروی Pبوسیله فنری که بهB متصل است کشیده می شود،اگر ضریب ثابت فنر $k = 10\frac{lb}{in}$ باشد،مطلوبست تعیین نیروی P ،وقتی که(a)C=9in وC=16in (b) .





$T = k\Delta x$

a)

$\overline{AB}^2 = 9^2 + 12^2 \qquad AB = 15 \ \ in$

$T = 10 \ \ (15 - 12) = 30 \ \ lb$

$P = 30 \times \frac{9}{15} = 18 \quad 1b$

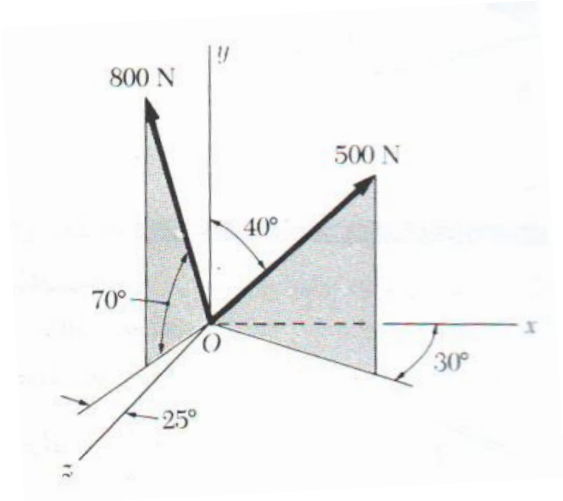
b)

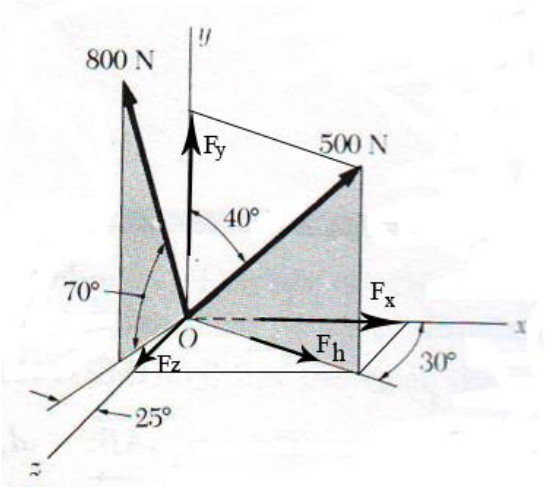
$\overline{AB}^2 = 16^2 + 12^2 \quad AB = 20 \ \ in$

$T = 10 \ \ (20 - 12) = 80 \quad 1b$

$P = 80 \times \frac{16}{20} = 64 \quad 1b$

2-54مطلوبست تجزیه نیروی $500N$ در راستای x, y, z و تعیین زوایای θ_z و θ_y و θ_x





$Fy = 500 \ \ Cos40 = 383 \ \ N$

$Fh = 500 \ \ Sin40$

$Fx = Fh \ Cos30$

$Fz = +Fh \ Sin30$

$Fx = 500 \ \ Sin40 \ \ Cos30 = 278.3 \ \ N$

$F_Z = 500 \ \ Sin40 \ \ Sin30 = 160.7 \ \ N$

$F = \sqrt{Fz^2 + Fy^2 + FZ^2} =$

$\sqrt{383^2 + 278.3^2 + 160.7^2} = 500 \ \ N$

$F \ Cos\theta \ x = Fx$

$Cos\theta \ x = \frac{278.3}{500}$

$\theta \ x = 56.2^\circ$

$OB = 33 \quad ft$

$BH = OB\ Cos\ 20$

$BH = 31$

$BH' = OB\ Sin20 = 11.28 \quad ft$

$A\ (0,56,0) \quad , \quad B\ (31,0,-11.28)$

$dx = -31 \qquad dy = +56 \qquad dz = 11.28$

	dx	dy	dx	d
AB	-31	56	11.28	65

Fx	Fy	Fz	F
-1860	3360	676.8	3900

$\frac{Fx}{dx} = F/d$

$Fx = -\frac{31}{65} x3900 = -1860 \ lb$

$F\ Cos\theta\ x = Fx$

$Cos\theta\ x = \frac{-1860}{3900}$

$\theta\ x = 118.5$

$Cos\theta\ y = \frac{3360}{3900}$

$\theta\ y = 30.5$

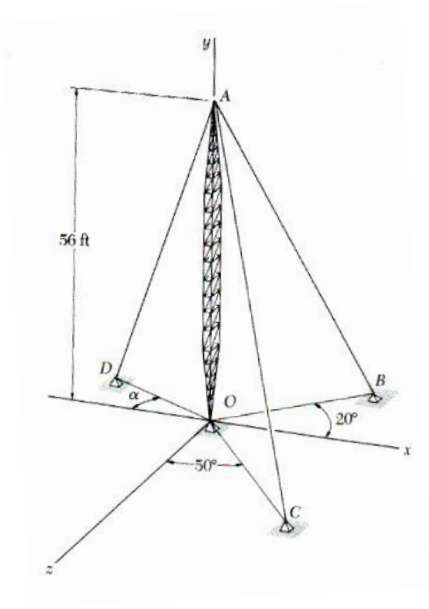
$Cos\theta\ z = \frac{676.8}{3900}$

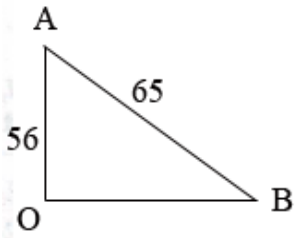
$\theta\ z = 80$

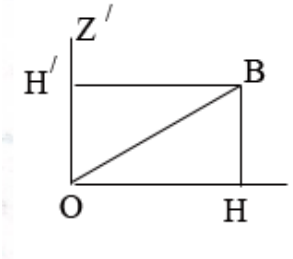
$Cos\theta\ y = \frac{Fy}{F} = \frac{383}{500} \qquad \theta\ y = 40$

$Cos\theta\ z = \frac{Fz}{F} = \frac{160.7}{500} \qquad \theta\ z = 71.3^{\circ}$

2-56 کابل AB برابر با ۶۵ فوت و کشش در آن برابر با 3900lb است، مطلوبست تجزیه این نیرو در راستای x, y, z و تعیین زوایای θ_z و θ_y و θ_x







2-60 تجزیه یک نیرو در راستای x,y,zبه ترتیب زیر است،مطلوبست تعیین این نیرو و زاویه θ_z و θ_y و θ_x

$Fx = 650\ N, F_Y = -320\ N, F_Z = 760\ N$

$Fx = 650$

$Fy = -320\ \ N$

$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2 + Fz^2} = \sqrt{650^2 + 320^2 + 760^2} = 1050\ N$

$Fz = 760\ \ N \qquad F = 1050\ N$

$$Cos\theta\, x = \frac{Fx}{F} = \frac{650}{1050} \qquad \theta\, x = 51.75$$

$$Cos\theta\, x = {Fy}/{F} = \frac{-320}{1050} \qquad \theta\, y = 107.7$$

$$Cos\theta\, z = \frac{Fz}{F} = \frac{760}{1050} \qquad \theta\, z = 43.6$$

2-62 جهت یک نیرو درمبدأ مختصات برابر با $\theta_X = 75, \quad \theta_Z = 130$ است،اگر تجزیه این نیرو در راستای yبرابربا 300lb باشد،مطلوبست تعیین زاویه F_Z و θ_y و $F\ , F_X$

$Cos^2\theta x + Cos^2\theta y + Cos^2\theta z = 1$

$\theta x = 75^\circ$

$Cos^2\theta y = 1 - Cos^2 75 - Cos^2 130 = 0.5198$

$\theta z = 130^\circ$

$\theta_Y = 43.9$

$Fy = 300\ 1b$

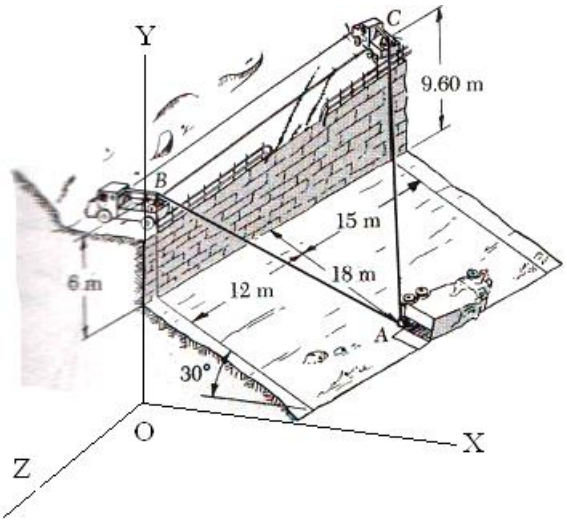
$Fy = F\ Cos\theta y$

$F = \frac{300}{Cos43.9} = 416\ \ lb$

$Fx = F\ Cos\theta x = 416 \times Cos75 = 107.66\ \ lb$

$Fz = F Cos\theta z = 416 \times Cos130 = -267.4\ \ lb$

2-64 برای اینکه یک کامیون را از یک سرا شیبی به بالا بکشند،دو کابل بوسیله دو قرقره به دو ماشین مطابق شکل وصل شده تا کامیون بالا کشیده شود،اگر کشش در کابلABبرابربا 10KN باشد،نیروهائی که به کامیون وارد می شوندرا محاسبه کنید .



$B\ (0,6+18\ \ Sin30,0)$

$A\ (18\ \ Cos30,0,-12) \qquad A\ (15.59,0,-12)$

$B\ (0,15,0)$

$\overrightarrow{AB}\ \ dx = -15.59\ \ \ dy = 15\ \ \ dz = 12$

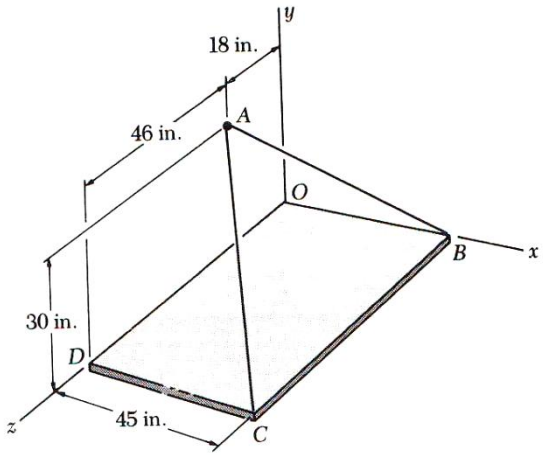
$$\frac{Fx}{dx} = {F}/{d}$$

$$F_X = 10x\frac{-15.59}{24.74} = -6.3\ KN$$

	dx	dy	dx	d
Cable AB	-15.59	15	12	24.74

Fx	Fy	Fz	F
-6.3	6.06	4.85	10 *KN*

2-66 اگر کشش در کابل ABبرابر با 285lbباشد ،مطلوبست تجزیه این نیرو در راستای xوyوz



$T_{AB} = 285\ lb$

$B\ (45,0,0)$

$A\ (0,30,18)$

$dy = 30 \qquad dz = 18$

$\overrightarrow{AB} \quad dx = -45$

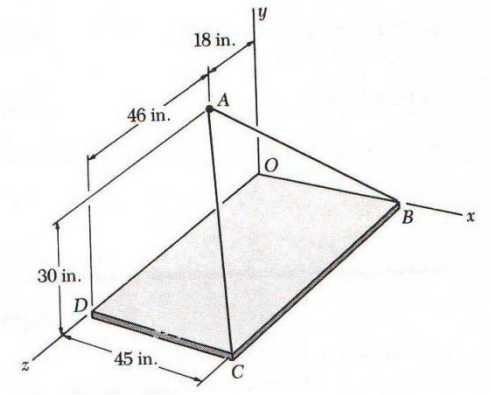
$$\frac{Fx}{dx} = F/d$$

$$Fx = 285x\frac{-45}{57} = -225\ lb$$

	dx	dy	dx	d
Cable AB	-45	30	18	57

Fx	Fy	Fz	F
-225	150	90	285

2-68 اگر کشش در کابل AB و BCبه ترتیب 285lbو 426lbباشد ،مطلوبست تجزیه برآیند این دو نیرو در راستای xوyوzو ثانیاً،تعین θ_z و θ_y و θ_x



$T_{AB} = 285\ lb \qquad T_{AC} = 426\ lb$

$B\ (45,0,0) \quad C\ (45,0,64) \quad A\ (0,30,18)$

$\overrightarrow{AB} \quad dx = +45 \quad dz = -18 \quad dy = -30$

$dz = +46 \quad dy = -30 \quad \overrightarrow{AC} \quad dx = +45$

	d_x	d_y	d_z	d	F_x	F_y	Fy	F
Cable AB	+45	-30	-18	57	+225	-150	-90	285
AC	+45	-30	+46	71	+270	-180	276	426
					R_X=495 R_Y=-330 R_z=186			

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2} = 623.3$$

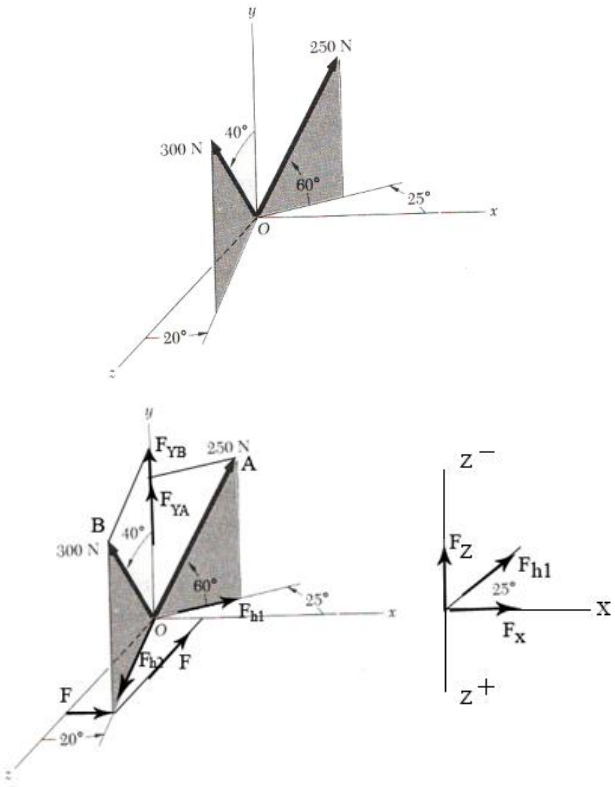
$$R = \sqrt{495^2 + 330^2 + 186^2} = 623.3\ lb$$

$$Cos\theta x = \frac{Rx}{R} = \frac{495}{623.3} \qquad \theta x = 37.4$$

$$Cos\theta y = \frac{-330}{623.3} \qquad \theta y = 122$$

$$Cos\theta z = \frac{+186}{623.3} \qquad \theta z = 72.6$$

2-70 مطلوبست برآیند این دو نیروی شکل زیر. و ثانیاً،تعین کنید زوایای θ_x و θ_y و θ_z



$$F_{yA} = 250Sin60$$

$$F_{yA} = 216.5 \ lb$$

$$F_{h1} = 250\,Cos60 = 125 \ lb$$

$$F_{XA} = F_{h1}Cos25$$

$$F_{XA} = 125Cos25 = 113.2 \ lb$$

$$F_{ZA} = -F_{h1}Sin25 = -125\,Sin25 = -52.8 \ lb$$

$$F_{YB} = 300\,Cos40 = 230 \ lb$$

$$F_{h2} = 300\,Sin40 = 192.8 \ lb$$

$$F_{XB} = 192.8Sin20 = 65.9 \ lb$$

$$F_{ZB} = F_{h2}Cos20 = 192.8Cos20 = 181.2 \ lb$$

$$R_X = F_{XA} + F_{XB} = 113.2 + 65.9 = 179 \ lb$$

$$R_Y = F_{YA} + F_{YB} = 216.5 + 230 = 446.5 \ lb$$

$$R_Z = F_{ZA} + F_{ZB} = 181.2 - 52.8 = 128.2 \ lb$$

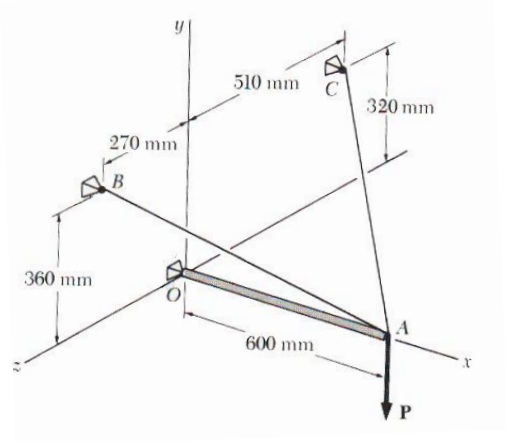
$$R = \sqrt{179^2 + 446.5^2 + 128.2^2} = 498 \ lb$$

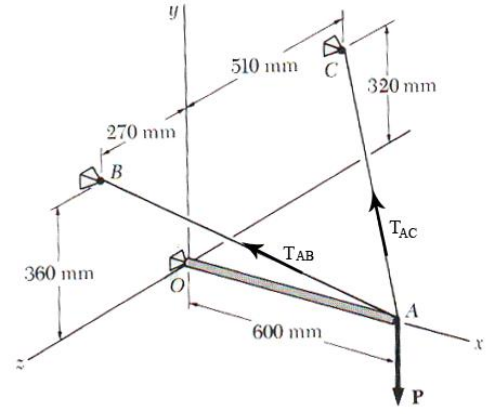
$$Cos\theta x = \frac{Rx}{R} = \frac{179}{498} \qquad \theta x = 68.9$$

$$Cos\theta y = \frac{Rx}{R}\,y = \frac{446.5}{498} \qquad \theta y = 26.3$$

$$Cos\theta z = \frac{Rx}{R} = \frac{128.2}{498} \qquad \theta z = 75.1$$

2-72 به بازویOA نیروئی مانندP اثر می کند،که بوسیله دو کابل مطابق شکل نگهه داری می شوند.کشش در کابل ABبرابر با 850Nاست،اگر برآیند دو نیرو در کابل ها و Pوارد برOA در راستایOA قرار گرفته باشد،مطلوبست کشش در کابلAC و تعیین نیرویP





$$T_{AB} = 850 \ \ N$$

$$P = ? \qquad T_{AC} = ?$$

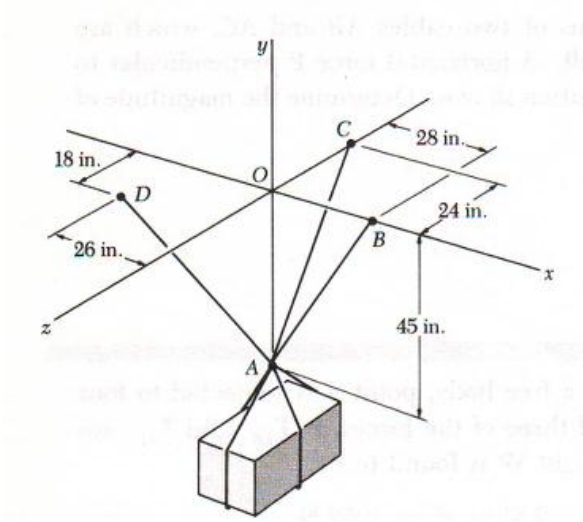
$$B\ (0,360,270) \qquad C\ (0,320,-510)$$

$$A\ (600,0,0)$$

$$\overrightarrow{AB} \qquad dx = -600 \qquad dy = +360$$

$$dz = +270$$

2-74وزنهW بوسیله سه کابل مطابق شکل نگهداری میشوند،اگر کشش در کابلAD، 924lb باشد وزنW را حساب کنید.



$W = ?$

$C\ (0,0,-24)$ $D\ (-26,0,18^{//})$

$A\ (0,-45,0)$ $B\ (28,0,0)$

$\overrightarrow{AB}$ $dx = 28$, $dy = 45$, $dz = 0$

$\overrightarrow{AC}$ $dx = 0$, 45 , $dz = -24$

$\overrightarrow{AD}$ $dx = -26$, 45 , $dz = 18$

Force	Distance			d
	dx	dy	dz	
T_{AB}	28	45	0	53
T_{AC}	0	45	-24	51
T_{AD}	-26	45	18	55
W				
total				

$\overrightarrow{AC}$ $dx = -600$ $dy = +230$

$dz = -510$

$F_X = \frac{850}{730} \times 600 = 680\ N$

	d_x	d_y	d_z	d
AB	-600	+360	270	750
AC	-600	+320	-510	850
P	0	0	0	0

F_x	F_y	Fy	F
-680	+408	+306	850
$-\frac{600}{850}T_{AC}$	$\frac{+320}{850}T_{AC}$	$-\frac{510}{850}T_{AC}$	T_{AC}
0	P	-	P

$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}$

$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}$ $R = R_X$

$Ry^2 + Rz^2 = 0$

$Ry = 0$ $Rz = 0$

$Ry = 306 - \frac{510}{850} T_{AC} = 0$

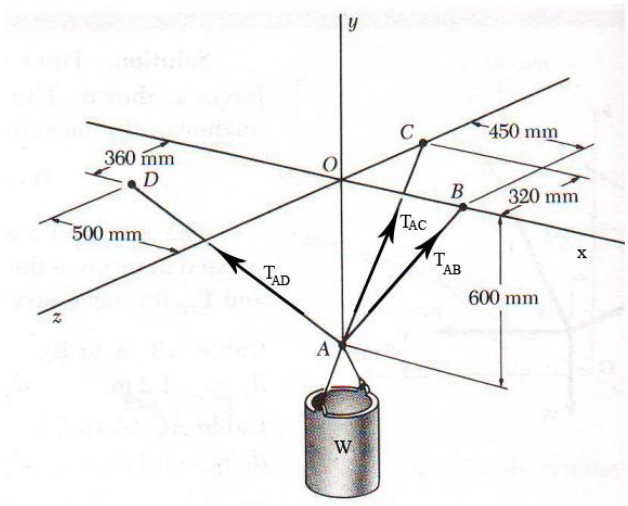
$T_{AC} = \frac{850 \times 306}{510} = 510$

$T_{AC} = 510\ N$

$408 + \frac{320}{850} T_{AC} - P = 0$

$408 + \frac{320}{850} x510 - P = 0$

$408 + 192 - P = 0$ $P = 600\ N$



$T_{AB} = 4\ \ KN$

$B\ (450,0,0)\ \ C\ (0,0,-320)\ \ \ D\ (-500,0,360)$

$A\ (0,-600,0)$

$\overrightarrow{AB}\quad dx = 450\quad dy = 600\quad ,\quad dz = 0$

$\overrightarrow{AC}\quad dx = 0\quad\quad dy = +600\quad\quad dz = -320$

$\overrightarrow{AD}\quad dx = -500\quad dy = 600\quad dz = 360$

Force	Distance			
	dx	dy	dz	d
T_{AB}	450	600	0	750
T_{AC}	0	600	-320	680
T_{AD}	-500	600	360	860
W				
total				

Force		
Fx	Fy	Fz
$0.528T_{AB}$	$0.85T_{AB}$	0
0	$0.8823T_{AC}$	$-0.47T_{AC}$
$-0.473T_{AD}$	$0.818T_{AD}$	$0.3247T_{AD}$
	-W	0

$$\begin{cases} 0.528T_{AB} - 0.473T_{AD} = 0 \\ 0.85T_{AB} + 0.8823T_{AC} + 0.818T_{AD} - W = 0 \\ -0.47T_{AC} + 0.327T_{AD} = 0 \end{cases}$$

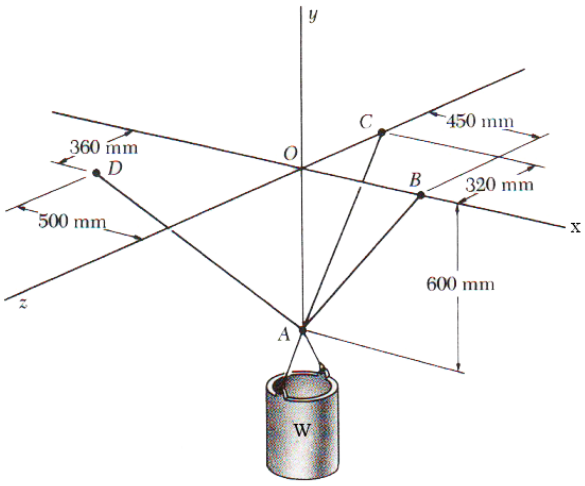
$T_{AB} = 827.75\ \ lb \qquad T_{AB} = 827.75\ \ lb$

$T_{AC} = 642.86\ \ lb$

$W = 0.85\ \ (827.75) + 0.8823\,(642.86) + 0.818\ \ (924)$

$W = 2025\ \ 1b$

2-76 سیلندرW بوسیله سه کابل مطابق شکل نگهداری می شوند،اگر کشش در کابلAB برابر با T_{AB}=4KN باشد،وزن سیلندر را حساب کنید.



Force		
Fx	Fy	Fz
$0.6\ T_{AB}$	$0.8\ T_{AB}$	0
0	$0.8823 T_{AC}$	$-0.4706 T_{AC}$
$-0.53814 T_{AD}$	$0.6976 T_{AD}$	$0.4186 T_{AD}$
0	-W	0

$$\begin{cases} 0.6\ T_{AB} - 0.5814\ T_{AD} = 0 \\ 0.8\ T_{AB} + 0.8823 T_{AC} + 0.6976\ T_{AD} - W = 0 \\ -0.4706\ T_{AC} + 0.4186\ T_{AD} = 0 \end{cases}$$

$$T_{AB} = 4\ KN \qquad T_{AD} = 4.128\ KN$$

$$T_{AC} = \frac{0.4186 T_{AD}}{0.4706} = 3.672\ KN$$

$$W = 0.8\ (4) + 3.67(0.8823) + 0.6976\ (4.128)$$

$$W = 9.32\ KN$$

2-78 اگر وزن سیلندر W در مسئله 2-76 برابر با 1165N باشد،کشش در هر کابل را محاسبه کنید.

سه معادله و سه مجهول از مسئله قبل داریم

$$\begin{cases} 0.6\ T_{AB} - 0.5814\ T_{AD} = 0 \\ 0.8\ T_{AB} + 0.8823 T_{AC} + 0.6976\ T_{AD} - W = 0 \\ -0.4706\ T_{AC} + 0.4186\ T_{AD} = 0 \end{cases}$$

$$-0.4706\ T_{AC} + 0.418\ \left(\frac{0.6 T_{AB}}{0.581}\right) = 0$$

$$T_{AC} = \frac{0.418}{0.47}\ \left(\frac{0.6 T_{AB}}{0.581}\right) = 0.918 T_{AB}$$

$$T_{AD} = \frac{0.47}{0.418}\ T_{AC} = \frac{0.47}{0.418}\ (0.918 T_{AB}) = 1.032 T_{AB}$$

$$0.8\ T_{AB} + 0.8823\,(0.918 T_{AB}) + 0.698\,(1.032) T_{AB} = 1165$$

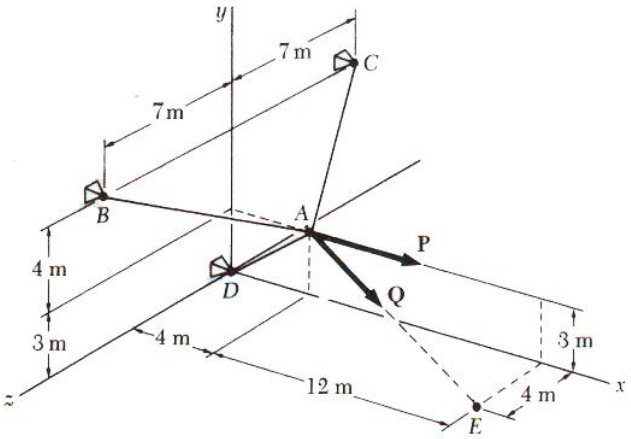
$$2.33 T_{AB} = 1165\ \ N$$

$$T_{AB} = 500\ \ N$$

$$T_{AD} = 1.032\, x500 = 516\ \ N$$

$$T_{AC} = 0.918\, x500 = 459\ \ N$$

2-80 سه کابل و دو نیروی P و Q مطابق شکل به گره A متصل شده اند،اگر P=0, Q=7.28KN باشند،مطلوبست کشش در هر سه کابل را.



$C\ (0,7,-7)$ $B\ (0,7,7)$ $E\ (16,0,4)$

$A\ (4,3,0)$ $D\ (0,0,0)$

$\overrightarrow{AC}$ $dx = -4$ $dy = 4$ $dz = -7$

$\overrightarrow{AB}$ $dx = -4$ $dy = 4$ $dz = 7$

$\overrightarrow{AE}$ $dx = 12$ $dy = -3$ $dz = 4$

$\overrightarrow{AD}$ $dx = -4$ $dy = -3$ $dz = 0$

Force	Distance			d
	dx	dy	dz	
AB	-4	4	7	9
AC	-4	4	-7	9
AE	12	-3	4	13
AD	-4	-3	0	5
P				

Fx	Fy	Fz
$-\frac{4}{9}\ T_{AB}$	$\frac{4}{9}\ T_{AB}$	$\frac{7}{9}\ T_{AB}$
$-\frac{4}{9}\ T_{AC}$	$+\frac{4}{9}\ T_{AC}$	$-\frac{7}{9}\ T_{AC}$
$\frac{12}{13}\ T_{AE}$	$-\frac{3}{13}\ T_{AE}$	$\frac{4}{13}\ T_{AE}$
$-\frac{3}{5}\ T_{AD}$	$-\frac{3}{5}\ T_{AD}$	0
P	0	0

P=0 ,Q=T_{AE}=0

$$(1) \Rightarrow -\frac{4}{9}\ T_{AB} - \frac{4}{9}\ T_{AC} + \frac{12}{13}\ (7.28) - \frac{4}{5}\ (T_{AD}) = 0$$

$$(2) \Rightarrow \frac{4}{9}\ T_{AB} + \frac{4}{9}\ T_{AC} - \frac{3}{13}\ (7.28) - \frac{3}{5}\ T_{AD} = 0$$

$$\frac{7}{9}\ T_{AB} - \frac{7}{9}\ T_{AC} + \frac{4}{13}\ (7.28) = 0$$

$$-\frac{7}{5} T_{AD} = -5.04 \qquad (1\&2) \qquad \text{جمع}$$

$$T_{AD} = 3.6 \quad KN$$

$$\frac{4}{9}\ T_{AB} + \frac{4}{9}\ T_{AC} - \frac{3}{13}\ (7.28) - \frac{3}{5}\ T_{AD} = 0$$

$$\frac{4}{9}\ T_{AB} + \frac{4}{9}\ T_{AC} - \frac{3}{13}\ (7.28) - \frac{3}{5}\ (3.6) = 0$$

$$T_{AB} + T_{AC} = 8.64$$

$$\frac{7}{9}\ T_{AB} - \frac{7}{9}\ T_{AC} + \frac{4}{13}\ (7.28) = 0$$

$$T_{AB} - T_{AC} = -2.88$$

$$\begin{cases} T_{AB} + T_{AC} = 8.64 \\ T_{AB} - T_{AC} = -2.88 \end{cases}$$

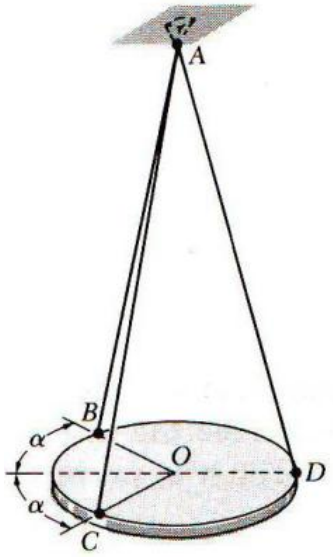
$$2\ T_{AB} = 5.76$$

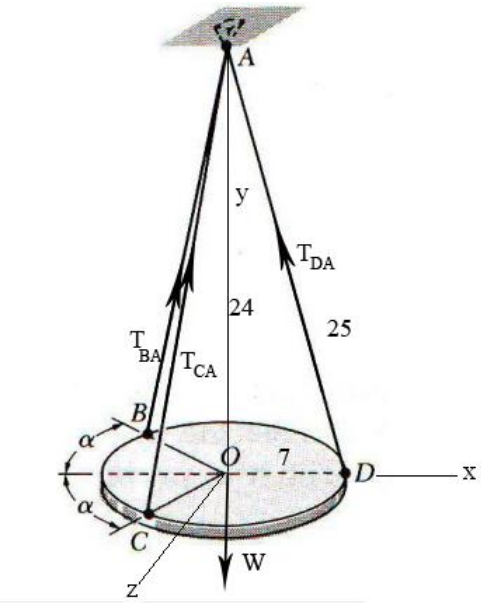
$$T_{AB} = 2.88 \quad KN$$

$$T_{AC} = 8.64 - 2.88$$

$$T_{AC} = 5.76 \quad KN$$

2-82 دیسکی به وزن ۱۲ پوندو به شعاع ۷ اینچ بوسیله سه کابل به طول ۲۵ اینچ مطابق شکل آویزان شده است،اگر زاویه $\alpha = 30$ باشد، کشش در هر کابل را محاسبه کنید.





$W = 12^{W}$

$R = 7^{1n}$

$L = 25^{1n}$

$\alpha = 30$

$A\ (0,24,0) \qquad D\ (7,0,0) \qquad O\ (0,0,0)$

$AO = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24\ in$

$C\ (-7\ Cos\alpha, 0,\ 7\ Sin\alpha)$

$B\ (-6\ Cos\alpha, 0, -7\ Sin\alpha)$

$C\ (-6.06, 0,\ 3.5)$

$B\ (-6.06, 0, -3.5)$

$\overrightarrow{DA} \qquad dx = -7 \quad , \quad dy = 24 \quad , \quad dz = 0$

$\overrightarrow{CA} \qquad dx = +6.06 \qquad dy = 24 \qquad dz = -3.5$

$\overrightarrow{BA} \qquad dx = +0.06 \qquad dy = +24 \qquad dz = +3.5$

Force	distance			d
	dx	dy	dz	
DA	-7	24	0	25
CA	6.06	24	-3.5	25
AE	6.06	24	3.5	25
W				

Component		
Fx	Fy	Fz
$-7/25\ T_{DA}$	$\frac{24}{25}\ T_{DA}$	0
$\frac{6.06}{25}\ T_{CA}$	$+\frac{24}{25}\ T_{CA}$	$-\frac{3.5}{25}\ T_{CA}$
$\frac{6.06}{25}\ T_{BA}$	$+24/25\ T_{BA}$	$\frac{+3.5}{25}\ T_{BA}$
	-12	

$$\begin{cases} -7\ T_{DA} + 6.06\ T_{CA} + 6.06\ T_{BA} = 0 \\ 24\ T_{DA} + 24T_{AC} + 24T_{BA} = 12 \times 25 \\ -3.5\ T_{CA} + 3.5T_{BA} = 0 \end{cases}$$

$T_{BA} = T_{CA}$

$C\ (0,4,0)$ $B\ (0,8,44)$ $A\ (30,-16,12)$

$\tan\alpha = {}^{16}\!/_{30}$ $\alpha = 28.07$

$N_Y = N\ Cos\alpha = N(Cos\alpha) = N(0.882)$

$N_X = NSin\alpha = N(Sin\alpha) = 0.47N$

$\overrightarrow{AB}$ $dx=-30$ $dy=24$ $dz=32$

$\overrightarrow{AC}$ $dz=-12$ $dy=20$ $dx=-30$

Force	distance			d
	dx	dy	dz	
AB	-30	-24	32	50
AC	-30	20	-12	38
W				
N				

Component		
Fx	Fy	Fz
$-{}^{30}\!/_{50}\ T_{AB}$	${}^{24}\!/_{50}\ T_{AB}$	${}^{32}\!/_{50}\ T_{AB}$
$\frac{-30}{38}\ T_{AC}$	$\frac{20}{38}\ T_{AC}$	$-{}^{12}\!/_{38}\ T_{AC}$
0	-180	0
0.47N	0.882N	

$$\begin{cases} -\frac{30}{50}\ T_{AB} - \frac{30}{38}\ T_{AC} + 0.47N = 0 \\ \frac{24}{50}\ T_{AB} + \frac{20}{36}\ T_{AC} - 180 + 0.882N = 0 \\ \frac{32}{50}\ T_{AB} - {}^{12}\!/_{38}\ T_{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{DA} + T_{BA} + T_{BA} = +12 \times {}^{25}\!/_{24} \\ T_{DA} + 2T_{BA} = 12.5 \end{cases}$$

$$-7\ (12.5 - 2T_{BA}) + 6.06T_{BA} + 6.06T_{BA} = 0$$

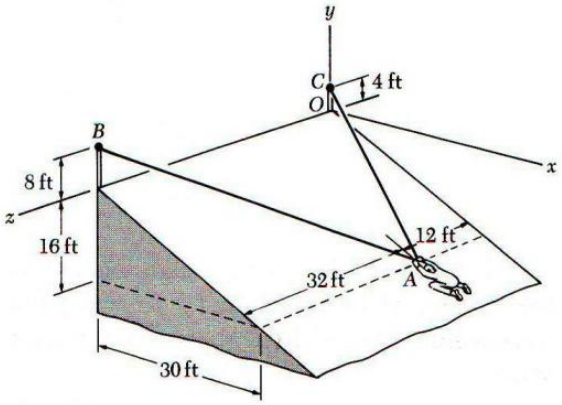
$$-87.5\ +14T_{BA} + 12.12T_{BA} = 0$$

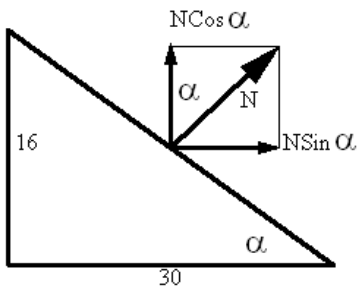
$$T_{BA} = \frac{87.5}{26.12} = 3.35\ \ lb$$

$$T_{CA} = T_{BA} = +3.35\ \ lb$$

$$T_{DA} = 12.5 - 2(3.35) = 5.8\ \ lb$$

84-2فردی می خواهد بوسیله دو طناب AB وACروی سطح شیبدار یخی به سمت بالا صعود کند،اگر وزن فرد ۱۸۰ پوند باشد ،مطلوبست کشش درهر دو طناب را ،به شرطی که بدانیم نیروی عکس العمل سطح شیبدار یخی به فرد عمود بر سطح شیب دار است.





Force	distance			d
	dx	dy	dz	
AB	-130	400	160	450
AC	-150	-240	-12	490
P				
W				

Component		
Fx	Fy	Fz
$\frac{-130}{450}\ T_{AB}$	$\frac{400}{450}\ T_{AB}$	$\frac{160}{450}\ T_{AB}$
$\frac{-150}{490}\ T_{AC}$	$\frac{400}{490}\ T_{AC}$	$\frac{-240}{490}\ T_{AC}$
P	0	0
	-400	0

$$\begin{cases} -\frac{130}{450}\ T_{AB} - \frac{150}{490}\ T_{AC} + P = 0 \\ -\frac{24}{50}\ T_{AB} + \frac{400}{490}\ T_{AC} - 400 = 0 \\ \frac{160}{450}\ T_{AB} - \frac{240}{490}\ T_{AC} = 0 \end{cases}$$

$$T_{AB} = 1.3775\ T_{AC}$$

$$\frac{400}{450}\ (1.3775)\ T_{AC} + \frac{400}{490}\ T_{AC} - 400 = 0$$

$$T_{AB} = \frac{12x50}{38x32}\ T_{AC} = 0.493 T_{AC}$$

$$\frac{30(0.493T_{AC})}{50} + \frac{30}{38} T_{AC} = 0.47N$$

$$0.2958T_{AC} + 0.789T_{AC} = 0.47N$$

$$N = 2.31T_{AC}$$

$$\frac{24}{50}(0.493T_{AC}) + \frac{30}{38} T_{AC} + 0.882(2.31)T_{AC} = 180$$

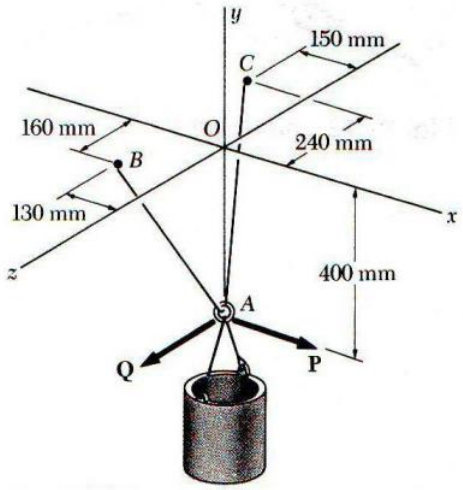
$$0.2366T_{AC} + 0.5263T_{AC} + 2.037T_{AC} = 180$$

$$2.8T_{AC} = 180$$

$$T_{AC} = 64.3\ lb$$

$$T_{AB} = 64.3 x 0.493 = 31.7\quad lb$$

2-86سیلندری به وزن 400Nبوسیله دو کابل ABوAC به گره Aمطابق شکل متصل شده است،اگرQ=0 باشد،مطلوبست تعیین نیروی P به طوری که سیستم به حالت تعادل قرار گیرد،ثانیاً کشش در کابلAC وAB را محاسبه کنید.



$C\ (-150,0,-240)\ B\ (-130,0,160)$

$A\ (0,-400,0)$

$w = 400 \quad NQ = ? \quad P = ?$

$\overrightarrow{AB} \quad dx = -130 \quad dy = 400 \quad dz = 160$

$\overrightarrow{AC} \quad dx = -150 \quad dy = 400 \quad dz = -240$

$$\frac{400}{450}\ (1.3775)\ T_{AC}+\frac{400}{490}\ T_{AC}-400=0$$

$$2.036T_{AC}+0.816T_{AC}-400=0$$

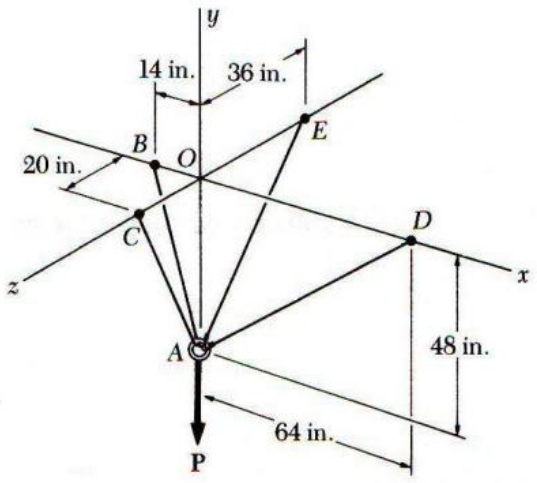
$$T_{AC}=+196\ \ N$$

$$T_{AB}=1.3775\,(196)=270\ \ N$$

$$P=\frac{130}{450}\ (270)+\frac{150}{490}(196)$$

$$P=138\ \ N$$

2-90 کابلBAC به یک حلقه بدون اصطکاک مطابق شکل متصل است ،حلقهA به دو کابل دیگر AE,ADهم وصل است، اگر نیروی$P=150lb$ باشد ،مطلوبست کشش در هر دوکابل را.



$D\ (64,0,0)\quad E\ (0,0,-36)$

$A\ (0,-48,0)$

$B\ (-14,0,0)\quad C\ (0,0,20)$

$\overrightarrow{AB}\quad dx=-14\quad dy=48\quad dz=0$

$\overrightarrow{AC}\quad dx=0\quad dy=48\quad dz=20$

$\overrightarrow{AD}\quad dx=64\quad dy=48\quad dz=0$

$\overrightarrow{AE}\quad dx=0\quad dy=48\quad dz=-36$

نیرو	dx	dy	dz	d
AB	-14	48	0	50
AC	0	48	20	52
AD	64	48	0	80
AE	0	48	-36	60
P				

-Fx	Fy	Fz
`	$48/50\ T_{AB}$	0
0	$48/52\ T_{AC}$	$20/52\ T_{AC}$
$64/80\ T_{AD}$	$48/80\ T_{AD}$	0
0	$48/60\ T_{AE}$	$-36/60\ T_{AE}$
0	-150	0

$$\begin{cases}-\dfrac{14}{50}\ T_{AB}+\dfrac{64}{80}\ T_{AD}=0\\[2ex]\dfrac{48}{50}\ T_{AB}+\dfrac{48}{52}\ T_{AC}+\dfrac{48}{80}\ T_{AD}+\dfrac{48}{60}\ T_{AE}=150\\[2ex]\dfrac{20}{52}\ T_{AC}-\dfrac{36}{60}\ T_{AE}=0\end{cases}$$

$$T_{AB}=\frac{64x50}{80x14}T_{AD}$$

$$T_{AB}=2.85714\ \ T_{AD}$$

$$T_{AC}=\frac{36x52}{20x60}T_{AE}$$

$$T_{AC}=1.56T_{AE}$$

$$T_{ABC}=T_{AC}=T_{AB}$$ قانون قرقره

$\overrightarrow{AC}$ $dx=-250\ Cos30$ $dy=-h$

$dz=250\ Sin30$

$\overrightarrow{AD}$ $dx=250$ $dy=-h$ $dz=0$

نیرو	dx	dy	dz
AB=50N	$-250\ Cos30$	-h	$-250\ Sin30$
50	$-250\ Cos30$	-h	$250\ Sin30$
50	250	-h	0
W			

d	Fy
$\sqrt{h^2+62500}$	$-h/\sqrt{h^2+6250}\times 50$
$\sqrt{h^2+62500}$	$-h/\sqrt{h^2+6250}\times 50$
$\sqrt{h^2+62500}$	$-h/\sqrt{h^2+6250}\times 50$
	-98.1

$\sum F_Y=0$

$3\times 50\times\dfrac{h}{\sqrt{h^2+62500}}=98.1$

$150\ h=98.1\ \sqrt{h^2+62500}$

$(150\ h)^2=(98.1)^2\ h^2+(62500)\ (98.1)^2$

$(912876.34)\ h^2=(62500)\ (98.1)^2$

$h=216.128\ mm$

$h^2=46711.51$

$h^2=(250)^2+(216.128)^2$

$h=330.5\ mm$

$\dfrac{48}{50}\ T_{AB}+\dfrac{48}{52}\ T_{AC}+\dfrac{48}{80}\ T_{AD}+\dfrac{48}{60}\ T_{AE}=150$

$0.96\ T_{AB}+0.923\ T_{AB}+\dfrac{48}{80}\ \dfrac{T_{AB}}{2.857}+\dfrac{48}{60}\ \dfrac{T_{AB}}{1.56}=150$

$2.6T_{AB}=150$

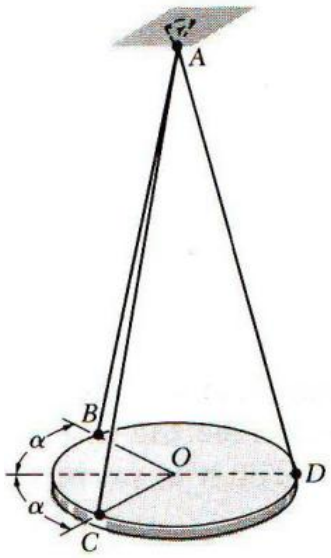
$T_{AB}=57.6\ lb$

$T_{AC}=T_{AB}=57.6\ lb$

$T_{AE}=\dfrac{57.6}{1.56}=36.9\ lb$

$T_{AD}=\dfrac{57.6}{2.85714}=21.1\ lb$

2-92 دیسکی به وزن ده کیلوگرم به شعاع 250mm بوسیله سه کابل به طول L مطابق شکل متصل است.اگر $\alpha=30$ باشد،مطلوبست کوچکترین طول قابل قبولL وقتی که کشش در هر سه کابل از50N تجاوز نکند.



$T_{AB}=T_{AC}=T_{AD}=50\ N$

$w=10\times 9.81=98.1\ N$

$A\ (0,h,0)$

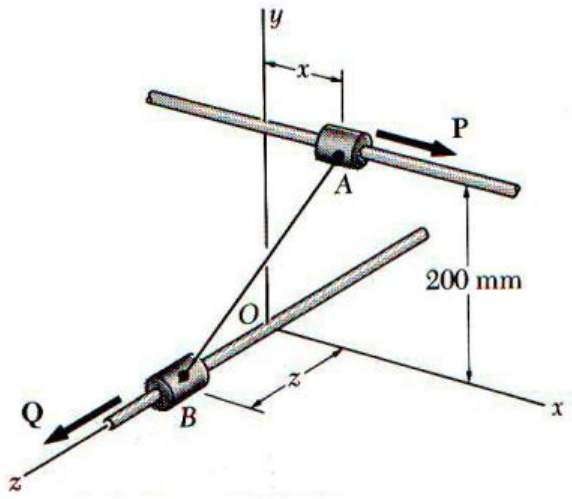
$B\ (-250\ Cos30,0,-250\ Sin30)$

$C\ (-250\ Cos30,0,250\ Sin30)$

$\overrightarrow{AB}$ $dx=-250\ Cos30$ $dy=-h$

$dz=-250\ Sin30$

2-94دو طوقه AوB بوسیله سیمی به طول250mm بهم وصل شده اندو آزادانه روی دو میله بدون اصطکاک می لغزند، اگر نیروی $P = 200N$, $Q = 100N$باشد و سیستم به حالت تعادل برسد،مطلوبست تعیین فاصلهx وy .



$A\ (X,200,0)$ $B\ (0,0,Z)$

$Q = 100$

$P = 200\ N$

$dy = -200$ $dx = -x$ $\overrightarrow{AB}$

$dz = +z$

	dx	dy	dz	d
T_{AB}	-X	-200	+Z	250
P				
Q				

Fx	Fy	Fz
$\frac{-X\ T_{AB}}{250}$	$\frac{-200\ T_{AB}}{250}$	$\frac{+Z\ T_{AB}}{250}$
200	0	0
		100

$$\frac{-X\ T_{AB}}{250} + 200 = 0$$

$$\frac{-Z\ T_{AB}}{250} + 100 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{X}{Z} = 2$$

$$(AB)^2 = X^2 + Z^2 + 40000 = (250)^2$$

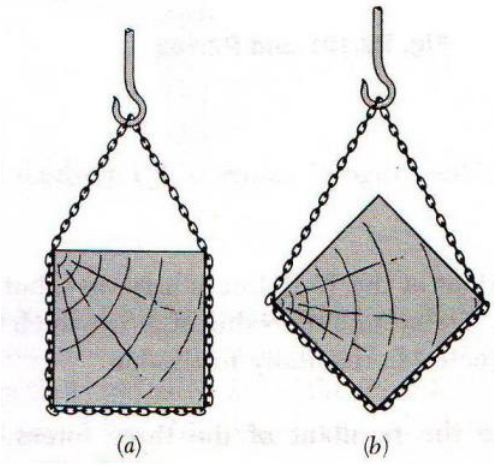
$$X^2 + Z^2 = 22500$$

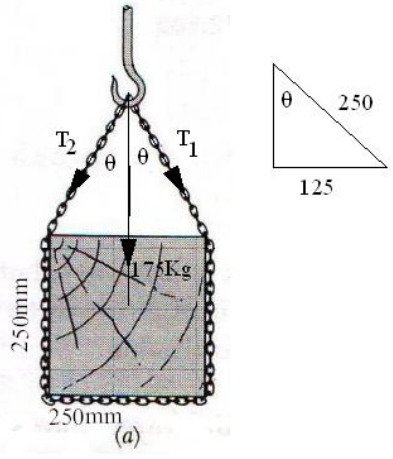
$$Z^2 + 4Z^2 = 22500$$

$$Z = 67.1\ \ mm$$

$$X = 134.2\ \ mm$$

2-96 زنجیری به طول1.25m اطراف یک صندوق به ا بعاد250x250mmپیچیده شده و از یک قلاب آویزان است،اگر وزن این صندوق۱۷۵ کیلوگرم باشد ، مطلوبست کشش در هر زنجیر و در هر دو حالت فوق را.





$$Sin\theta = \frac{HB}{OB} = \frac{250\sqrt{2}}{375\,x2} \qquad \theta = 28.12$$

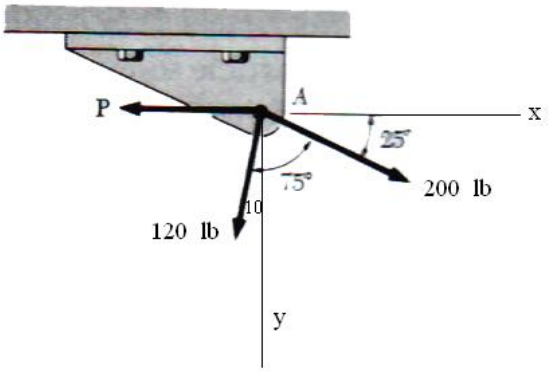
$$\sum F_Y = 0$$

$$T_1\ Cos28.12 + T_{\ 2} Cos28.12 = 175$$

$$2T_1 Cos28.12 = 175$$

$$T_1 = T_2 = 99.2\ \ kg = 99.2x9.81 = 973.3\ \ N$$

2-98 مطلوبست تعیین حدود نیروی P وقتی که برآیند نیروها از 225lb تجاوز نکند.



$$R \le 225\ lb$$

$$\sum Fx = Rx$$

$$-p + 200\ \ Cos25 - 120\,Sin10 = Rx$$

$$-p + 160.42 = Rx$$

$$\sum Fy = Ry$$

$$Ry = +200\ \ Sin25 + 120\ \ Cos10 = 202.7$$

$$R = \sqrt{(160.42 - P)^2 + (-202.7)^2} \le 225$$

$$(160.42 - P)^2 + (202.7)^2 \le 50625$$

$$P^2 - 320.84P + 16196.866$$

$$P = \frac{320.84 \mp 195.32}{2}$$

$$P = 258\ ,\ 62.8$$

$$\boxed{62.8\ \ lb \le P \le 258\ \ lb}$$

$$250 \times 250$$

$$L = 1.25^{\ M}$$

$$L' = 3\ \ (250) = 750^{\ mm}$$

$$\Delta L' = 1250 - 750 = 500^{\ mm}$$

$$L_1 = \frac{2500}{2} = 250^{\ mm}$$

$$h1 = \frac{250}{2} = 125\ \ mm$$

$$Sin\theta = \frac{125}{250} \qquad \theta = 30$$

$$\sum F_X = 0$$

$$T_1\ Sin30 = T_{\ 2} Sin30$$

$$T_1 = T_2$$

$$\sum F_Y = 0$$

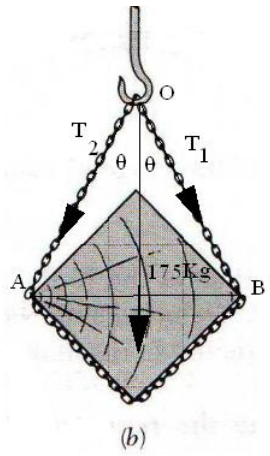
$$T_1\ Cos30 + T_{\ 2} Cos30 = 175$$

$$2T_1\ Cos30 = 175$$

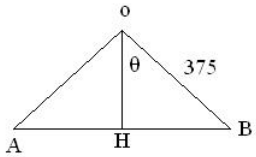
$$T_1 = T_2 = 151\ \ Kg$$

$$T_1 = T_2 = 151 \times 9.81 = 991\ \ N$$

b)



(b)



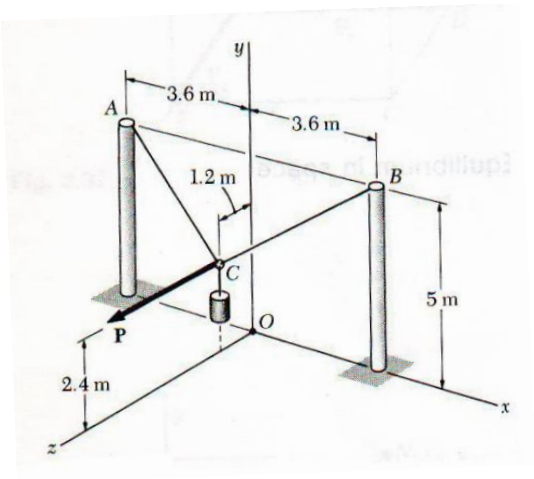
$$2 \times 250 = 500$$

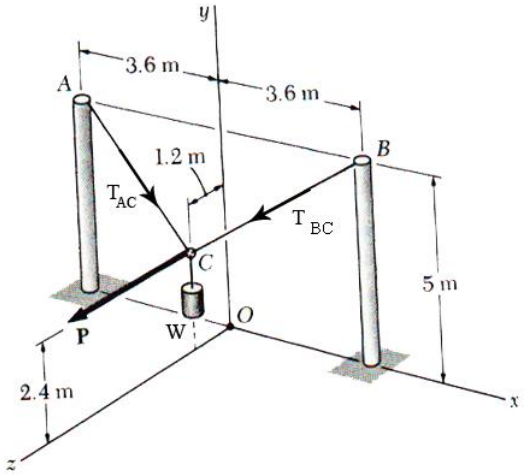
$$L' = 1250 - 500 = 750$$

$$L'/2 = 375 \quad mm$$

$$AB = 250\sqrt{2} \qquad \text{هندسه}$$

2-100 سیلندر W به وزن 650N بوسیله دو کابل AC و BC مطابق شکل نگهداری می شوند. نیروی P در راستای Z به سیلندر اثر می کند، مطلوبست کشش در کابل AC و BC تعیین کنید نیروی P را ،ثانیاً تعیین کنید زاویه $\theta x, \theta y, \theta z$ نیروی BC را.





$A\ (-3.6,5,0)$ $B\ (3.6,5,0)$ $C\ (0,2.4,1.2)$

$\overrightarrow{AC}$, $dx=+3.6$ $dy=-2.6$ $dz=1.2$

$\overrightarrow{BC}$ $dx=-3.6$, $dy=-2.6$ $dz=1.2$

Forc	dx	dy	dz	d
AC	+3.6	-2.6	+1.2	46
BC	-3.6	-2.6	+1.2	46
P				
W				

Fx	Fy	Fz
$\frac{+3.6}{46}\ T_{AC}$	$\frac{-2.6}{46}\ T_{AC}$	$+1.2/46\ T_{AC}$
$\frac{-3.6}{46}\ T_{BC}$	$\frac{-2.6}{46}\ T_{BC}$	$+1.2/46\ T_{BC}$
0	0	P
0	-650	0

$$\frac{3.6}{46}\ T_{AC}-\frac{3.6}{46}T_{BC}=0 \ \Rightarrow\ T_{AC}=T_{BC}$$

$$\frac{-2.6}{46}\ T_{AC}-\frac{2.6}{46}\ T_{BC}-650=0$$

$$-2\ T_{AC}=\frac{650\times 46}{2.6} \qquad T_{CA}=5750\ \ lb$$

$$\frac{1.2}{46}\ T_{AC}+\frac{1.2}{46}\ T_{BC}-P=0$$

$$p=2\times\frac{1.2}{46}\times 5750 \qquad P=300\ \ N$$

در راستای Z

$$Fx_{BC}=-\frac{3.6}{46}\ (5750)=-450\ \ ^{N}$$

$$Fy_{BC}=\frac{-2.6}{46}\ (5750)=-325\ \ ^{N}$$

$$Fz_{BC}=\frac{1.2}{46}\ (5750)=150\ \ ^{N}$$

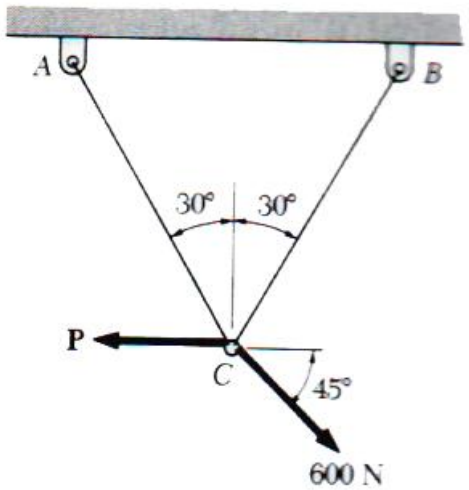
$$F=\sqrt{Fx_{BC}^2+Fy_{BC}^2+Fz_{BC}^2}=575\ \ N$$

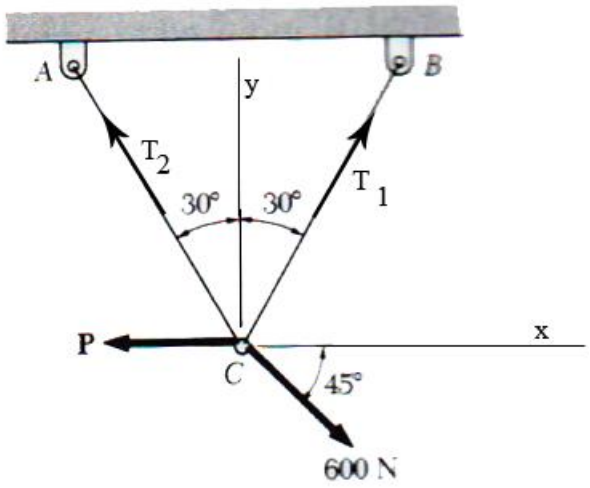
$$Cos\theta x=\frac{Fx}{F}=\frac{-450}{575} \qquad \theta x=141.5^{\circ}$$

$$Cos\theta y=\frac{Fy}{F}=\frac{-325}{575} \qquad \theta y=124.4^{\circ}$$

$$Cos\theta z=\frac{150}{575} \qquad \theta z=74.9^{\circ}$$

2-102 مطلوبست تعیین حدود نیروی P وقتی که دو کابل سیستم زیررا به حالت تعادل حفظ می کنند.





$$600\ Cos405+T_1\ Sin30-T_2\ Sin30-P=0$$

$$-600\ Sin45+T_1\ Cos30-T_2\ Cos30=0$$

$$T_1=\frac{600\ Sin45-T_2\ Cos30}{Cos30}$$

$$600\ Cos45+\frac{600\ Sin30\ Sin45-T_2\ CosSin30}{Cos30}-T_2Sin30-P=0$$

$$600\ Cos45+600\tan 30\ Sin45-T_2\ Sin30-T_2\ Sin30-P=0$$

$$600\ Cos45+600\tan 30\ Sin45=T_2\ 0.5+T_2\ 0.5+P=0$$

$$+T_2+P=669$$

$$T_1=\frac{600\ Sin45-T_2\ Cos30}{Cos30}$$

$$T_1=490-T_2$$

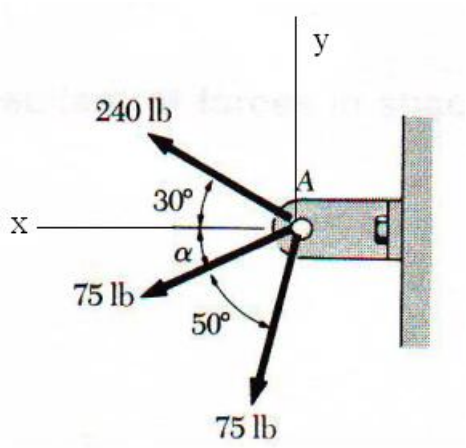
$$\begin{cases} T_2+T_1=490 \\ T_2+P=669 \end{cases}$$

$$-T_1+P=669-449$$

$$T_2+P=669$$

$$179N\le P\le 669N$$

2-104 مطلوبست برآیند سه نیروئی که به نقطه A وارد می شوند،وقتی که اولاً $\alpha=0^\circ$ و ثانیاً $\alpha=25^\circ$ باشد.



$$\sum Fx=Rx$$

$$Rx=240\ \ Cos30+75Cos\alpha+75Cos(\alpha+50)$$

$$\sum Fy=Ry$$

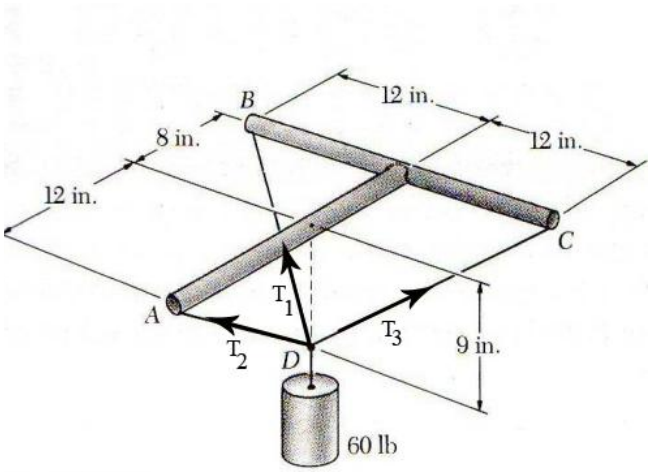
$$Ry=240\ \ Sin30-75Sin\alpha-75Sin(\alpha+50)$$

$$a)\qquad \alpha=0$$

$$Rx=240\ \ Cos30+75\ \ Cos50=331\ \ lb$$

$$Ry=240\ \ Sin30-75\ \ Sin(50)=62.5\ \ lb$$

$$\tan\theta=\frac{Fy}{Fx}=\frac{62.5466}{331.055}$$



$A\ (0,0,12)$

$\overrightarrow{DB} \quad dx=-12 \quad dy=-9 \quad dz=8$

$B\ (-12,0,-8)$

$\overrightarrow{DA} \quad dx=0 \quad dy=-9 \quad dz=-12$

$C\ (12,0,-8)$

$\overrightarrow{DC} \quad dx=-12 \quad dy=-9 \quad dz=8$

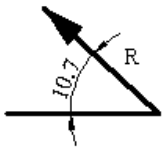
$D\ (0,-9,0)$

Forc	dx	dy	dz	d
T_1	12	-9	8	17
T_2	0	-9	-12	15
T_3	-12	-9	8	17
W				

Fx	Fy	Fz
$\frac{12}{17}\ T_1$	$-9/17\ T_1$	$8/17\ T_1$
0	$-9/15\ T_2$	$-12/15\ T_2$
$\frac{-12}{17}\ T_3$	$-9/17\ T_3$	$8/17\ T_3$
	-60	

$$Sin\theta=\frac{Fy}{R}$$

$$R=\frac{62.5466}{Sin\theta}=337 \quad lb$$



$a)\ \alpha=25$

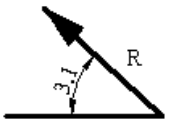
$$Fx=240\ \ Cos30+75\ \ Cos25+75\ \ Cos(75)=295.23\ \ lb$$

$$Fy=240\ \ Sin30-75\ \ Sin25-75\ \ Sin\ (75)=15.86\ \ lb$$

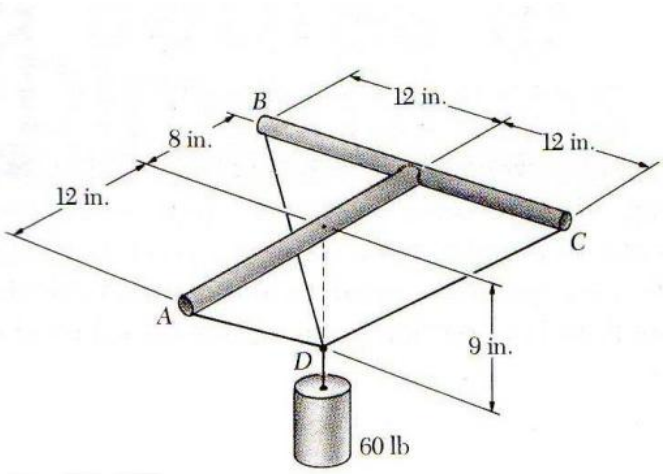
$$\tan\theta=\frac{Fy}{Fx}=\frac{15.86}{295.23}$$

$$\theta=3.1$$

$$R=\frac{15.86}{Sin\theta}=215.7 \quad lb$$



2-106 سه کابل به نقطهD مطابق شکل متصل شده اند،اگر وزن سیلندر ۶۰ پوند باشد،مطلوبست کشش در سه کابل را.



$$\begin{cases} \frac{12}{17}T_1 - \frac{12}{17}T_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_3 \\ \frac{9}{17}T_1 + \frac{9}{15}T_2 + \frac{9}{17}T_3 = 60 \\ \frac{8}{17}\ T_1 - 12\!\!\diagup_{15}\ T_2 + 8\!\!\diagup_{17}\ T_3 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{8}{17} \times 2\ T_1 - \frac{12}{15}\ T_2 = 0$$

$$T_1 = 0.85\ T_2$$

$$\frac{9}{17}\ T_1 + \frac{9}{15}\ (\frac{T_1}{0.85}) + \frac{9}{17}\ T_1 = 60$$

$$T_1 = 34\ lb$$

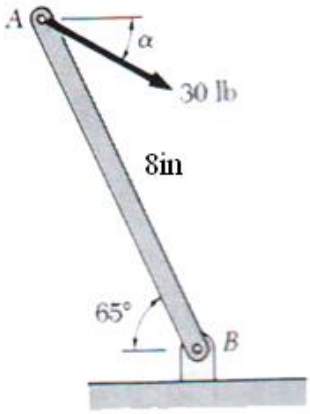
$$T_3 = 34\ lb$$

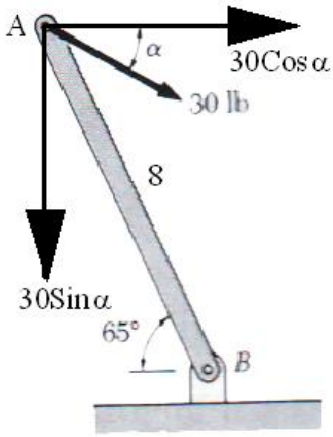
$$T_2 = \frac{34}{085} = 40\ lb$$

فصل ۳

اجسام صلب،سیستم نیروهای متعادل

3-2نیروی30lb به میلهAB مطابق شکل اثر می کند، اگر طـول میله8 in و گشتاور این نیـرو نسـبت بـهB، 180 lb-in موافـق عقربه ساعت باشد،مطلوبست تعیین زاویه α





$M_B = 180 \quad lb-in$

$\sum M_B = 0 \quad \curvearrowleft^+$

$M_B = 180 = 30Cos\alpha(8Sin65) - 30Sin\alpha(8Cos65)$

$180 = 217.5Cos\alpha - 101.4Sin\alpha$

$Cos\alpha - 0.4663Sin\alpha = 0.8275$

$\tan\beta = 0.4663 \quad \Rightarrow \beta = 25^\circ$

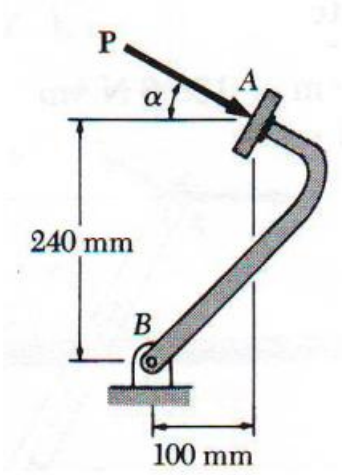
$Cos\alpha - \frac{Sin\beta}{Cos\beta}Sin\alpha = 0.8275$

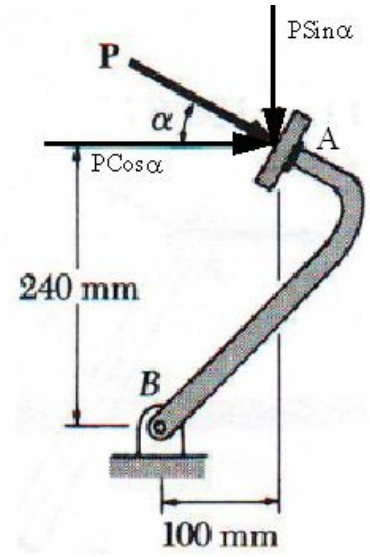
$Cos\alpha Cos\beta - Sin\beta Sin\alpha = 0.8275 Cos25 = 0.75 = Cos(41.41)$

$Cos(\alpha+\beta) = Cos41.41$

$\alpha + \beta = 41.4 \quad \alpha = 16.4^\circ$

3-4 نیـرویP بـه پـدال ترمـز ماشـین مطـابق شـکل وارد مـی شود،اگر نیرویp=450N و $\alpha = 30^\circ$باشد،مطلوبسـت گشـتاور نیرویP نسبت به نقطهB





$P = 450 \quad N$

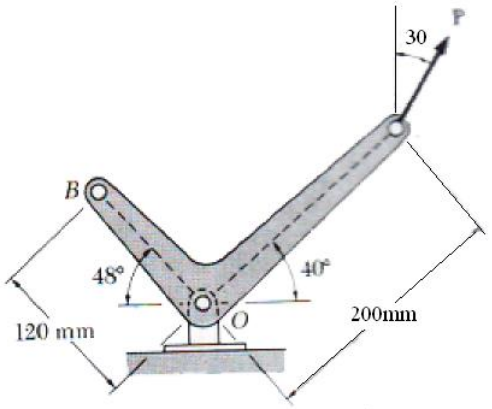
$M_B = P\,Cos\alpha\ (240) + P\,Sin\alpha\ (100)$

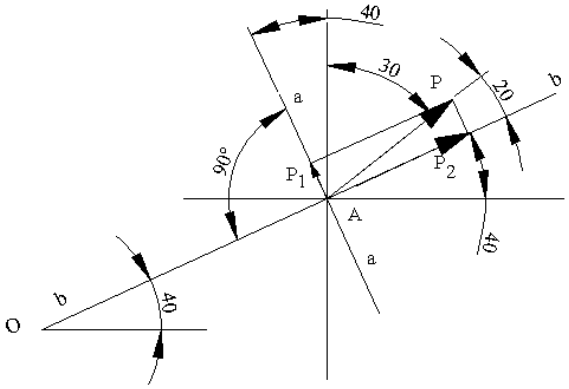
$M_B = (450)\ (\frac{240}{1000})\ Cos30 + 450\ (\frac{100}{1000})\ (Sin30)$

$M_B = 22.5 + 93.5 = 116 \quad N-m$

3-6 نیرویP=400N به نقطهA مطابق شکل اثر مـی کنـد، بـا روش تجزیه نیرویP روی محور OA،گشتاور این نیـرو را نسـبت

به نقطه Oبدست آورید،اگر نیروئی مانندQ به نقطهB اثر کند،مطلوبست تعیین نیرویQ وجهت آن،اگر گشتاور این نیرو نسبت به نقطهO مساوی گشتاور نیرویP نسبت بهO باشد.





P2 از نقطه O می گذرد،پس گشتاور آن صفر است.

$$P_1 = PCos70$$

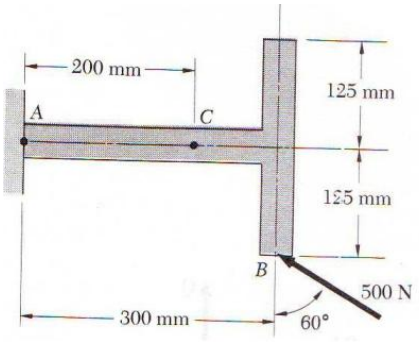
$$\sum M_O = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

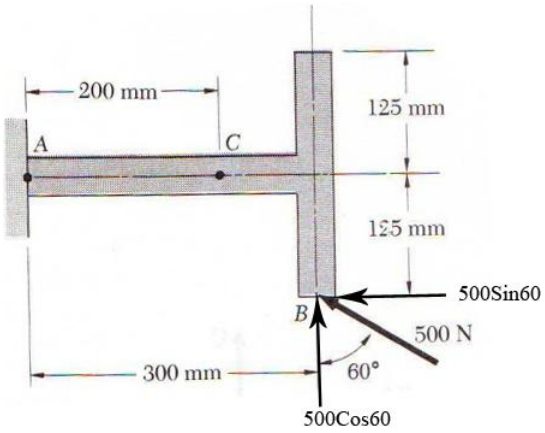
$$M_O = (PCos70)(0.2) = 27.4 \quad N-m$$

$$(F)(0.12) = 27.4$$

$$F = 228.3 \quad N$$

3-8 مطلوبست گشتاور نیروهای نشان داده شده نسبت به نقطهA ، (a) بوسیله روش تجزیه نیرو در راستایx وy و (b)بوسیله روش تجزیه نیرو ،یکی در راستایAB ودیگری عمود بر آن





$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

$$M_A = -500\,Cos60(0.3) + 500\,Sin60(0.125)$$

$$M_A = -75 + 54.1 = -20.9 \quad N-m$$

P2 از نقطه A می گذرد،پس گشتاور آن صفر است.

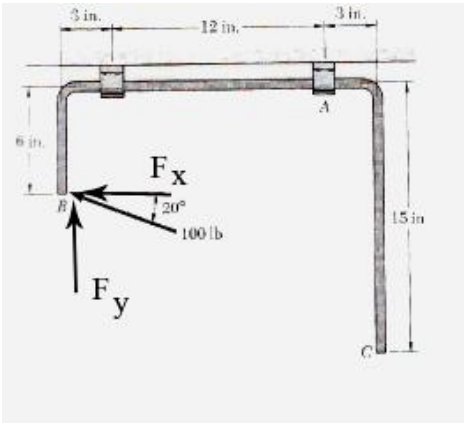
$$P_1 = 500Sin7.4$$

$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

$$M_A = -(500Sin7.4)(AB)$$

$$M_A = -(500Sin7.4)\sqrt{0.125^2 + 0.35^2} = -20.9 \quad N-m$$

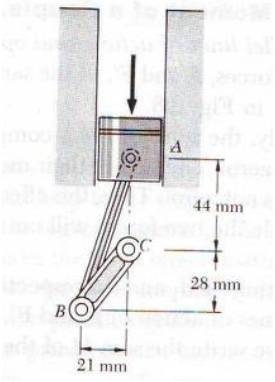
3-10 مطلوبست گشتاور نیروی 100lbنسبت به نقطهC ،ثانیاً فاصله امتداد نیرویF نسبت به نقطهC را پیدا کنید.

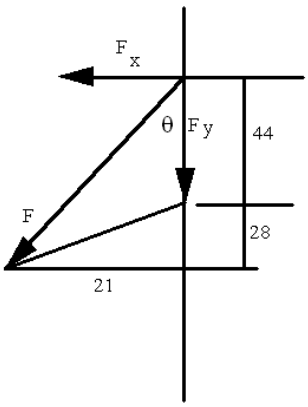


$A\ (18,6)$ $B\ (3,0)$

$$Fy = 100\ \ Sin20$$
$$Fx = 100\ \ Cos20$$
$$\sum M_C = 0\ \ \curvearrowleft^{+}$$
$$\sum M_C = 18\times 100\ Sin20 - 100\ Cos20\times 9$$
$$M_C = -230 \qquad M_C = 230\ 1b-1n$$
$$Fd = MC$$
$$100\ \ d = 230$$
$$d = 2.3\ \ in$$

3-12 در پیستون موتور شکل زیر نیروی1.5KN در راستایAB اثر می کند،مطلوبست گشتاور این نیرو نسبت به نقطه C.

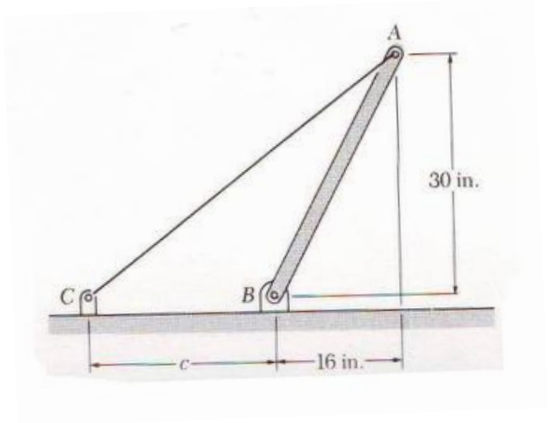


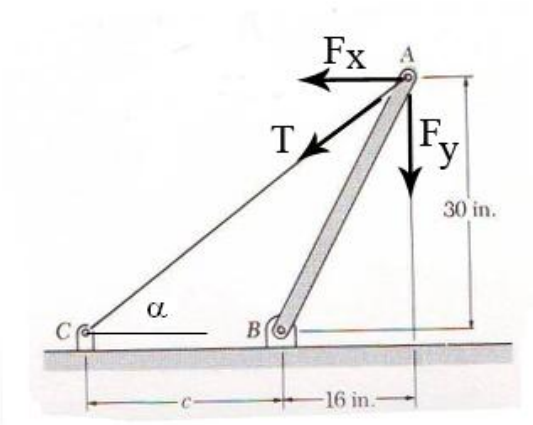


$$\tan\theta = \frac{21}{72}$$
$$\theta = 16.26$$

$$M_C = Sin\theta\ F_x(0.044) = (Sin16.26)(1.5)(0.044)$$
$$= 18.5\ \ N-m\ \ \curvearrowleft^{-}$$

3-14 میلهAB توسط کابل ACنگهداری می شود،اگر"C=56 و گشتاور آن نسبت به نقطهB، lb-in 280باشد ،مطلوبست کشش در کابل ACرا.





$M_B = 280\ 1b - ft$

$T = ?\quad 1ft = 12\ in$

$$\tan\alpha = \frac{30}{72}$$

$$\alpha = 22.62$$

$$A = 90 - 22.62 = 67.38$$

$$Fy = T\ Cos\ A \qquad Fx = T\ Sin\ A$$

$$\sum M_B = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

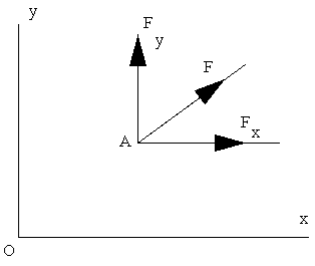
$$M_B = T\ SinA\ (\frac{30}{12}) \ - T\ CosA\ (16/12)$$

$$280 = T\left[\begin{vmatrix} j \\ Y_1 \\ Y_2 - Y_1 \end{vmatrix} (Sin67.38)\ \ \frac{30}{12} - \frac{16}{12}\ \ Cos(67.38)\ \right]$$

$$280 = T(1.7948)$$

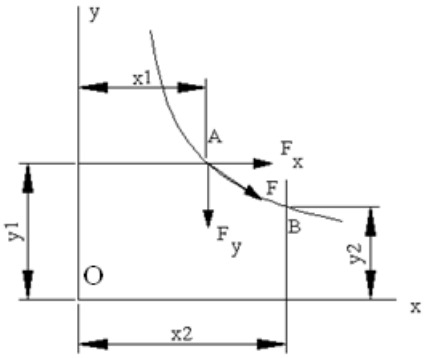
$$T = 156\quad lb$$

3-16نیروی $F = F_X i + F_Y j$ به نقطهA به مختصات(A(x,y
اثر می کند،مطلوبست گشتاور این نیرو نسبت به نقطه O



$$M_O = (Fx)\ (y) - Fy\ (x)$$

3-18اگر جهت نیروی F از نقطهA به Bبه مختصات $A(X_1, Y_1)$ و $B(X_2, Y_2)$ اثر می کند،مطلوبست گشتاور این نیرو نسبت به نقطه O



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overrightarrow{F} = \overline{F}\ \ \frac{(X_2 - X_1)i + (Y_2 - Y_1)j}{AB}$$

$$\overrightarrow{R_{OA}} = X_1 i + Y_1 j$$

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{R_{OA}} x \overrightarrow{F}$$

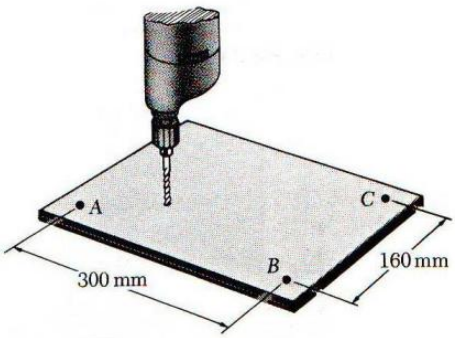
$$\overrightarrow{M_O} = \frac{F}{AB}\begin{vmatrix} i & j & k & i \\ X_1 & Y_1 & 0 & X_1 \\ X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & 0 & X_2 - X_1 \end{vmatrix}$$

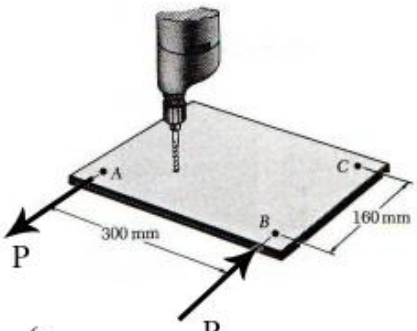
$$\overrightarrow{M_O} = \frac{F}{AB}\left[x_1(y_2 - y_1)k \ \ - y_1(x_2 - x_1)k\ \right]$$

$$= \frac{F}{AB}(x_1 y_2 - x_1 y_1 - y_1 x_2 + y_1 x_1)\ k$$

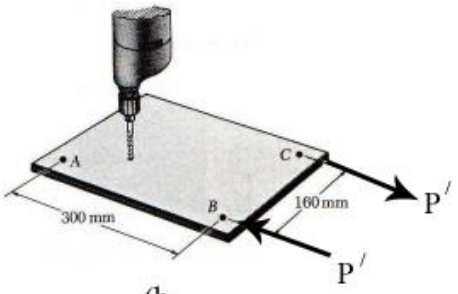
$$M_O = \frac{F(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

3-20صفحه چوبی بوسیله دستگاه مته سوراخ می شوند، اگر مته گشـتاور 5N-mبـر کـل صـفحه چـوبی وارد کند،مطلوبسـت تعیین،(a)کوپل نیرو درA,B ،در(b) B,C وو (c)درA,C

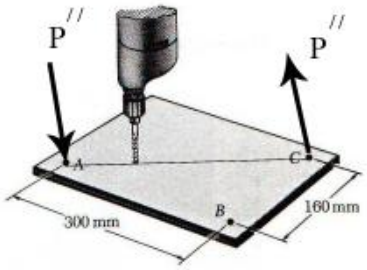




(a



(b



(c

$$M = F.d$$

$$p\ (\frac{300}{1000}) = 5\ \ N - M$$

$$P = 16.66\ \ N$$

$$P'\ (\frac{160}{1000}) = 5$$

$$P' = 31.25\ \ N$$

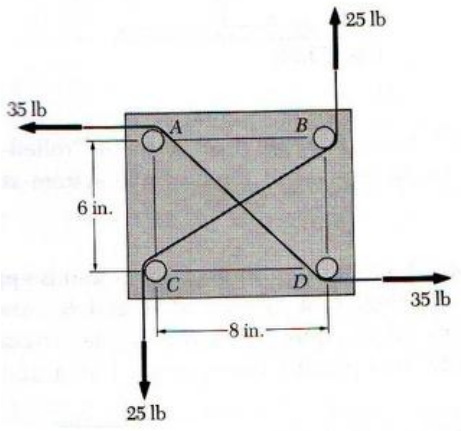
$$d^2 = (160)^2 + (300)^2$$

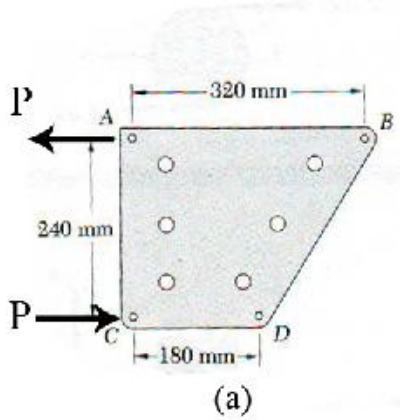
$$d = AC = 340\ \ mm$$

$$p'' = (\frac{340}{1000}) = 5$$

$$p'' = 14.71\ \ N$$

3-22 چهار میخ چوبی به قطر مسـاوی مطـابق شـکل بـه یـک صفحه چوبی متصل شده انـد،دو طنـاب مطـابق شـکل دور مـیخ چوبی عبور کرده و کشیده می شوند،گشتاور کل وارد بـه صـفحه چوبی 485lb-in موافق عقربه ساعت است، قطـر مـیخ چـوبی را محاسبه کنید.





(a)

a)

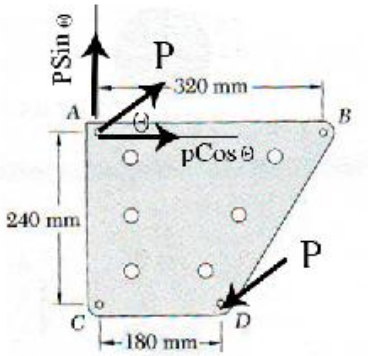
$M = 4 \;\; N-M$

$M = 6\times 4 = 24 \;\; N-M$

$P\times 0.240 = 24$

$P = 100 \;\; N$

b)



(b)

$P\,Cos\theta\times\frac{240}{1000}+P\,Sin\theta\times\frac{180}{100}=24$

$d=\sqrt{240^2+180^2}=300\;mm$

$(P)\;(\frac{300}{1000})=24$

$P=80 \;\; N$

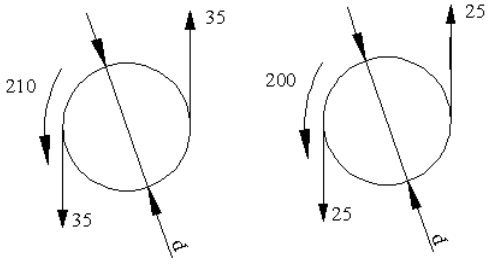
$0.24\;Cos\theta+0.18\;Sin\theta=24/80$

$1.333\;Cos\theta+Sin\theta=1.6666$

$\tan\phi=1.3333 \quad \phi=53.1$

$Sin\;(\theta+\phi)=1.6666\;\;Cos\phi$

$1.666\,Cos53.1=1.0=Sin90$



$M_1 = 25x8 = 200 \;\; lb-in$

$M_2 = 35x6 = 210 \;\; lb-in$

$M = 485 \;\; lb-in \;\; \curvearrowleft^{+}$

$\sum M = \sum F.d = 0 \;\; \curvearrowleft^{+}$

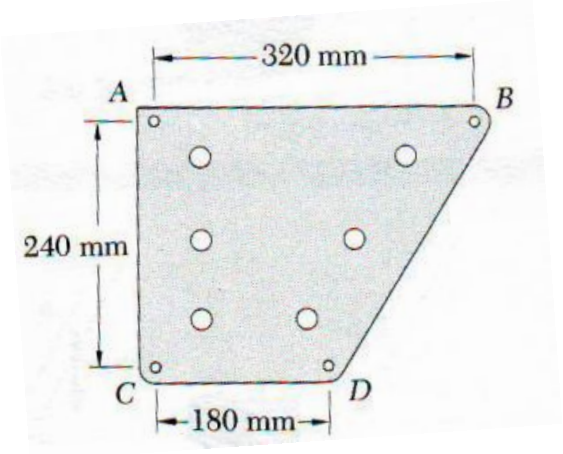
$-(25)\;(d)-(35)\;(d)-200-210+485=0$

$25d+35\;\;d=75$

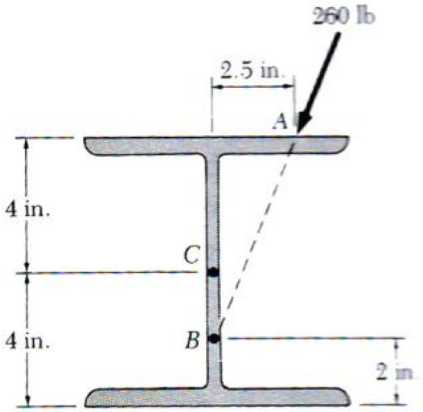
$d=75/60$

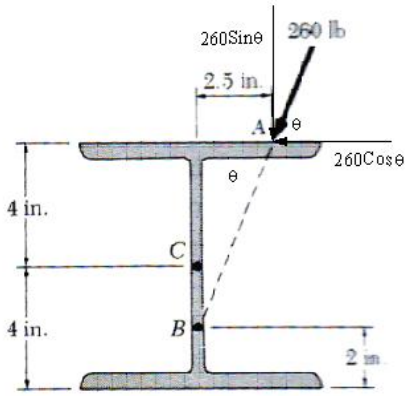
$d=1.25 \;\; in$

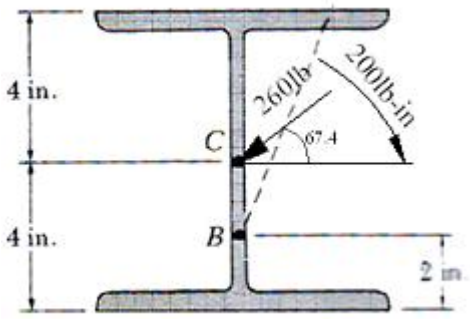
3-24 یک دستگاه مته قادر است بطور همزمان صفحه فولادی مطابق شکل را به تعداد شش سوراخ تعبیه کند،اگر هر سوراخ گشتاوری به مقدار4N-m ایجاد کند،مطلوبست تعیین کوپل نیرو و جهت آن در نقطه(a) A,C، (b) A,D، (C)B,C



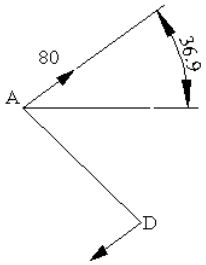
3-26 نیـروی 260lbمطـابق شـکل بـه یـک سیسـتم وارد مـی شود،سیستم مذبور را به یک نیـروی منفـرد و کوپـل در نقطـهC تبدیل کنید.



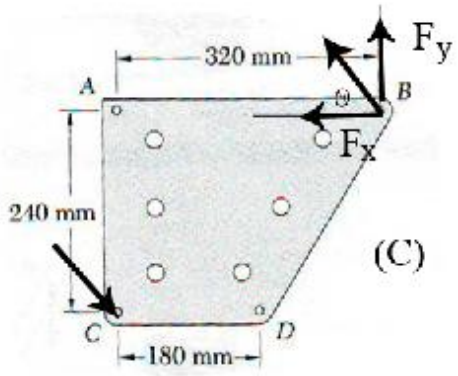




$\theta + 53.1 = 90 \qquad \theta = 36.9$



C)



$$BC = \sqrt{240^2 + 320^2} = 400 \ mm$$

$$P\,(^{400}/_{1000}) = 24 \qquad P = 60 \ N$$

$$\sum M_C = 0 \ \curvearrowleft$$

$$(\frac{240}{1000}) \ PCos\theta + PSin\theta \ (^{320}/_{1000}) = 24$$

$$0.24 \ Cos\theta + 0.32 \ Sin\theta = {}^{24}/_{60} = 0.4$$

$$0.75 \ Cos\theta + Sin\theta = 1.25$$

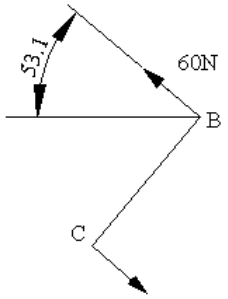
$$\tan\phi = 0.75 \qquad \phi = 36.9$$

$$Sin\ (\theta + \phi) = 1.25 \ \ Cos\phi \ = 1.25 Cos 36.9 = 1.0$$

$$Sin\ (\theta + \phi) = 1 = Sin 90$$

$$\theta + \phi = 90$$

$$\theta = 153.1$$



$$\tan\theta = \frac{6}{2.5} = 2.4$$

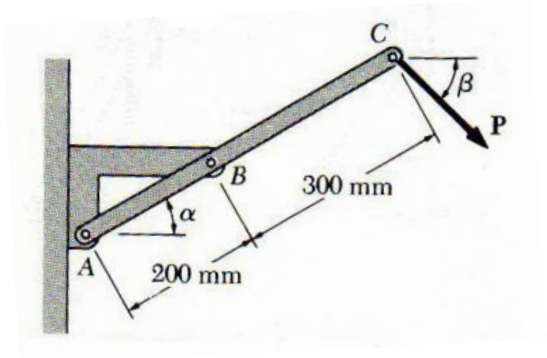
$$\theta = 67.4$$

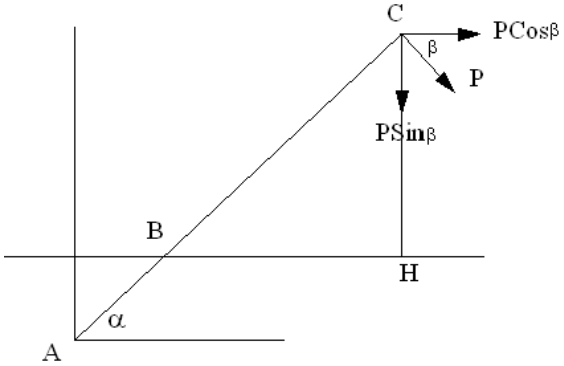
$$M_C = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$M_C = -(260)\ (Cos\ 67.4)\ (4) + 2.5\ (260)\ Sin\ 67.4$$

$$M_C = -400 + 600 = 200\ \ lb - in$$

3-28 نیروی P=250N به نقطه C از میله AC مطابق شکل وارد می شود،سیستم مذبور را به یک نیروی منفرد و کوپل معادل در نقطه B تبدیل کنید،ثانیاً سیستم مذبور را به دو نیروی موازی معادل در نقاط A و B بدست آورید، به شرط اینکه، $\alpha = \beta = 25^{\circ}$.





$$\alpha = B = 25^{\circ} \qquad P = 250\ \ N$$

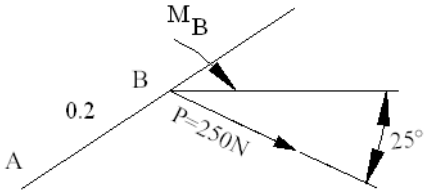
$$BH = 300\ \ Cos25 \qquad CH = 300\ \ Sin25$$

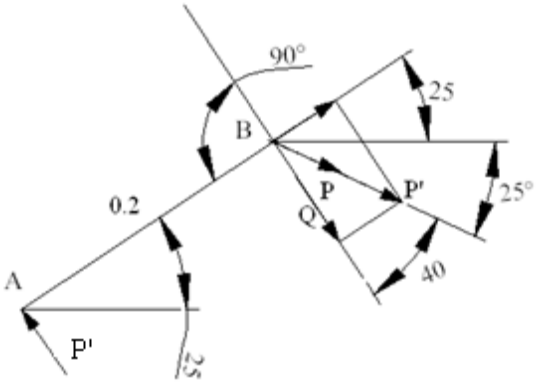
$$\curvearrowleft^{+} \quad M_B = P\,Cos\beta(\ CH) + P\,Sin\beta\ (BH)$$

$$M_B = Cos25\ \ \frac{300}{1000}\ \ Sin25 + 250\ \ Sin25\ \ \frac{300}{1000}\ \ Cos25$$

$$M_B = 250 \times 0.3Sin\ (25 + 25) = 57.5$$

$$M_B = 57.5\ \curvearrowleft\ \ KN - m$$





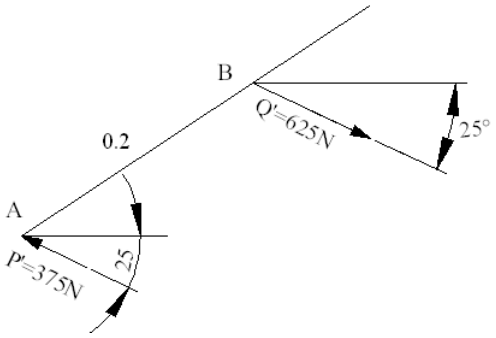
$$Q\ (\frac{200}{1000}) = 57.45$$

$$Q = 287.5\ \ N$$

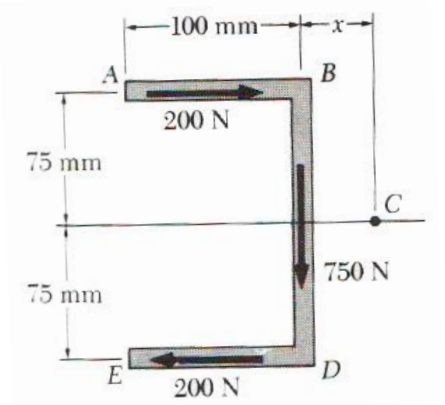
$$P'Cos40 = Q$$

$$P' = 375\ \ N$$

$$Q' = P + P' = 250 + 375 = 625\ \ N$$

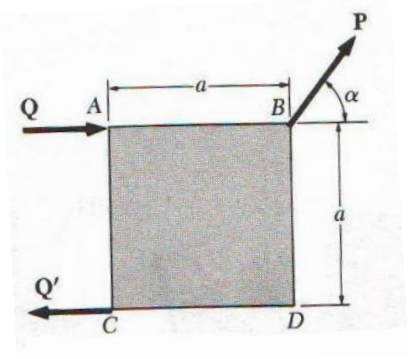


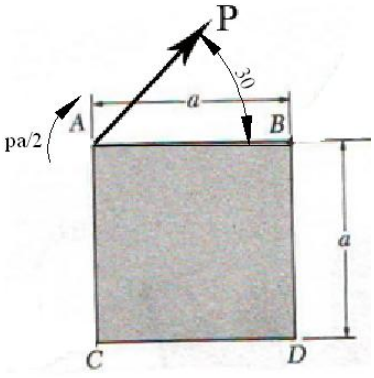
3-30 یک نیرو و یک کوپل نیرو به شکل زیر اثر می کنند،سیستم مذبور را به یک نیروی منفرد معادل در نقطه Cتبدیل کنیدو فاصله x را پیدا کنید.

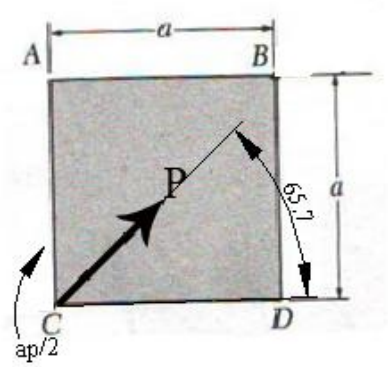


$$200\times\frac{150}{1000}=M$$
$$M=30\ \ KN-m$$
$$30=\frac{750}{1000}x$$
$$x=40\ mm$$

3-32یک نیرو و یک کوپل نیرو مطابق شکل به جعبه چوبی وارد می شود، اگرp=2Q باشد،سیستم مذبور را به یک نیروی منفرد و کوپل معادل تبدیل کنید، به شرط اینکه این نیرو از نقطه Aعبور کند،ثانیاً از نقطه Cعبور کند،زاویه α را هم در هر دو شریط تعیین کنید.

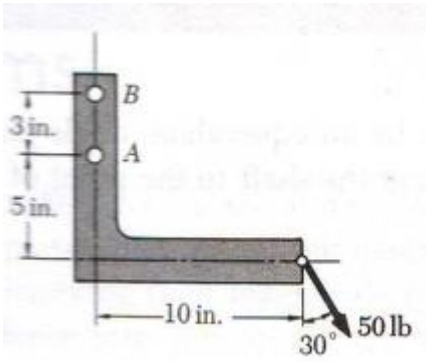


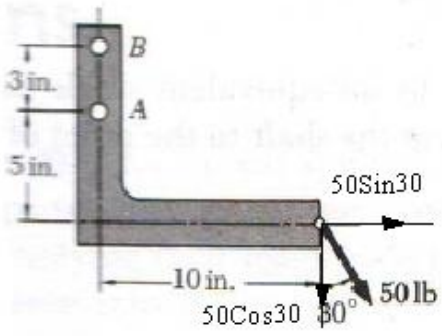


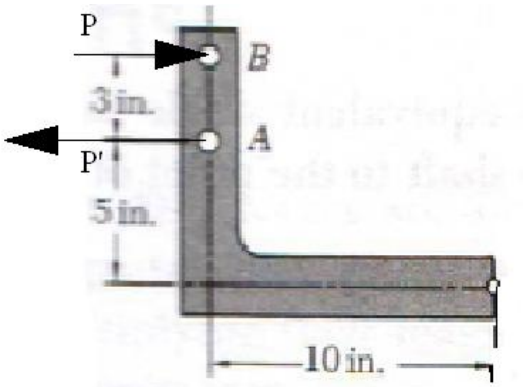


$$P=2Q$$
$$Q\ (a)=M_A$$
$$P/2\ \ (a)=M_A=M_C=M$$
$$\sum M_A=0\circlearrowleft^{+}$$
$$M_A-P\,Sin\alpha\ \ (a)=0$$
$$\frac{p}{2}\ \ a=P\,Sin\alpha\ \ (a)$$
$$\frac{1}{2}\ \ =Sin\alpha\quad \alpha=30$$
$$M_C=M_A=\frac{pa}{2}$$
$$M_C=-P\,Sin\alpha\ a+P\,Cos\alpha\ a$$
$$\frac{P}{2}\ \ a=-P\,Sin\alpha\ a+P\,Cos\alpha\ a$$
$$\tan 45\ Cos\alpha-Sin\alpha=\frac{1}{2}$$
$$Sin\ (\alpha-45^{\circ})=\frac{1}{2}\ \ Cos45$$
$$\alpha=45+20.7$$
$$\alpha=65.7$$

3-34 نیروی ۵۰پوندی مطابق شکل به یک نبشی اثرمی کند،این نیرورا به دو نیروی موازی و افقی معادل در نقطهA وBتبدیل کنید،ثانیاً به دو نیروی موازی وغیر افقی معادل که در نقطه AوB اثر می کند تبدیل کنیدو جهت آنرا پیدا کنید.







$$\sum M_A = 0 \curvearrowleft^{+}$$

$$M_A = 10 \times 50\ Cos30 - 50\ Sin30 \times 5 = 433 - 125$$

$$M_A = 308\ lb - 1n \curvearrowleft^{+}$$

$$3 \times P = 308$$

$$P = 102.7\ \ lb$$

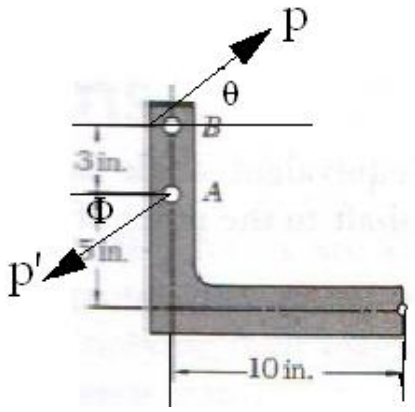
$$\sum M_B = 0 \curvearrowleft^{+}$$

$$M_B = 10 \times 50\ Cos30 - 50\ Sin30 \times 8 = 433 - 200$$

$$M_B = 233 \curvearrowleft^{+}$$

$$3 \times P' = 233$$

$$P' = 77.66\ lb$$



در نقطهA

$$\begin{cases} \sum Fx = 0 & P'Cos\phi = 50\,Sin30 \\ \sum Fy = 0 & (P'\ Sin\phi) = -50\,Cos30 \end{cases}$$

$$\tan\phi = -\tan 30$$

$$\phi = -60$$

$$(P'Cos\phi)\ (3) = M_B$$ گشتاور نسبتB

$$(P'Cos\phi)\ (3) = 233$$

$$P'Cos40\ (3) = 233$$

$$P' = 155.3\ lb$$

در نقطه B

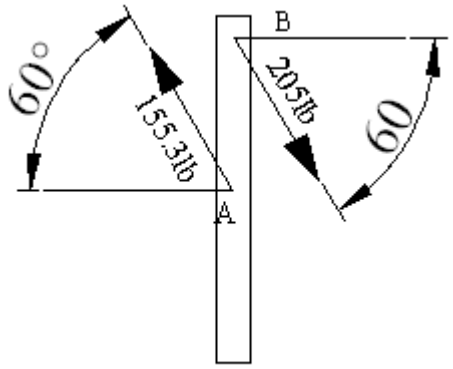
$$\begin{cases} \sum Fx = 0 & PCos\theta = -50\,Sin30 \\ \sum Fy = 0 & (P\ Sin\theta) = 50\,Cos30 \end{cases}$$

$$\tan\theta = -\tan 30$$

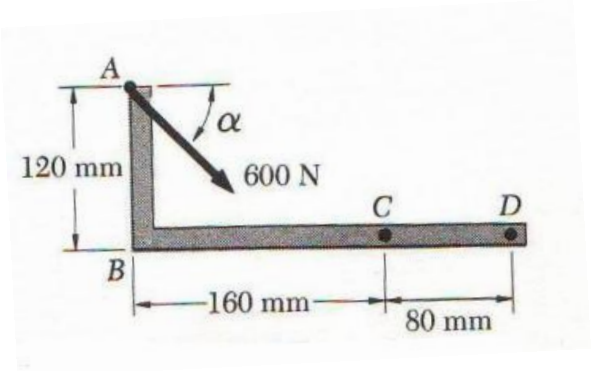
$$\theta = -60$$

$$(PCos\phi)(3) = M_A = 308$$ گشتاور نسبت به A

$$P = 205\ \ lb$$



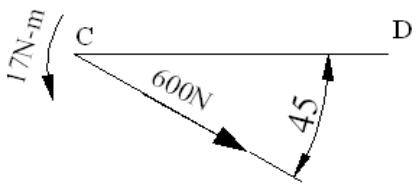
3-36 نیروی 600N مطابق شکل به نقطه A اثر می کند،اگر زاویه $\alpha = 45$ باشد،سیستم مذبور را به یک نیروی منفرد و کوپل معادل در نقطه C تبدیل کنید،ثانیاً سیستم مذبور را به دو نیروی موازی معادل در نقاط B و C تبدیل کنید.

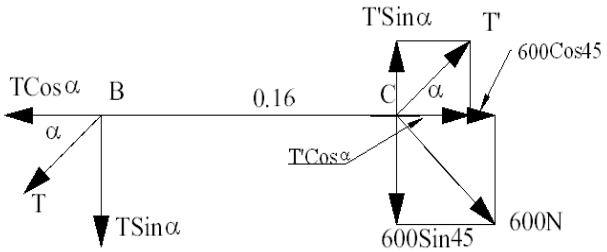


$$\sum M_C = 0 \curvearrowleft^{+}$$

$$M_C = +\frac{120}{1000}\ (600\ \ Cos45) - 600 \times Sin45 \times \frac{160}{1000}$$

$$M_C = -17\ \ N-m$$





$$\begin{cases} \sum Fy = 0 & -TSin\alpha + T'Sin\alpha - 600\,Sin45 = 0 \\ \sum Fx = 0 & -TCos\alpha + T'Cos\alpha + 600\,Cos45 = 0 \end{cases}$$

در نقطه B

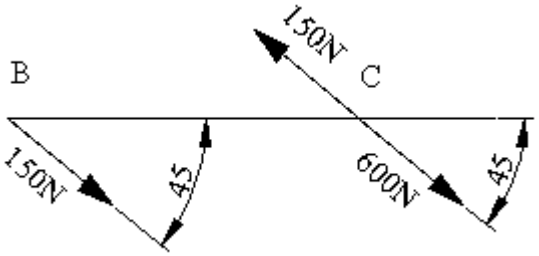
$$\tan\alpha = -\tan 45 \qquad \alpha = -45$$

$$\sum M_C = 0 \curvearrowleft^{+}$$

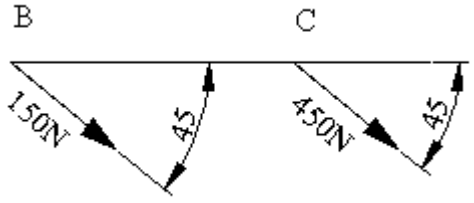
$$M_C - (T\ Sin\alpha)\ \ (0.16) = 0$$

$$T\ Sin45\ \ (0.16) = -17$$

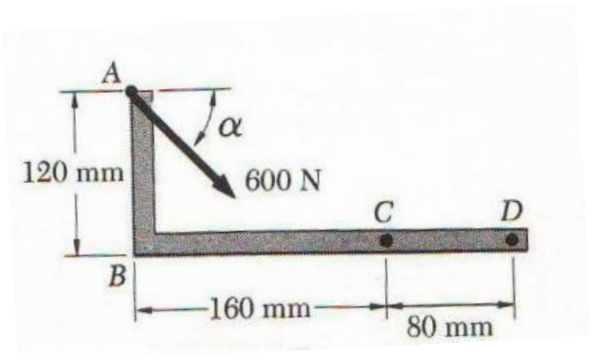
$$T = -150\ \ N$$

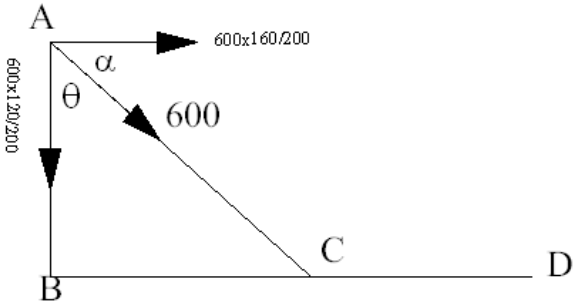


دو نیروی موازی معادل



3-35 اگر امتداد نیروی 600N از نقطه C بگذرد، سیستم مذبور را به یک نیروی منفرد و کوپل معادل در نقطه D تبدیل کنید، ثانیاً، به دو نیروی موازی ومعادل در نقاط B و D تبدیل کنید.





$$AC=\sqrt{120^2+160^2}\quad =200\ mm$$

$$Cos\theta=\frac{120}{200}$$

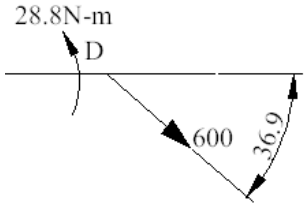
$$\theta=53.1\qquad \alpha=36.9$$

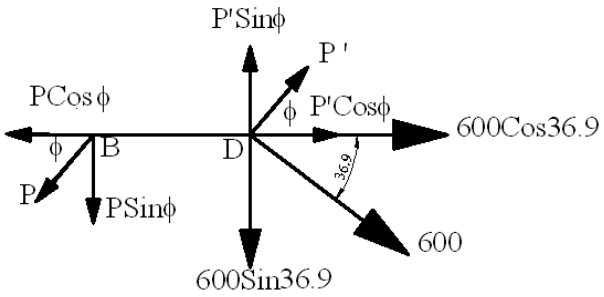
$$Sin\theta=\frac{1600}{200}$$

$$\sum M_D=0\circlearrowleft^{+}$$

$$M_D=600\times\frac{160}{200}\ (\frac{120}{1000})-600\times\frac{120}{200}\ (\frac{240}{1000})$$

$$M_D=-28.8\quad N-m$$





در نقطه B, D

$$\begin{cases}\sum Fx=0 & +P'Cos\phi-PCos\phi=-600Cos36.9\\ \sum Fy=0 & P'Sin\phi-PSin\phi=600Sin36.9\end{cases}$$

$$\tan\phi=-\tan\ 36.9\qquad \phi=-36.9$$

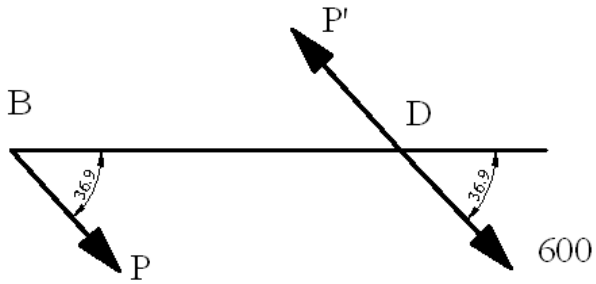
$$\sum M_D=0\circlearrowleft^{+}$$

$$-PSin36.9(0.24)+M_D=0$$

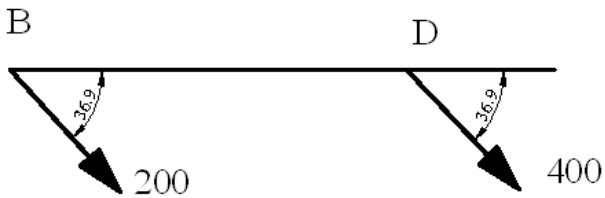
$$-PSin36.9(0.24)-28.8=0$$

$$P=-200\quad N$$

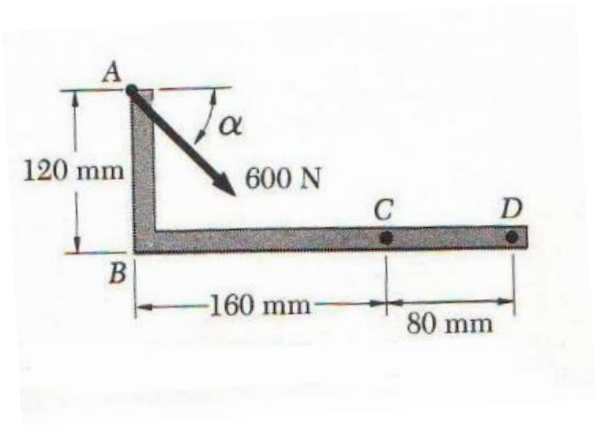
$$P'=-P=200\quad N$$

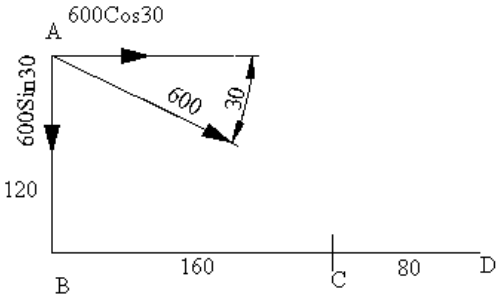


دو نیروی موازی معادل



3-37 اگر $\alpha = 30$ باشد،نیروی600N را به یک نیروی منفرد و کوپل نیروی معادل در نقطهC تبدیل کنید.ثانیاً سیستم مـذبور را به دو نیروی معادل یکی شامل 120Nدر نقطه Bو نیـروی دیگـر در نقطهC تبدیل کنید.



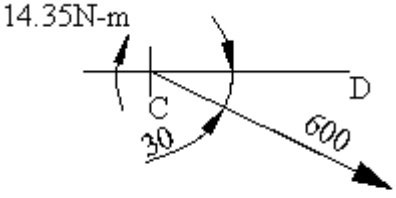


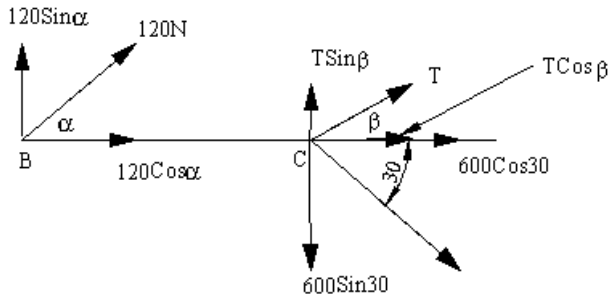
$\alpha = 30$

$\sum M_C = 0 \curvearrowleft^+$

$$M_C = 600\ Cos30 \times \frac{120}{1000} - 600\ Sin30 \times \frac{160}{1000}$$

$$M_C = 14.35\ \curvearrowleft^+$$





$\sum M_C = 0 \curvearrowleft^+$

$+(120\ \ Sin\alpha)\ \ (0.16) + 14.35 = 0$

$$\alpha = -48.4^\circ$$

$$\begin{cases} \sum Fy = 0 & 120\,Sin(-48.4) + TSin\beta = 600\,Sin30 \\ \sum Fx = 0 & 120\,Cos(-48.4) + TCos\beta = -600\,Cos30 \end{cases}$$

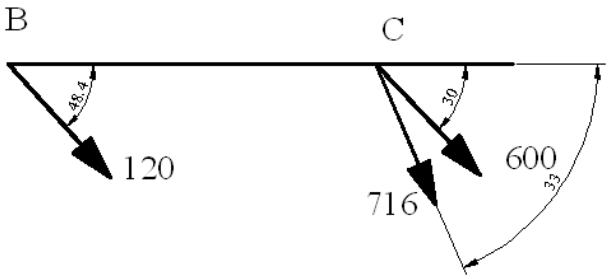
$TSin\beta = 389.7$

$TCos\beta = -599.28$

$$\tan\beta = \frac{389.7}{-599.8} = -0.649$$

$$\beta = -33$$

$$T = \frac{389.7}{-Sin33} = -716\ \ N$$



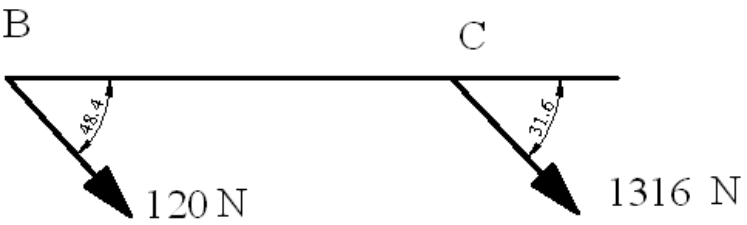
$$R^2 = (716)^2 + (600)^2 + 2(600)(716)Cos3$$

$$R = 1316\ N$$

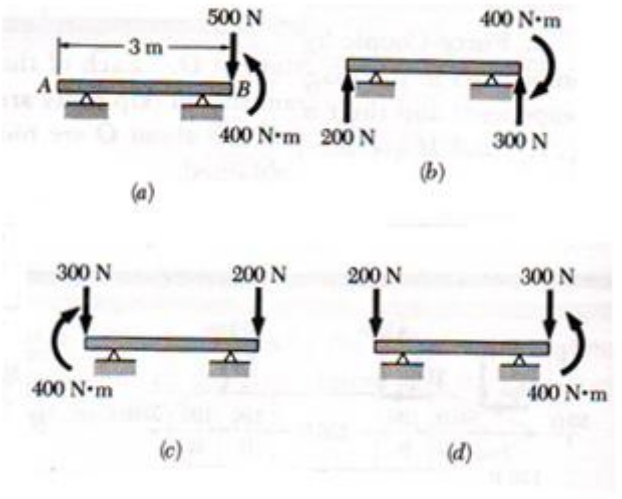
$$\tan\theta = \frac{600Sin3}{716 + 600Cos3} = \frac{31.4}{1315.2} = 0.0238$$

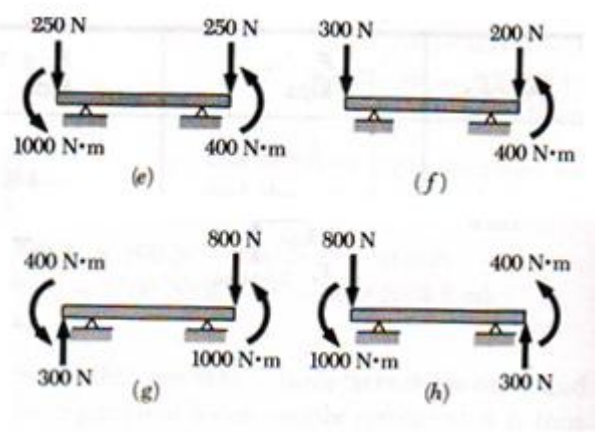
$$\theta = 1.4$$

سیستم معادل در نقطهC,B



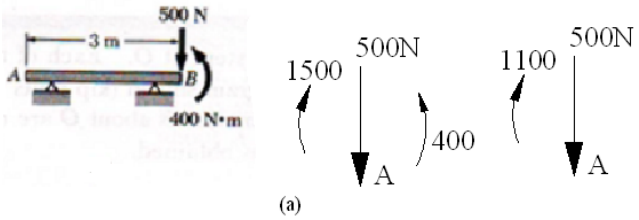
3-38تیر آهن به طول 3m مطابق اشکال زیر نیرو و کوپل به آن وارد می شوند،کدام از اشکال زیر با هم متعادل هستند.



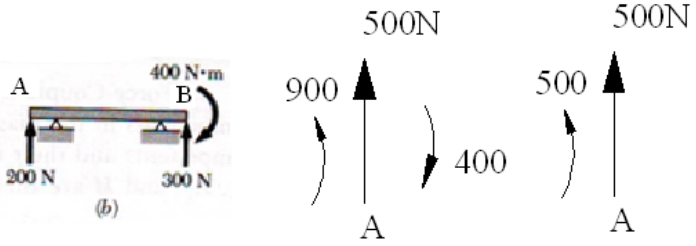


فرض گرفته می شود.

$$a) \Rightarrow M_A = 500 \times 3 = 1500$$
$$M = 1500 - 400 = 1100$$

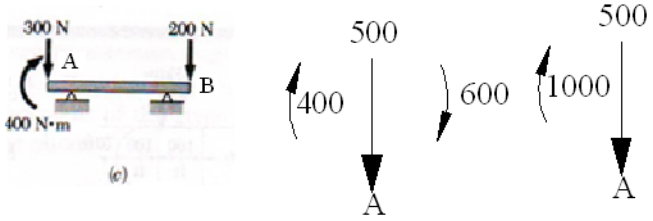


$$b) \Rightarrow M_A = 3x300 = 900$$
$$M = +900 - 400 = +500$$



(b)

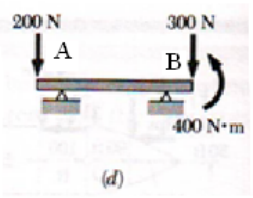
$$C) \Rightarrow M_A = -200 \times 3 = -600$$
$$M = -600 - 400 = -1000$$

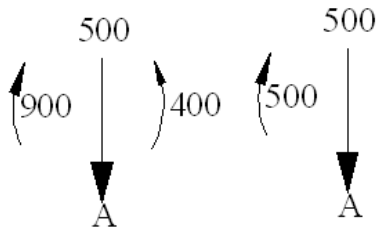


(C)

$$d) \Rightarrow M_A = -300 \times 3 = -900$$

$$M = -900 + 400 = -500$$



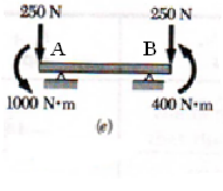


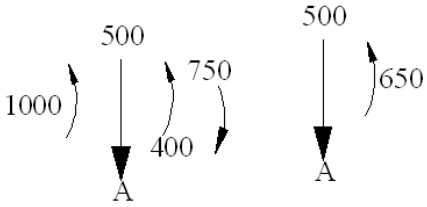
(d)

$$e) \Rightarrow M_A = -3x250 = -750$$

$$M = +1000 + 400 - 750$$

$$M = +650$$

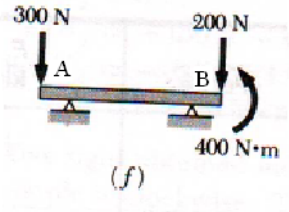


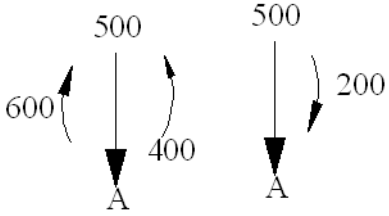


(e)

$$f) \Rightarrow M_A = -200 \times 3 = -600$$

$$M = -600 + 400 = -200$$



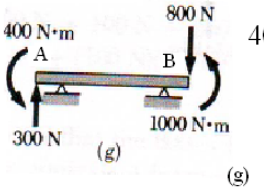


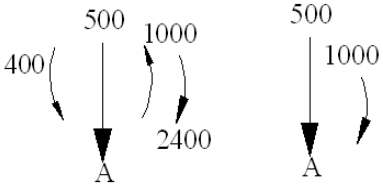
(f)

$$g) \Rightarrow M_A = -800\,x3 = -2400$$

$$M = +1000 + 400 - 2400$$

$$M = -1000$$

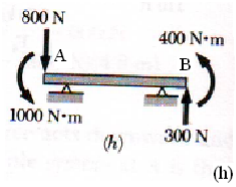


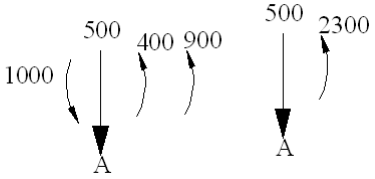


(g)

$$h) \Rightarrow M_A = -3x300 = -900$$

$$M = -900 - 400 - 1000 = -2300$$

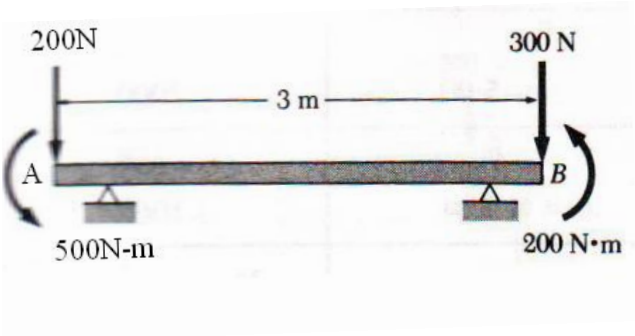


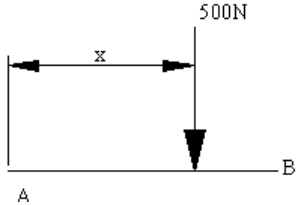


(h)

همانطور که مشاهده می شود،حالت(C)
و(g)،معادل می باشند.

3-39 مطلوبست برآیند نیروها و فاصله برآیند آن نیروها از نقطه A شکل زیر.





$$R = 300 + 200 = 500\ N$$

$$M = -900 + 500 + 200$$

$$M = -200\ \ N - m$$

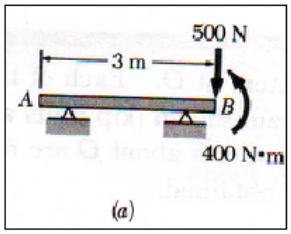
$$R(x) = M$$

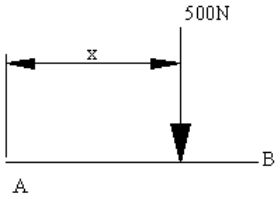
$$-500\,(x) = -200$$

$$x = 0.4\ \ m$$

3-40 مطلوبست برآیند نیروها و فاصله برآیند آن نیروها از نقطه Aدر مسئله3-38، حا لت های(a),(b),(c)

فرض گرفته می شود



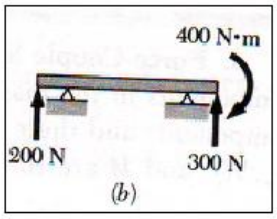


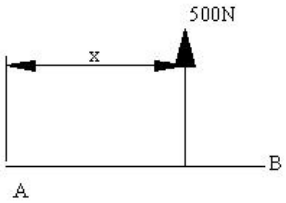
$$M_A = 1100\ \ N - m$$

$$500\ \ (x) = 1100$$

$$X = 2.2\ \ m$$

b)

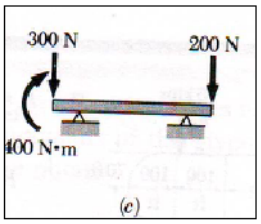


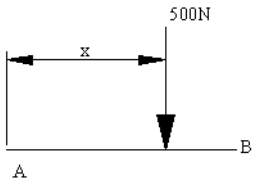


$$500\ \ (x) = 500$$

$$X = 1.0\ \ m$$

C)

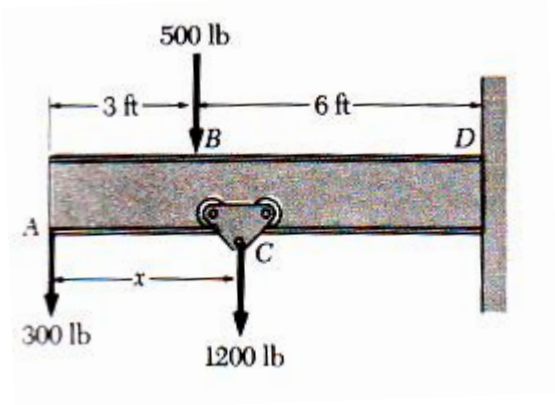




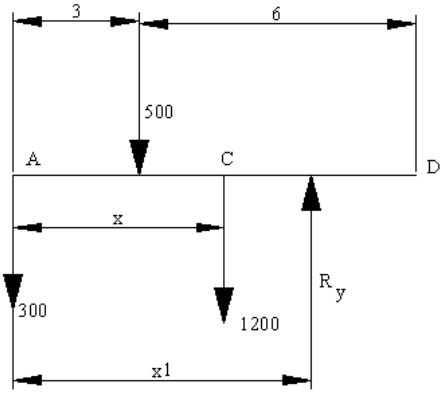
$$-500\ \ (x) = -1000$$

$$X = 2.0\ \ m$$

3-42 برآیند نیروهای شکل زیر را پیدا کنید و فاصله برآیند نیروها را از نقطهA بدست آورید، وقتی که x=1.25ftو x=4ftو x=8ftباشد.



M_A



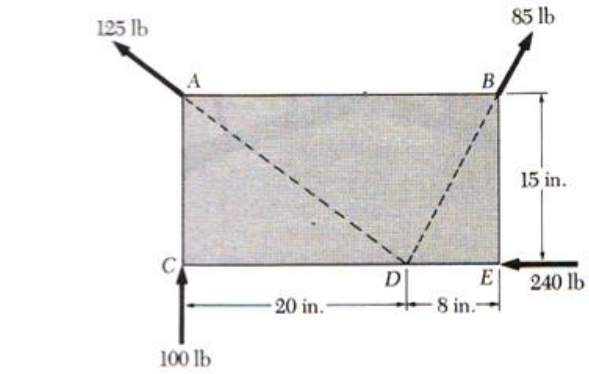
$$Ry = \sum Fy = 0$$
$$-Ry = -500 - 300 - 1200 = -2000$$
$$Ry = 2000 \quad lb$$
$$\sum M_A = 0 \circlearrowleft^{+}$$
$$-(X_1)(R_Y) + 1200(x) + 500(3) = 0$$
$$(X_1)(R_Y) = 1200(x) + 500(3)$$
$$(X_1)(2000) = 1200(x) + 500(3)$$
$$X_1 = 0.6X + 0.75$$

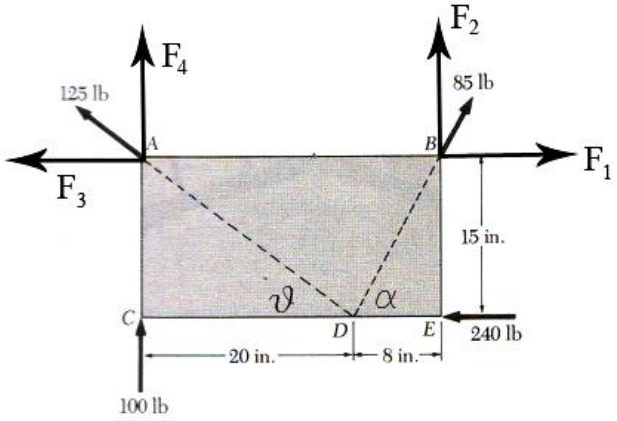
a) $X = 1.25 \qquad X_1 = 1.5 \qquad ft$

b) $X = 4 \qquad X_1 = 3.15 \quad ft$

C) $X = 8 \ ft \qquad X_1 = 5.55 \quad ft$

3-44 نیروها مطابق شکل به صفحه چوبی 28x15 in اثر می کند،مطلوبست برآیند این نیروها و مختصات بر خورد برآیند نیروها را با صفحه چوبی بدست آورید.

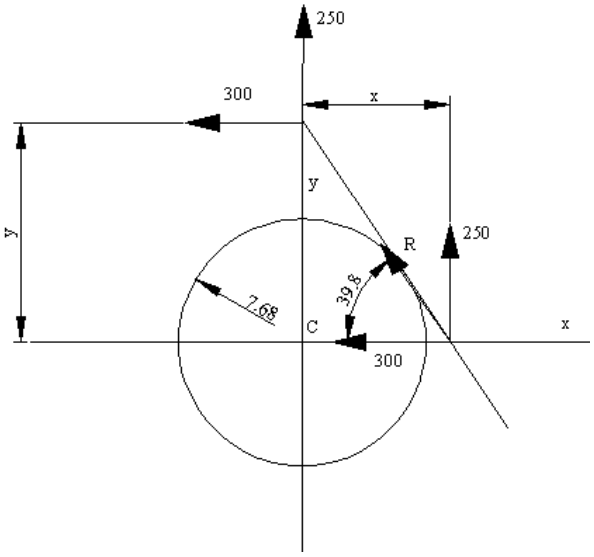




$$\tan\alpha = \frac{15}{8} = 1.875 \quad \alpha = 61.9$$
$$\tan\theta = \frac{15}{20} \qquad \theta = 36.9$$
$$F_3 = 125\,Cos36.9 = 100 \quad lb$$
$$F_1 = 85\,Cos61.9 = 40 \quad lb$$
$$F_4 = 125\,Sin36.9 = 75 \quad lb$$
$$F_2 = 85\,Sin61.9 = 75 \quad lb$$
$$+\uparrow \ \sum Ry = 0$$

$$Ry = F_4 + 100 + F_2 = 75 + 100 + 75 = 250$$
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Rx = 0$$
$$Rx = -F_3 + F_1 - 240 = -100 + 40 - 240 = -300 \quad lb$$

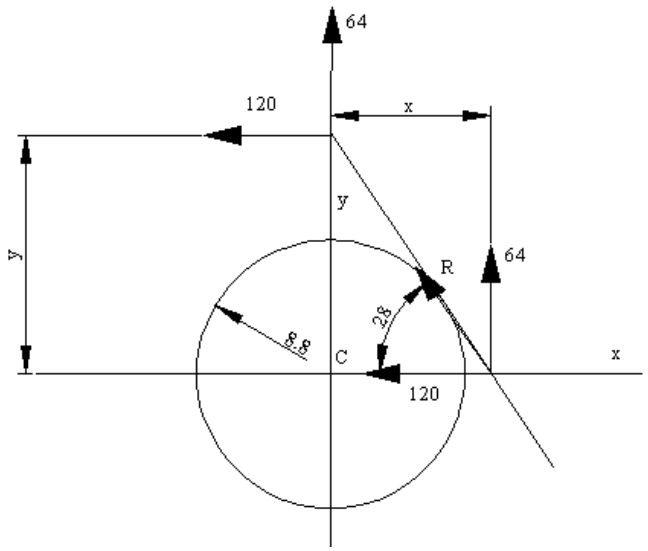
$$\vec{R} = Rxi + Ryj = -300\ i + 250\,j$$



$$\tan\phi = \frac{Ry}{Rx} = \frac{250}{300}$$
$$\phi = 39.8$$
$$\sum M_C = 0 \circlearrowleft^{+}$$
$$M_C = -28(F_2) + 15(F_1) - 15(F_3)$$
$$M_C = -28(75) + 15(15) - 1515)$$
$$M_C = -3000 \quad lb - in$$

$$R = \sqrt{250^2 + 300^2} = 390.5 \ lb$$

$$F_1 = 120\,Cos60 = 60 \quad N$$
$$Rx = F_1 - F_4 = 60 - 180 = -120 \quad N$$
$$F_2 = 120\,Sin60 = 104 \quad N$$
$$Ry = F_2 - F_3 = 104 - 40 = 64 \quad N$$
$$\vec{R} = Rxi + Ryj = -120i + 64j$$
$$R = \sqrt{120^2 + 64^2} = 136 \quad N$$



$$\tan\theta = \frac{64}{120} \qquad \theta = 28$$
$$\sum M_A = 0 \curvearrowleft^{+}$$
$$M_A = 0.3(F2) - 0.2(F4) + 6 = 0.3(104) - 180\,(0.2) + 6$$

$$M_A = -4.8 + 6 = 1.2 \quad N-m$$
$$r = \frac{M}{R} = \frac{1.2}{136}\,x1000 = 8.8 \quad mm$$
$$64\overline{X} = 1.2x1000$$
$$\overline{X} = 18.75 \quad mm$$
$$120\overline{y} = 1.2x1000$$
$$\overline{X} = 10 \quad mm$$

18.75میلی متر به طرف راست نقطه Aو 10mmبالای نقطهA

$$r = \frac{M}{R} = \frac{3000}{390.5} = 7.68 \quad in$$

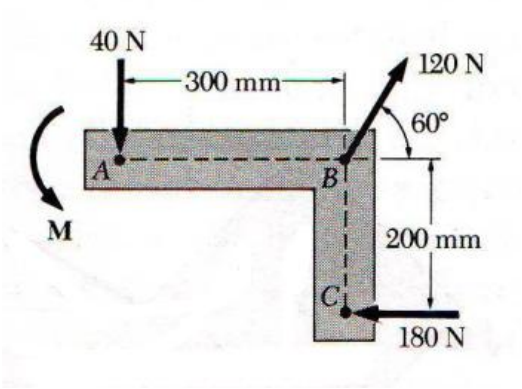
$$-250\overline{X} = -3000$$
$$\overline{X} = +12 \quad in$$

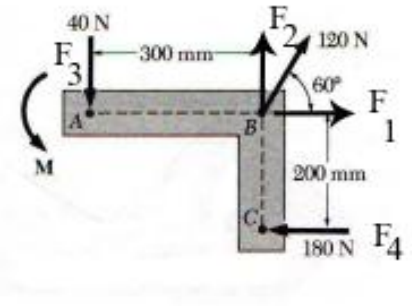
12in به سمت راست نقطه C

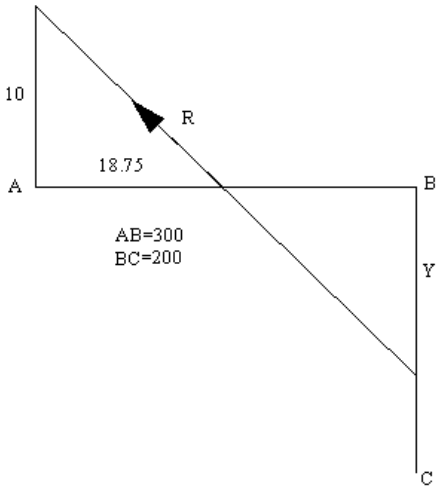
$$-300\overline{Y} = -3000 \quad \text{K(12",10")}$$
$$\overline{Y} = 10 \quad in$$

10in بالای نقطه C

3-46 سه نیرو و کوپل M مطابق شکل به پدال ترمز وارد می شوند،اگرM=6N-m باشد مطلوبست برآیند نیروها ،ثانیاً نقطه بر خورد برآیند نیروها را با بازویABC را بدست آورید.







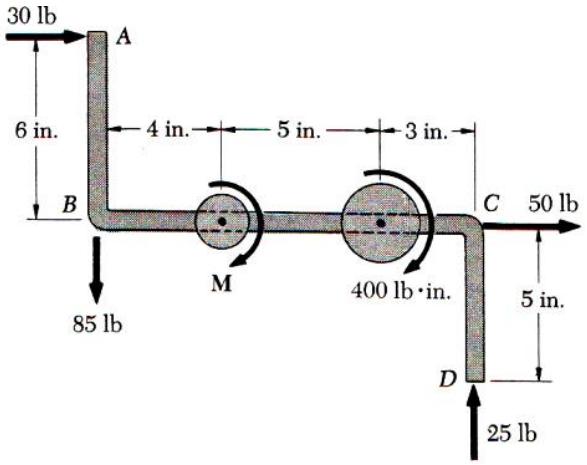
$$\frac{10}{18.75}=\frac{y}{300-18.75}$$

$$y=281.25x\frac{10}{18.75}$$

$$y=150 \quad mm$$

50mm بالای نقطه C

3-48 سیستم ترمز شکل زیر با کوپل و نیروها مطابق شکل نشان داده شده است،کوپل Mرا حساب کنید اگر برآیند نیروها(a) از نقطهA بگذرد،(b) از نقطهB بگذرد، (c)از نقطهC بگذرد ،(d) از نقطهD بگذرد.



$$^{+}\uparrow \quad \sum Ry=0 \qquad Ry+25-85=0$$

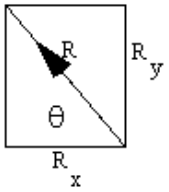
$$Ry=60 \ lb$$

$$\rightarrow^{+}\sum Rx=0$$

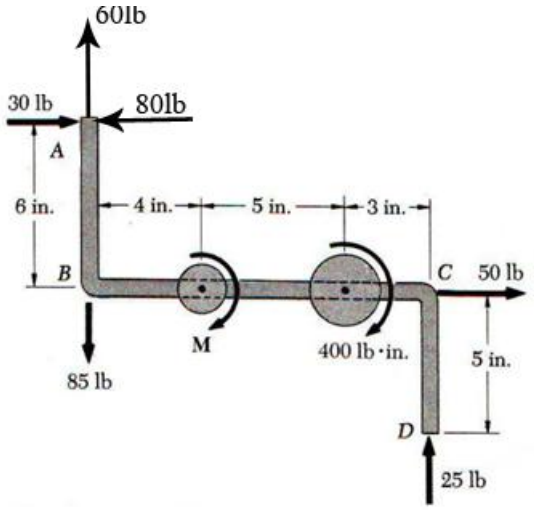
$$Rx+30+50=0 \qquad Rx=-80 \quad lb$$

$$\tan\theta=\frac{Ry}{Rx}=\frac{60}{80} \qquad \theta=36.9$$

$$R=\sqrt{80^2+60^2}=100 \ lb$$



a)



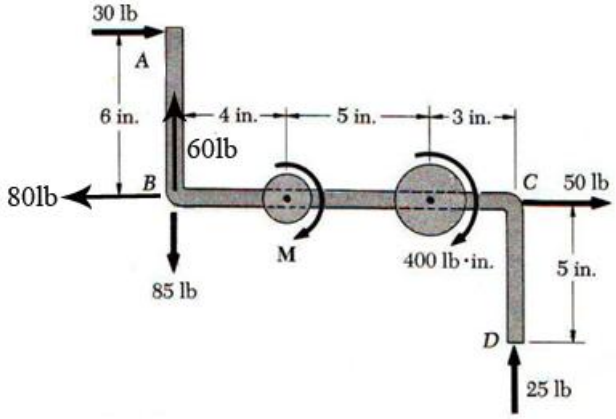
$$M_C=0 \ \curvearrowleft^{+}$$

$$+30\ (6)+(60)\ (12)-80\ (6)-85\ (12)+400+M=0$$

$$M-200=0$$

$$M=200 \ \ lb-in$$

b)



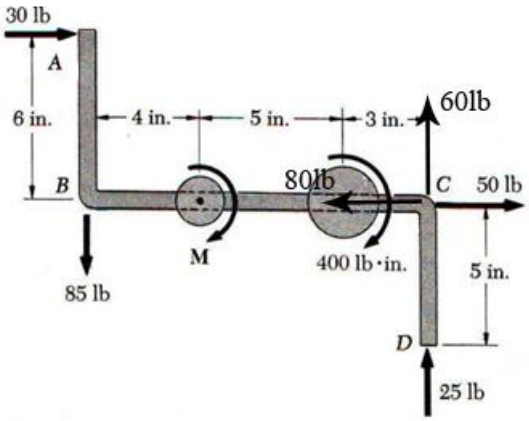
$$M_C = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

$$30\ (6) + (60)\ (12) - 85\ (12) + 400 + M = 0$$

$$M + 280 = 0 \qquad M = -280$$

$$M = 280 \quad lb - in$$

C)



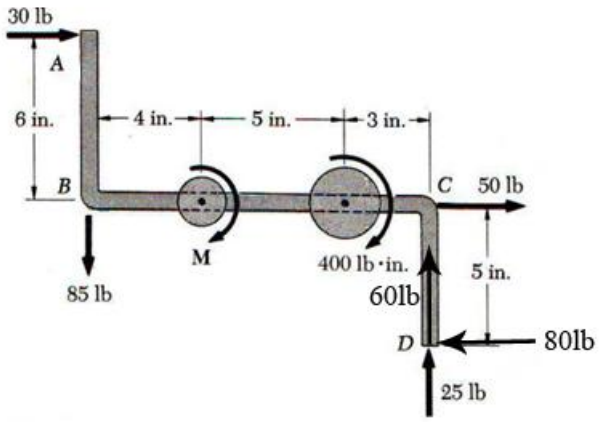
$$M_C = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

$$M_C = (30)(6) - 85(12) + M + 400 = 0$$

$$M - 440 = 0$$

$$M = 440 \quad lb - in$$

d)



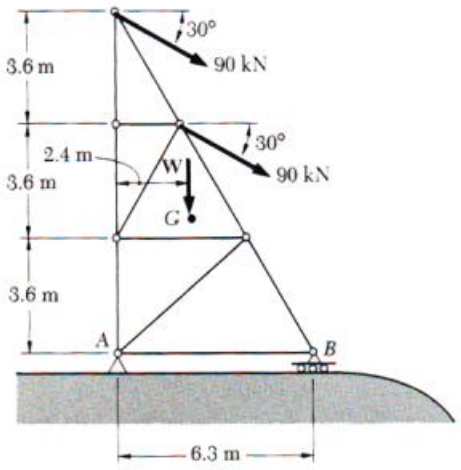
$$M_C = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

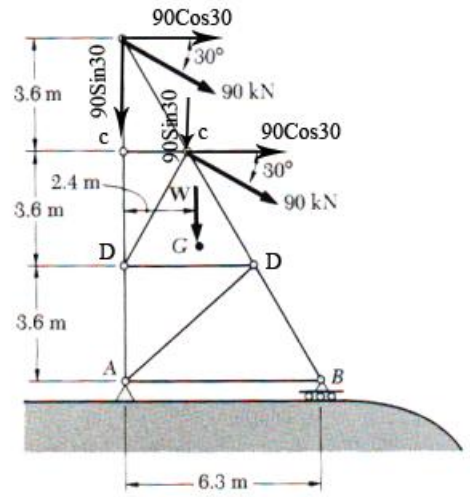
$$M_C = 30\ (6) - 85\ (12) + M + 400 + 80\ (5) = 0$$

$$M - 40 = 0$$

$$M = 40 \quad lb - in$$

3-50 دو نیروی90KN به قاب شکل زیر اثر مـی کننـد،اگر وزن قاب 200KNمطابق شکل باشد،مطلوبست برآیند نیروی وارد بـر قاب مذبور را،مختصات بر خورد این برآیند را با میله ABحسـاب کنید.





$$CC=\frac{6.3}{3}=2.1\ m \qquad \frac{DD}{AB}=\frac{2\times3.6}{3\times3.6}$$

$$W=200\ \ KN \qquad \frac{CC}{AB}=\frac{3.6}{3\times3.6}$$

$$DD=\frac{2}{3}\times6.3=4.2\ m$$

$$\sum Ry=0$$

$$+\uparrow \quad Ry-(90\ \ Sin30)\ 2-200=0$$

$$Ry=290\ \ KN$$

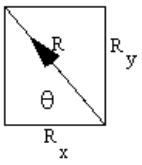
$$\overset{+}{\rightarrow} \quad \sum Rx=0 \qquad Rx+(90\ \ Cos30)2=0$$

$$Rx=-155.9$$

$$R=\sqrt{155.9^2+200^2}=329.2\ \ KN$$

$$\tan\theta=\frac{Ry}{Rx}=\frac{290}{155.9}$$

$$\theta=61.74$$

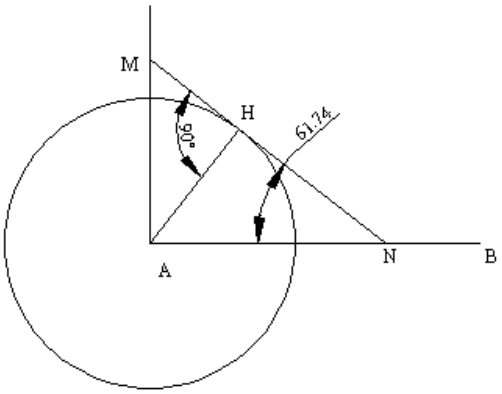


$$\curvearrowleft^{+} \quad \sum M_A=(90\ \ Cos30)\ (3.6)\ \ (3)$$

$$+(90\ \ Cos30)\ \ (3.6)\ \ (2)$$

$$+90\ \ Sin30\times2.1+200\ \ (2.4)$$

$$M_A=1977.5 \qquad KN-m$$



$$M_A=R\times r \qquad r=\frac{1977.5}{329.2}$$

$$r=6\ \ m \qquad AH=r$$

$$\tan\ 61.74=\frac{AH}{HN} \qquad HN=\frac{6}{\tan 61.74}=3.23$$

$$AN=\sqrt{3.23^2+6^2}=6.8$$

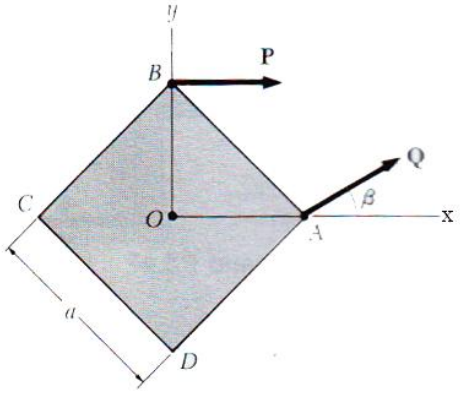
$$\tan\ 61.74=\frac{AM}{AN}$$

$$AM=12.65\ \ m$$

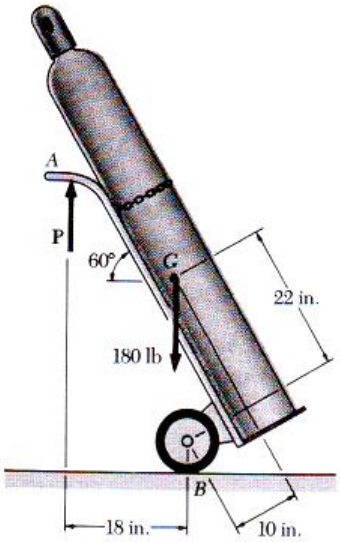
$$AN=6.8\ \ \ m$$

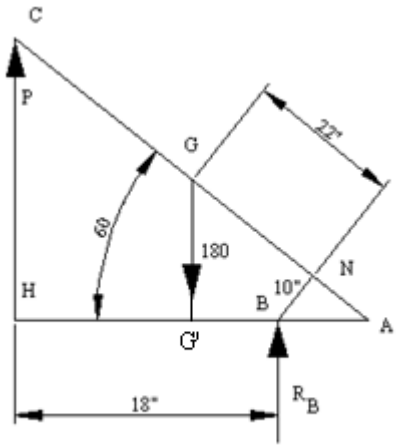
A به سمت راست 6.8m

3-52 دو نیروی P و Q مطابق شکل به صفحه فلزی مربع شکل اثر می کند،اگر برآیند نیروها،برابر با 120N از نقطه O عبور کند(جنوب غربی،SW) با محور x زاویه ۳۰درجه بسازد.،مطلوبست تعیین P و Q.



3-56 یک کپسول فشرده گاز بوسیله چرخ دستی حمل می شود،اگر نیروئی مانندP مطابق شکل بـه آن وارد شود،مطلوبسـت تعیین نیرویP و عکس العمل نیرو که به دو چرخ وارد می شود.





$$\tan 60 = \frac{BN}{AN} = \frac{10}{AN} \qquad AN = 5.77''$$

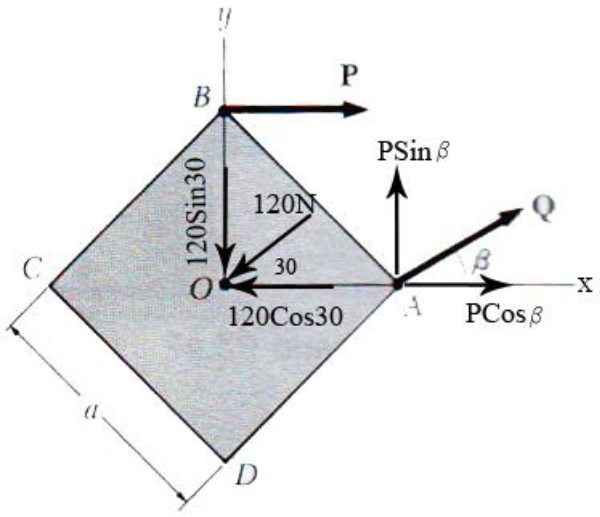
$$BA = \sqrt{AN^2 + BN^2} = 11.55$$

$$\tan 60 = \frac{CH}{AH} \qquad CH = (11.55 + 18)\ \tan 60$$

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = 59.11$$

$$\frac{G'A}{AH} = \frac{AG}{AC} \qquad G'A = \frac{22 + 5.77}{59.11} \times 29.55$$

$$G'A = 13.88$$



$$2\ (\frac{y}{2})^2 = a^2 \qquad \frac{y^2}{2} = a^2 \qquad y = a\ \sqrt{2}$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum Ry = 0$$

$$\sum \overset{+}{\rightarrow} Fx \begin{cases} 120\ Sin30 + Q\ SinB = 0 \\ P + 120\ \ Cos30 + Q\ CosB = 0 \end{cases}$$

$$\sum M_A = 0 \circlearrowleft^{+} \qquad +(P)\ (OB) - 120\ Sin30\ (OA) = 0$$

$$\sum M_A = 0 \circlearrowleft^{+} \qquad +(P)\ (\frac{a\sqrt{2}}{2}) - 120\ \ Sin30\ \ (\frac{a\sqrt{2}}{2}) = 0$$

$$P = 120\ \ Sin30 = 60\ \ N$$

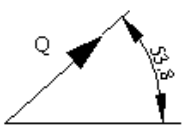
$$P = 60\ \ N \quad \rightarrow$$

$$\sum Fy = 0 \qquad Q\ Sin\beta = 120\ \ Sin30 = 60$$

$$\sum Fx = 0 \qquad Q\ Cos\beta = +120\ \ Cos30 - 60 = +43.92$$

$$\tan\beta = \frac{60}{43.92} \qquad \beta = 53.8$$

$$Q\ \ Sin53.8 = -120\ \ \ Sin30 \qquad Q = 74.35\ ^{N}$$



$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

$$(P)\ (29.55) - 180\ (13.88) + R_B\ (11.55) = 0$$

$$+\uparrow \sum Fy = 0 \qquad P - 180 + R_B = 0$$

$$P = 180 - R_B$$

$$(180 - R_B)\ (29.55) - 180\ (13.88) + R_B\ (11.55) = 0$$

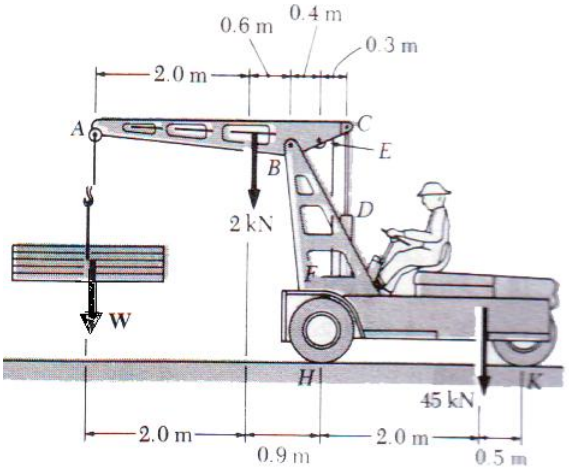
$$5319 - 29.55\ R_B - 2498.4 + R_B\ (11.55) = 0$$

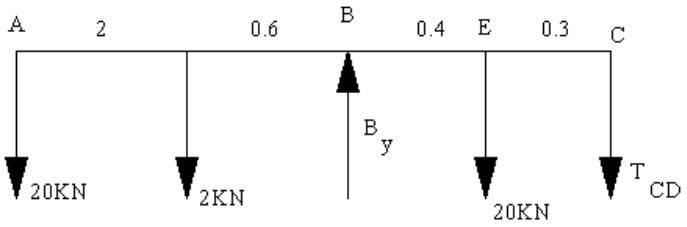
$$18\ R_B = 2820.6 \qquad R_B = 156.7 \quad 1b$$

$$R_B = \frac{156.7}{2} = 78.3\ \ lb \ \uparrow$$

$$p = 23.3 \quad 1b \ \rightarrow$$

3-58 یک جرثقیل اتومبیل، باری به وزنW=20KN مطابق شکل بلند می کندو اگر کشش در همه کابلAEF برابربا 20KN باشدو وزن تیرک جرثقیلABC، 2KN باشد،مطلوبست کشش در کابلCD ،ثانیأ عکس العمل نیرو در پین B





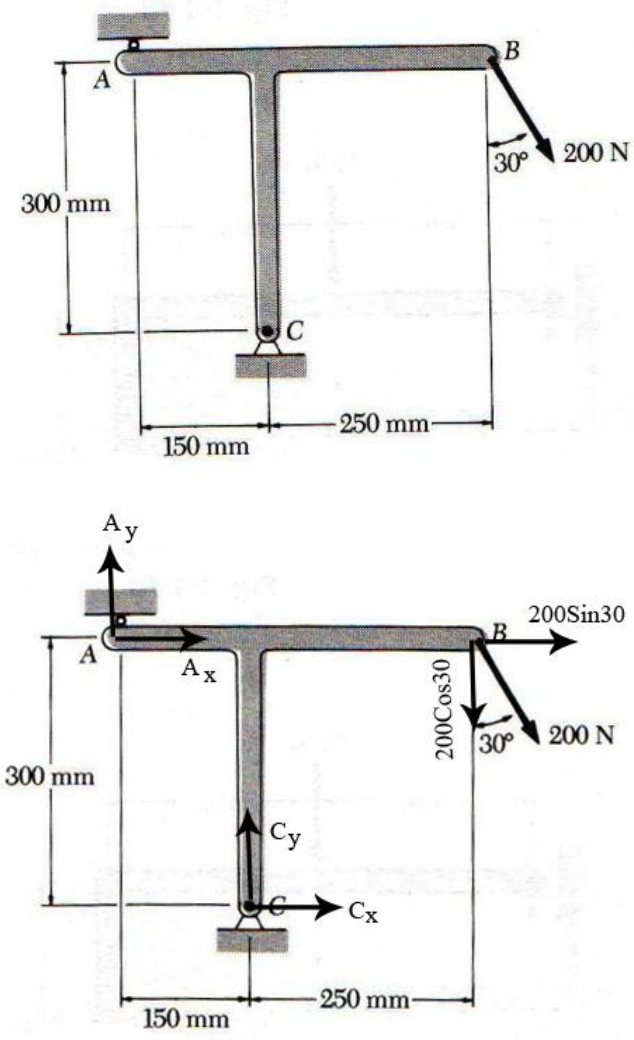
$$\curvearrowleft^+ \sum M_B = 0$$

$$-20\ (2.6) - 2\ (0.6) + 20\ (0.4) + T_{CD}(0.7) = 0$$

$$T_{CD} = 64.6\ \ KN \uparrow$$

$$By = +64.6 + 42 = +106.6\ \ KN \ \uparrow$$

3-66درشاخهT شکل زیر تحت اثر نیروی200N قرار می گیرد،مطلوبست عکس العمل نیروها در پین Aو C



$\curvearrowleft^{+} \sum M_C = 0$

$Ay(0.15) + Ax(0.3) + 200\,Sin30(0.3) +$

$200\,Cos30(0.25) = 0$

$Ax = 0$ به خاطر غلتک

$Ay(0.15) + 200Sin30(0.3) + 200Cos30(0.25) = 0$

$Ay = -489 \;\; N$

$Ay = 489 \;\; N \downarrow$

$\sum Fx = 0$

$Cx + 100 = 0 \quad Cx = -100 \;\; N$

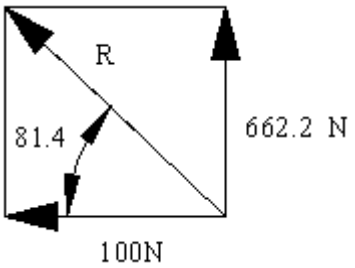
$\sum Fy = 0$

$Ay + Cy - 200Cos30 = 0$

$-489 + Cy - 173.2 = 0$

$Cy = 662.2 \;\; N \uparrow$

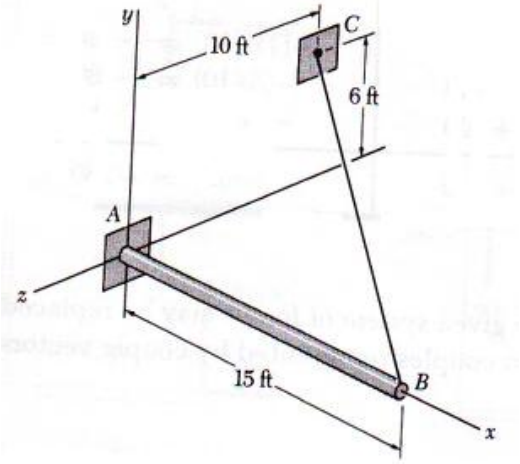
$R = \sqrt{662.2^2 + 100^2} = 669.7 \;\; N$



فصل ۴

تعادل اجسام صلب و قاب ها

4-20 تیـر آهـن ABبـه طـول ۱۵ فـوت کـه بوسـیله کابـل BCنگهداری می شود،سیسـتم مـذبور را بـه یـک نیـرو و کوپـل معادل در نقطه Aتبدیل کنید.



$C\ (0,6,-10)$ $B\ (15,0,0)$

$T_{BC} = 380\ \ 1b$

$$\lambda_{BC} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overline{BC}} = \frac{-15i + 6j - 10k}{19}$$

$$T_{BC} = \frac{380}{19}\ (-15i + 6j - 10k)$$

$$T_{BC} = -300i + 120\ j - 200\,k$$

$$Fx = -300\ ,\quad Fy = 120\ ,\quad Fz = -200$$

$$r_{AB} = 15i$$

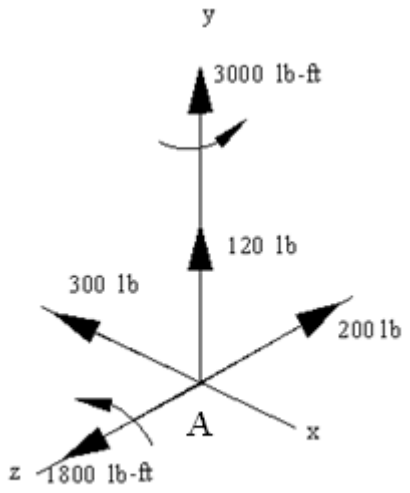
$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{r_{AB}} \times \overrightarrow{T_{BC}} = 15i \times (-300i + 120j - 200k)$$

$$\overrightarrow{M_A} = 1800\ (k) - 15\ (200)\ (j)$$

$$\overrightarrow{M_A} = 1800k + 3000j \qquad Mx = 0$$

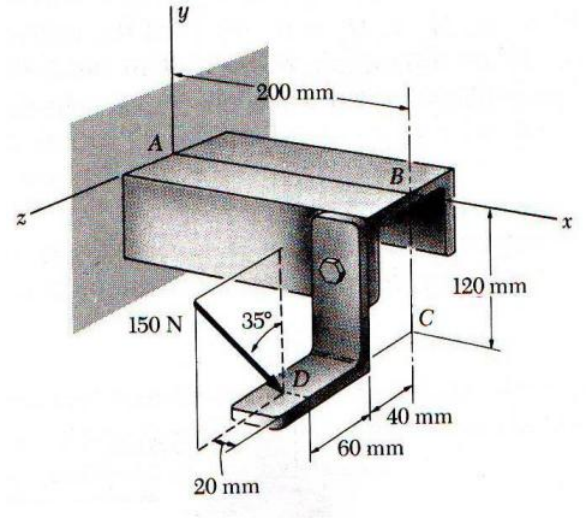
$$My = 3000\ \ 1b - ft$$

$$Mz = 1800\ \ 1b - ft$$



4-22 نیروی 150Nمطـابق شـکل بـه سیسـتم مـذبور اثـر مـی کند،مطلوبست تبدیل این سیستم به یک نیرو و کوپل معـادل در نقطه.A

کوپل نیرو در A



$D\ (0.18,-0.12,0.1)$

$A\ (0,0,0)$

$$r_{AD} = 0.18i - 0.12\,j + 0.k$$

$$T_D = -150\ \ Sin35k - 150\ \ Cos35\,j$$

$$T_D = -86k - 122.9\,j$$

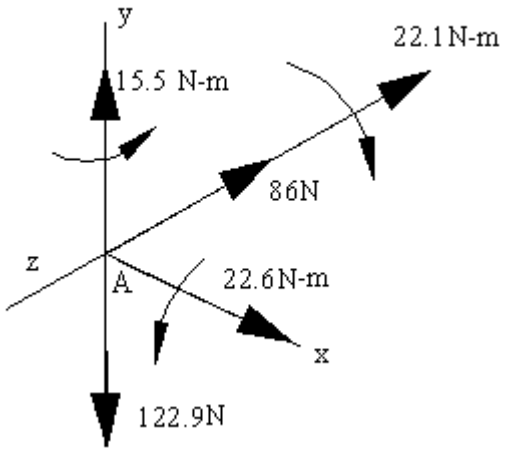
$$M_A = \overrightarrow{r_{AB}} \times \overrightarrow{T_D}$$

$$mA = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 0.18 & -0.12 & 0.1 & 0.18 & -0.12 \\ 0 & -122.9 & -86 & 0 & -122.9 \end{vmatrix}$$

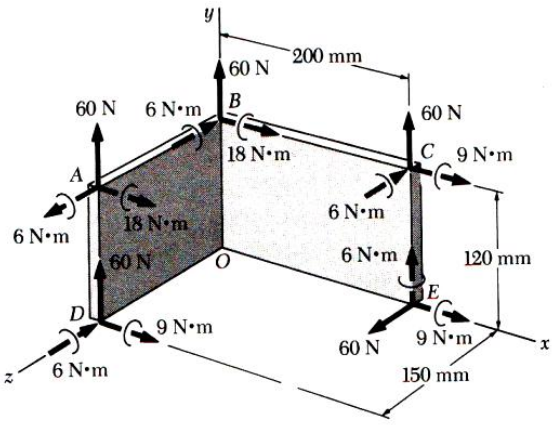
$$M_A = 10.32i - 221k + 12.3i + 15.5\,j$$

$$M_A = 22.6i + 15.5\,j - 22.1k$$

$Mx = 22.6$
$My = 15.5$
$Mz = -22.1$

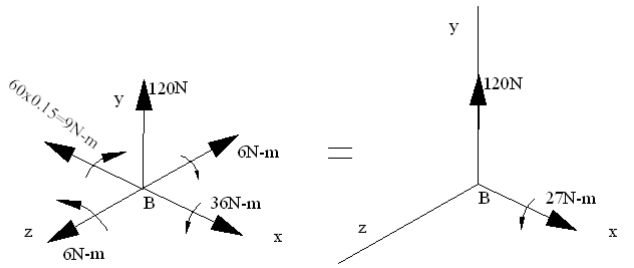


4-24پنج نیرو و کوپل بـه سیسـتم مـذبور اثـر مـی کننـد،نیرو و کوپلی که با هم معادل هستند را پیدا کنید.

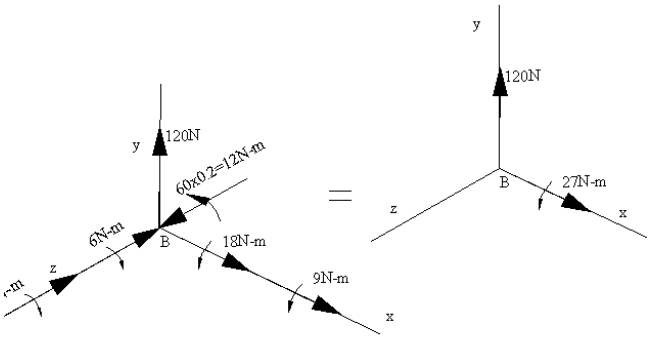


چـون در B, E ، $60N$ در راسـتای y و z اسـت، پـس نمـی تواند معـادل باشـند.تنهـا چیـزی کـه بـاقی مـی مانـد $A \xrightarrow{to} B$ و $C \xrightarrow{to} B$ است.

$A \xrightarrow{to} B$ $\qquad Mx = -60x0.15 = -9\ N-m$
$Mx = -9 + 36 = 27\ N-m$

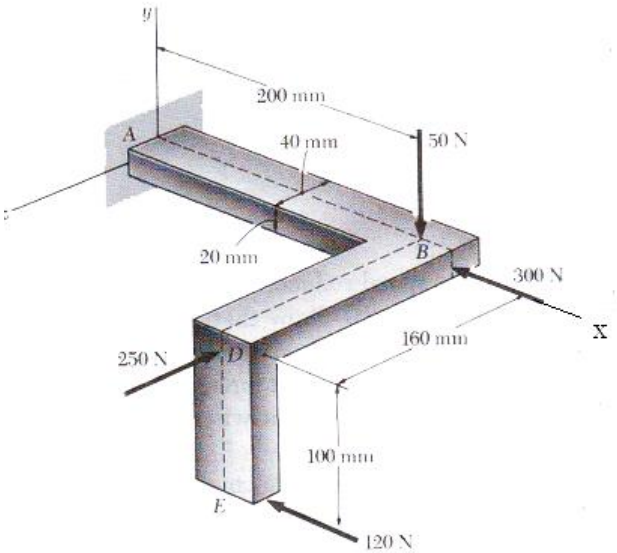


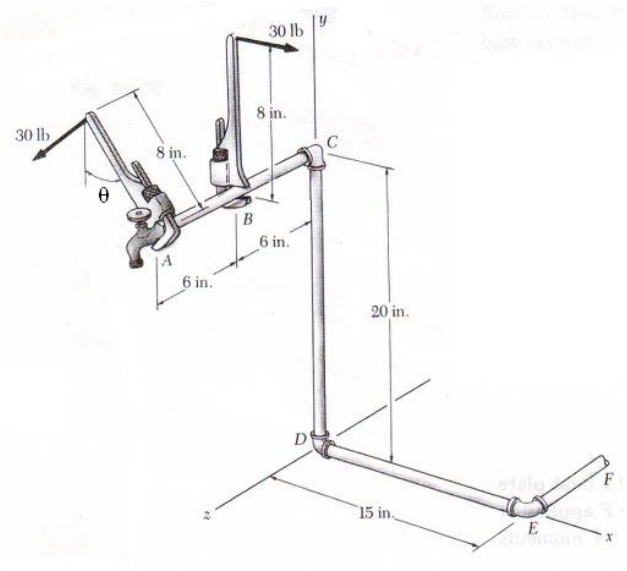
$C \Rightarrow B$
$Mz = -60x0. = -12\ N-m$



پس A و C معادل هستند.

4-27 چهار نیرو مطـابق شـکل بـه یـک ابـزار ماشـین اثـر مـی کنند،سیستم مذبور را به یـک نیـرو و کوپـل معـادل در نقطـهA بدست آورید.





$\theta = 60^\circ$

$E\ (15,0,0)$ $G\ (0.,28,6)$

$F\ (-8\ Sin\theta, 20+8\ Cos\theta, 12)$

$F\ (-8\ Sin60, 20+8\ Cos60, 12)$

$F\ (-6.9, 24, 12)$

$\overrightarrow{M_E} = \overrightarrow{r_{EF}} \times \overrightarrow{F_F} + \overrightarrow{r_{EG}} \times \overrightarrow{F_6}$

$\overrightarrow{F_F} = 30K \qquad F_G = 30i$

$\overrightarrow{F_F} = -30Sin60\ j - 30Cos60i$

$\overrightarrow{F_F} = -26j - 15i$

$\vec{R} = -26j - 15i + 30i = 15i - 26j$

$\overrightarrow{r_{EF}} = (-6.9-15)i + 24j + 12k = -21.9i + 24j + 12k$

$\overrightarrow{r_{EG}} = -15i + 28j + 6k$

$\overrightarrow{M_E} = \left[(-21.9)i + 24j + 12k)\right] \times (-15i - 26j)$

$+\left[-15i + 28j + 6k\right] \times 30i$

$D\ (0.2,0,0.16)$ $E\ (0.2,-0.1,0.16)$

$B\ (0.2,0,0)$

$R_X = -250k - 50j - 300iX$

$-120i$

$R_X = -420i - 50j - 250k$

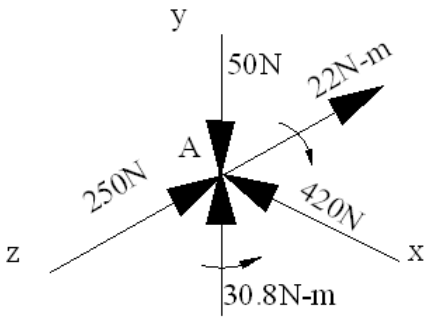
$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_A = 0$

$(50)(0.2)(-K) + 250(0.2)(j) + \overrightarrow{r_{AE}} \times \overrightarrow{F_E} = 0$

$\overrightarrow{M_A} = -10k + 50j + (0.2i - 0.1j + 0.16k) \times (-120i)$

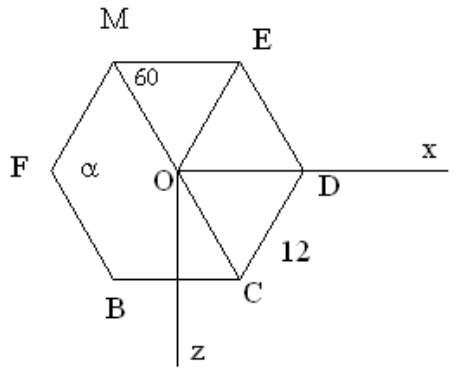
$\overrightarrow{M_A} = -10k + 50j - 12k - 19.2j$

$\overrightarrow{M_A} = -22k + 30.8j \qquad N-m$



4-30 دونیرو 30lbبه دو آچار مطابق شکل وارد می شوند،بطوریکه این نیروها بر صفحه ای که به آچارو لوله می گذرد عمود است،این نیرورابه یک نیرو وکوپل معادل درنقطهE تبدیل کنید.

OM=OE=ME



$$\alpha=\frac{4\times180}{6}=120^{\circ}$$

$$\overrightarrow{r_{OC}}=12Cos60i-12Sin60k$$

$$\overrightarrow{r_{OE}}=12Cos60i+12Sin60k$$

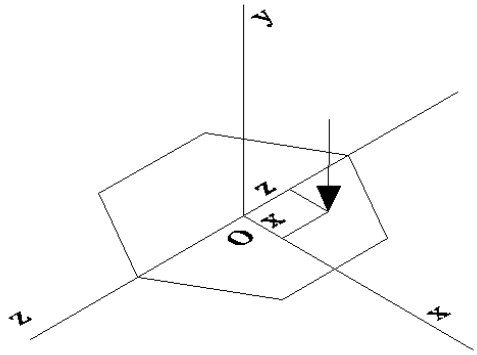
$$\overrightarrow{M_O}=\overrightarrow{r_{OD}}x(-30\,j)+\overrightarrow{r_{OC}}x(-10\,j)+\overrightarrow{r_{OE}}x(-20\,j)$$
$$+\overrightarrow{r_{OF}}x(-15\,j)$$

$$\overrightarrow{M_O}=(30)(12)(-k)+15(12)(k)+\overrightarrow{r_{OC}}x(-10\,j)$$
$$+\overrightarrow{r_{OE}}x(-20\,j)$$

$$\overrightarrow{M_O}=-360\,K+180\,K+$$
$$\left[12\ \ Cos60i-12Sin\ 60K\right]\times-20\,j$$
$$+(12Cos60i-12Sin\ 60K)-10\,j$$

$$\overrightarrow{M_O}=-360K+180K-120k+$$
$$207.8(-i)-60k-103.9(-i)$$

$$\overrightarrow{M_O}=-360K-103.9(i)$$



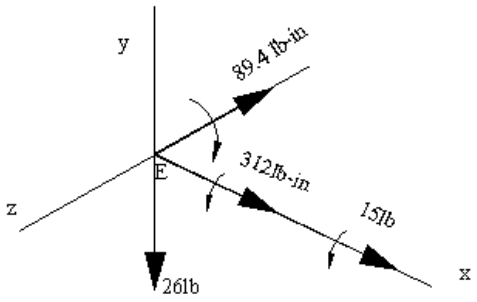
$$\overrightarrow{M_E}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -21.9 & 24 & 12 \\ -15 & -26 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} i & j \\ -21.9 & 24 \\ -15 & -26 \end{matrix}=$$

$$(12)(-15)\,j+(-21.9)(-26)k-(-15)(24)k-(12)(-26)i$$

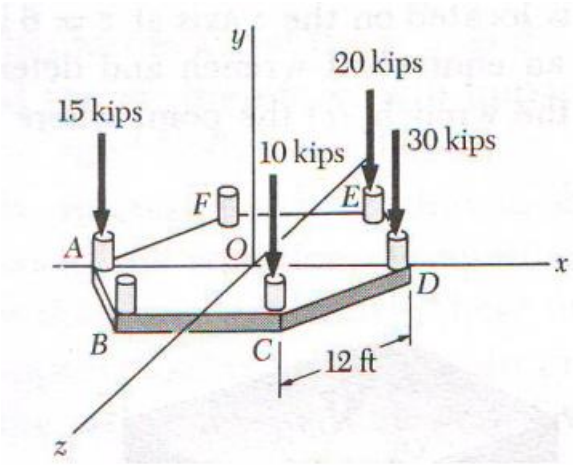
$$M_E=-180\,j+569.4k+360k+312i-28(30)k+6(30)\,j$$

$$M_E=312i+89.4k$$

$$\vec{R}=15i-26\,j$$



4-32 صفحه شش ضلعی بتنی به ضلع 12ftمطابق شکل ،چهار نیرو به این بتن وارد می شود،مطلوبست برآیند نیروها و مختصات نقطه ای که برآیند نیروها ازآن میگذرد.



$$W = 20+30+10+15 = 75\ Kips$$

$$(\overline{X}i + \overline{Z}k)\times -75\,j = -360\,k - 103.9i$$

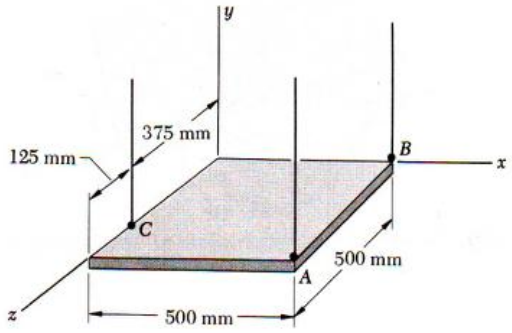
$$-75\ \overline{X}\ k - 75\ \overline{Z}\ (-i) = -360k - 103.9i$$

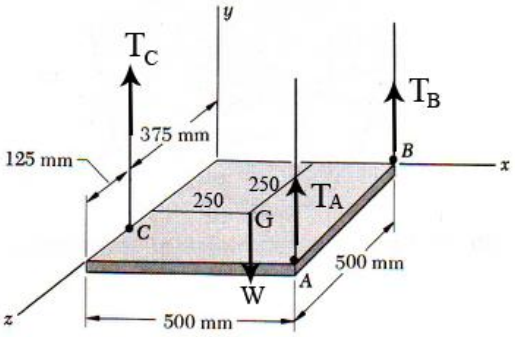
$$-75\ \overline{X}\ k + 75\ \overline{Z}\ (i) = -360k - 103.9i$$

$$k \Rightarrow \quad \overline{X} = \frac{-360}{-75} = 4.8\ \ ft$$

$$i \Rightarrow \quad \overline{Z} = \frac{-103.9}{75} = -1.38\ \ ft$$

4-46 صفحه مربع شکل فلزی به وزن20Kg مطابق شکل به سه کابل متصل شده است،مطلوبست کشش در سه کابل را.





$$W = 20\times 9.81 = 196\ \ N$$

$$T_A + T_B + T_C = W = 196.2$$

$$\sum M_D = 0$$

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{r_{OB}}\times\overrightarrow{r_{OC}}\times T_C + \overrightarrow{r_{OA}}\times T_A + (\overrightarrow{r_{OG}})\times -wj$$

$$\overrightarrow{M_O} = 0.5\ T_B K + 0.375\ (-i)\ T_C + 0.5T_A\ K$$

$$+ 0.5T_A\ (-i) - 49k - 49(-i)$$

$$\begin{cases} i \Rightarrow & 0.5T_A + 0.375T_C = 49 \\ k \Rightarrow & 0.5T_B + 0.5T_A = 49 \quad T_B + T_A = 98 \\ & T_A + T_B + T_C = 196.2 \end{cases}$$

$$T_A + (98 - T_A) + \frac{49 - 0.5T_A}{0.375} = 196.2$$

$$98 + 130.66 - 1.33T_A = 196.2$$

$$1.33T_A = 32.46$$

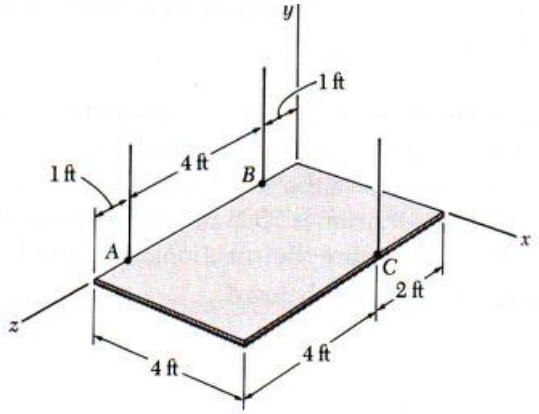
$$T_A = 24.3\ \ KN$$

$$T_B = 98 - 24.3 = 73.7$$

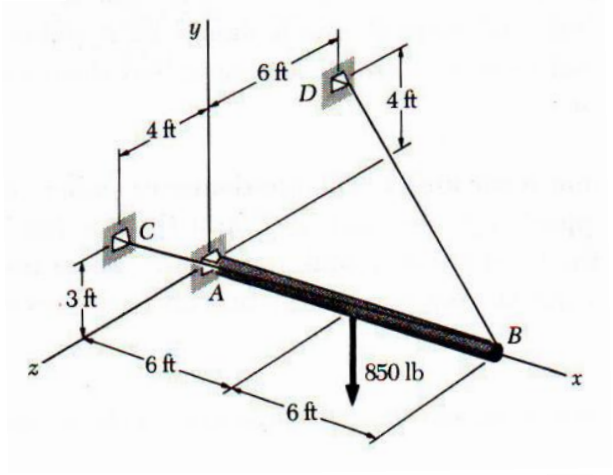
$$T_C = 196.2 - 73.7 - 24.3$$

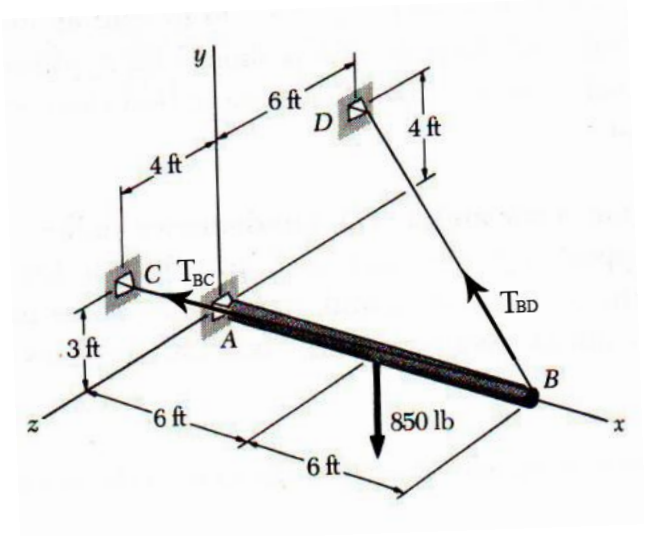
$$T_C = 98.2\ \ KN$$

۴-48 صفحه مستطیل شکل فلزی به وزن ۶۰ پوند،مطابق شکل به سه کابل متصل شده است،اگر جسمی به وزن Wروی این صفحه فلزی بگذاریم،مطلوبست تعیین وزنW و اینکه آنرا کجا باید بگذاریم تا کشش در هر سه کابل50 lb باشد.



4-52 میله AB=12ftبه یک کاسه و ساچمه Aمتصل است و تحت تأثیر نیروی 850lb قرار گرفته است،این میلهAB به دو کابل BCوBD متصل و به صورت تعادل قرار گرفته است،مطلوبست تعیین کشش در هر کابل را، ثانیاً نیروهای وارد برکاسه و ساچمه را حساب کنید.





$C\ (0,3,4)\qquad D\ (6,4,-6)$

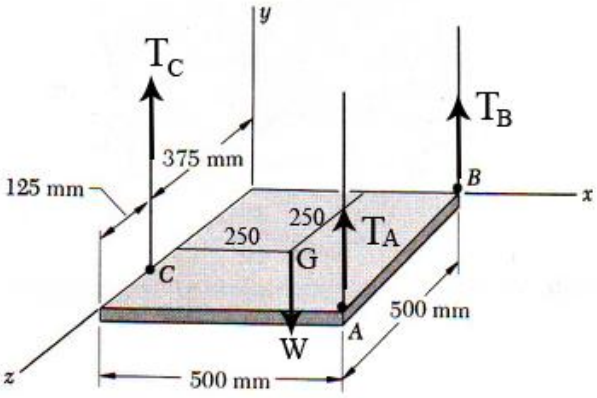
$G\ (6,0,0)\qquad B\ (12,0,0)$

$$\overrightarrow{M_A}=\overrightarrow{r_{AB}}\times\overrightarrow{T_{BD}}+\overrightarrow{r_{AG}}-850j$$

$$\overrightarrow{\lambda_{BD}}=\frac{\overrightarrow{r_{BD}}}{\overrightarrow{BD}}=\frac{-12i+4j-6k}{14}$$

$$\overrightarrow{\lambda_{BC}}=\frac{\overrightarrow{r_{BC}}}{\overrightarrow{BC}}=\frac{-12i+3j+4k}{13}$$

$$\overrightarrow{r_{AG}}=6i\qquad \overrightarrow{r_{AB}}=12i$$



$$T_A=T_B=T_C=50\ 1b$$

$$T=50+50+50-60=90\ \ lb$$

$$\overrightarrow{M_O}=\overrightarrow{r_{OB}}\times\overrightarrow{T_B}+\overrightarrow{r_{OA}}\times\overrightarrow{T_A}+\overrightarrow{r_{OC}}\times T_C$$

$$+\overrightarrow{r_{OG}}x(-60\,j)+\overrightarrow{r_{ON}}\times -Tj$$

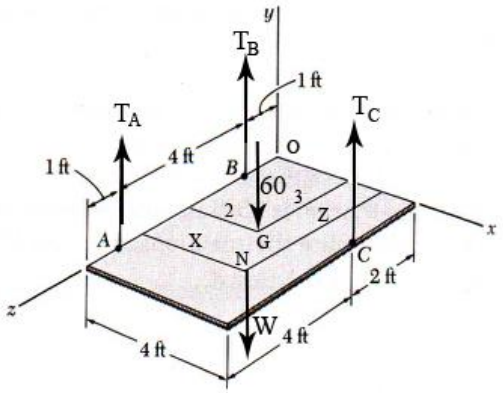
$$\overrightarrow{M_O}=(k)\times 50\,j+(5k\times 50\,j)+(4i+2k)\times 50\,j$$

$$+(2i+3k)x(-60\,j)+(\overline{X}i+\overline{Z}k)\times -90\,j$$

$$\overrightarrow{M_O}=-50i-250i+200k-100i-120k+180i$$

$$-90\ \overline{X}\ k+90\overline{Z}\ i$$

$$\begin{cases} i\Rightarrow -50-250-100+180+90\ \ \overline{Z}=0 \\ k\Rightarrow 200-120-90\overline{X}=0 \end{cases}$$



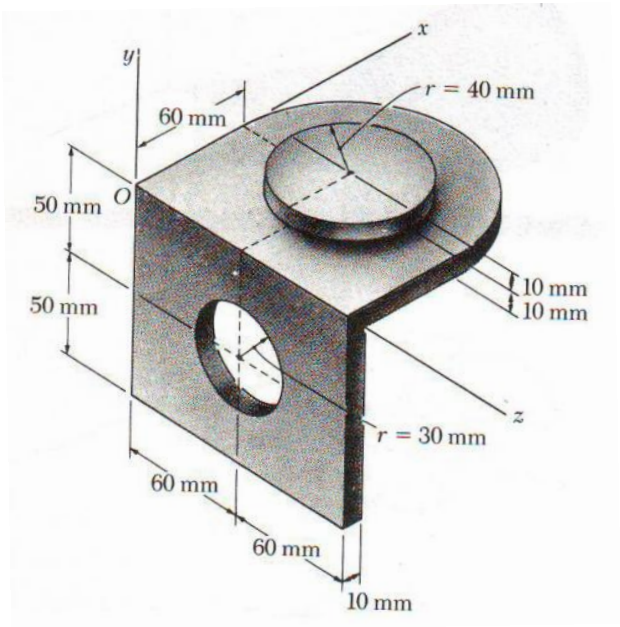
$$90\overline{Z}=220$$

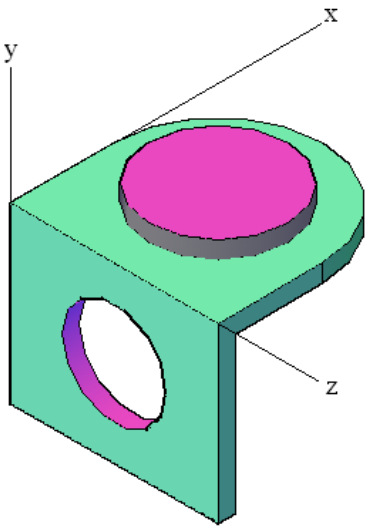
$$\overline{Z}=2.44\ \ ft$$

$$90\overline{X}=80$$

$$\overline{X}=0.889\ \ ft$$

5-106مرکز شکل زیر را بدست آورید.

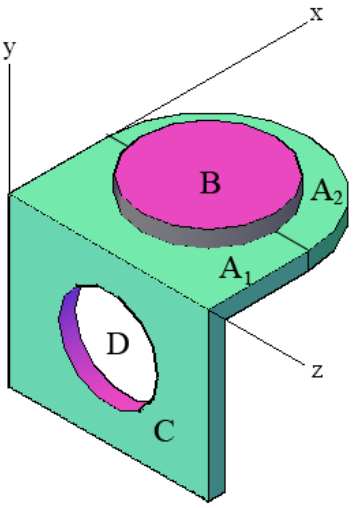


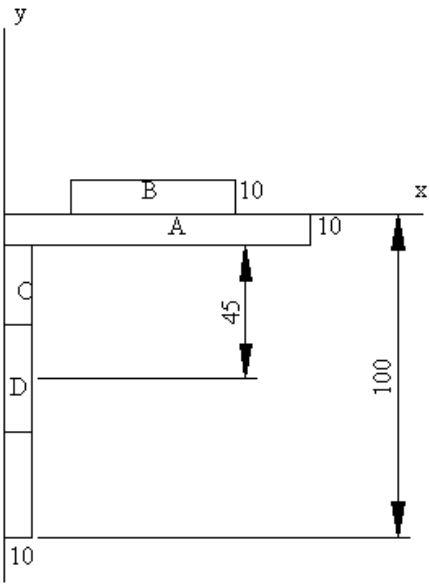


$$M_A = 12i \times \frac{T_{BD}}{14}(-12i + 4j - 6k)$$
$$+12i \times \frac{T_{BD}}{13}(-12i + 3j + 4k) + 6i \times 850\ j$$
$$M_A = \frac{48}{14}\ T_{BD}\ K - \frac{72}{14}\ T_{BD}\ (-j) + \frac{12}{13}\ T_{BC} \times 3K$$
$$+\frac{12}{13} \times 4\ T_{BC}\ (-j) - 5100\ K$$

$$j \Rightarrow \quad \frac{72}{14} T_{BD} = \frac{12}{13} x 4 T_{BC}$$
$$T_{BD} = 0.7179\, T_{BC}$$

$$K \Rightarrow \frac{48}{14}\ T_{BD} + \frac{12 \times 3}{13}\ T_{BC} = 5100$$
$$\frac{48}{14}\ (0.7179\ T_{BC}) + 2.76\ T_{BC} = 5100$$
$$2.46\ T_{BC} + 2.76\ T_{BC} = 5100$$
$$T_{BC} = \frac{5100}{5.22} = 977\ 1b$$
$$T_{BD} = 700\ 1b$$
$$\sum Fx = 0$$
$$Ax - \frac{12}{14}\ (700) - \frac{12}{13}\ (977) = 0$$
$$Ax = 600 + 900 = 1500\ 1b\ \rightarrow$$
$$\sum Fy = 0$$
$$Ay + \frac{4}{14}\ (700) - 850 + \frac{3}{13}\ (977) = 0$$
$$Ay = 425\ 1b\ \uparrow$$
$$\sum Fz = 0$$
$$Az - \frac{6}{14}\ (700) + \frac{4}{13}\ (977) = 0$$
$$Az = -300 + 300 = 0$$
$$Az = 0$$





$$V_{A1} = 60 \times 120 \times 10 = 72000 \quad mm^3$$

$$V_{A2} = \frac{\pi}{2} \times (60)^2 \times 10 = 56548.7 \quad mm^3$$

$$V_B = \pi \times (40)^2 \times 10 = 50265.5 \quad mm^3$$

$$V_C = 120\,x90\,x10 = 108000 \quad mm^3$$

$$V_D = \pi(30)^2 \times 10 = 28274.3 \quad mm^3$$

$$\bar{X} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4x60}{3\pi} = 25.46 \quad mm$$

Shap	V	$\bar{x}$	$V\bar{x}$
A_1	72000	30	2160000
A_2	56548.7	85.46	4832652
B	50265.5	60	3015930
C	108000	5	540000
D	-28274.3	5	-141370
	258540		10407210

$\bar{y}$	$V\bar{y}$	$\bar{Z}$	$V\bar{Z}$
-5	-360000	60	4320000
-5	-282744	60	3392922
+5	+251328	60	3015930
-55	-5940000	60	6480000
-50	+1413700	60	-1696458
	-4776329		15512394

$$X = \frac{VX}{V} = \frac{10407210}{258540} = 40.25 \quad mm$$

$$\bar{y} = \frac{V\bar{y}}{V} = \frac{-4776329}{258540} = -19.1 \quad mm$$

$$\bar{Z} = \frac{15512394}{258540} = 60 \quad mm$$

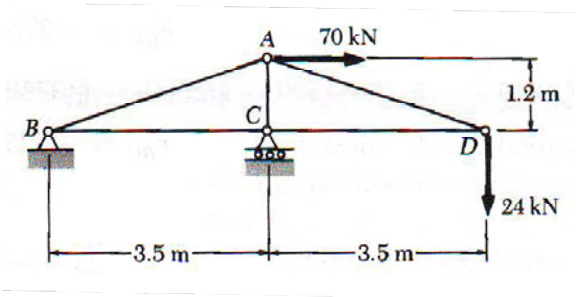
همانطور که مشاهده می شود،بوسیلهAutoCAD ،این اجزاء بدست آمده است.

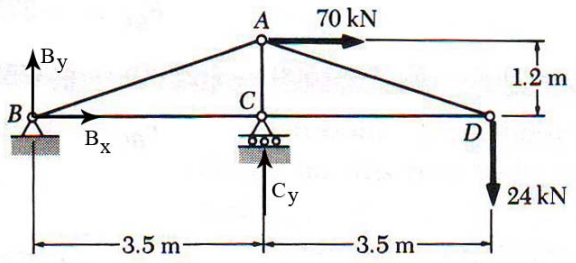
```
Select objects:

----------------    SOLIDS    ----------------

Mass:                          258539.8163
Volume:                        258539.8163
Bounding box:                  X:  0.0000  --  120.0000
                               Y: -100.0000  --  10.0000
                               Z:  1.2500  --  121.2500
Centroid:                      X:  40.2550
                               Y: -19.0211
                               Z:  61.2500
Moments of inertia:            X:  1579079460.4295
                               Y:  1967961031.4532
                               Z:  1045907394.7133
Products of inertia:           XY: -42516623.2005
                               YZ: -301209077.9858
                               ZX:  637461063.0314
Radii of gyration:             X:  78.1517
                               Y:  87.2458
```

فصل ۶

خرپا

6-2از متد گره ها استفاده شود،مطلوبست نیروی وارد بر هر عضو از خرپای شکل زیر را و نشـان دهیـد کـدام عضـو تحـت نیـروی کششی یا فشاری قرار گرفته است.





$$\sum MB = 0 \quad \text{↵}^{+}$$

$$(24)\ (7) + 70\ (1.2) - Cy\ (3.5) = 0$$

$$168 + 84 = 3.5\ Cy$$

$$Cy = 72\ \ KN$$

$$+\uparrow \quad \sum Fy = 0$$

$$By + Cy - 24 = 0$$

$$By + 72 - 24 = 0$$

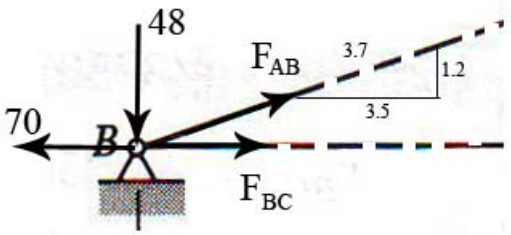
$$By = -48\ \ KN$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = 0$$

$$Bx + 70 = 0$$

$$Bx = -70\ \ KN$$

Node B)



$$+\uparrow \quad \sum Fy = 0$$

$$-48 + F_{AB}\ (\frac{1.2}{3.7}) = 0$$

$$F_{AB} = 148\ \ KN \quad T$$

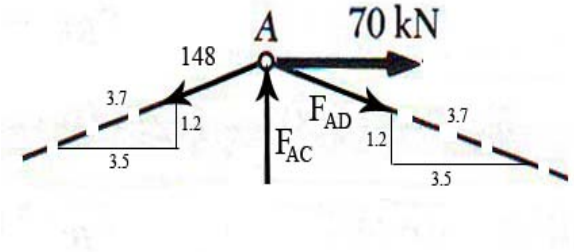
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = 0$$

$$-70 + F_{BC} + 148\ (3.5/3.7) = 0$$

$$-70 + F_{BC} + 140 = 0$$

$$F_{BC} = -70\ \ KN \quad C$$

Node A)



$$+\uparrow \quad \sum Fy = 0$$

$$F_{AC} - 148\ (\frac{1.2}{3.7}) - F_{AD}\ (\frac{1.2}{3.7}) = 0$$

$$F_{AC} - 48\ (\frac{1.2}{3.7}) - F_{AD}\ (\frac{1.2}{3.7})$$

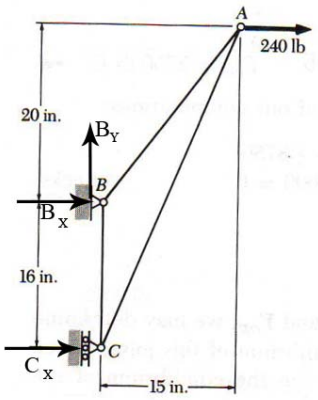
$$+ F_{AC} - F_{AD}\ (\frac{1.2}{3.7}) = 48$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = 0$$

$$70 + F_{AD}\ (\frac{3.5}{3.7}) - 148\ (\frac{3.5}{3.7}) = 0$$

$$70 + F_{AD}\ (\frac{3.5}{3.7}) - 140 = 0$$

$$F_{AD} = 74\ \ KN \quad T$$



$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_C = 0 \qquad 24\ (36) + Bx\ (16) = 0$$

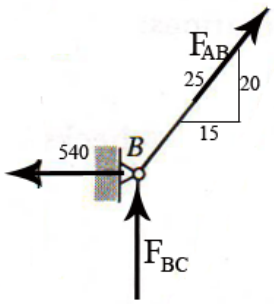
$$Bx = -540\ \ 1b \leftarrow$$

$$\sum Fx = 0 \qquad Bx + Cy + 240 = 0$$

$$-540 + Cx + 240 = 0 \qquad Cx = 300 \rightarrow$$

$$\sum Fy = 0 \qquad By = 0$$

Node B)



$$\sum Fx = 0$$

$$540 = F_{AB}\ (\frac{15}{25})$$

$$F_{AB} = 900 \quad 1b \quad T$$

$$\sum Fy = 0$$

$$F_{BC} + F_{AB}\ (^{20}\!/_{25}) = 0$$

$$F_{BC} + 900\ (^{20}\!/_{25}) = 0$$

$$F_{BC} = -720\ \ 1b \quad C$$

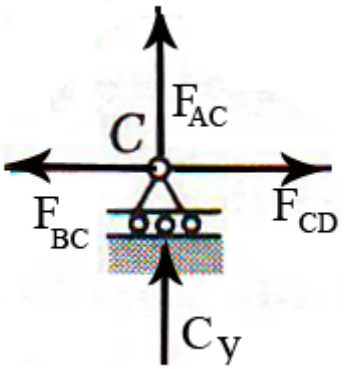
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = 0$$

$$F_{AC} - 74\ (\frac{1.2}{3.7}) = 48$$

$$F_{AC} - 24 = 48$$

$$F_{AC} = 72\ \ KN \quad T$$

Node C)



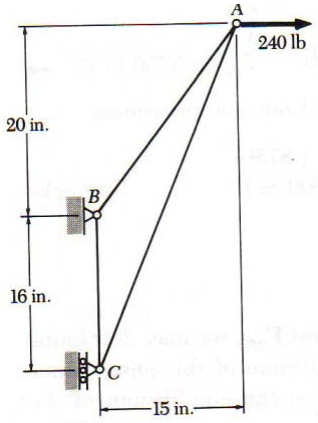
$$\sum Fx = 0$$

$$-F_{BC} + F_{CD} = 0$$

$$-(-70) + F_{CD} = 0$$

$$F_{CD} = -70\ \ KN \quad C$$

6-4 از متد گره ها استفاده شود،مطلوبست نیروی وارد بر هر عضو از خرپای شکل زیر را و نشان دهید کدام عضو تحت نیروی کششی یا فشاری قرار گرفته است.



$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0$$

$$(3)\ (2.4) + 6\ (1.2) + Ax\ (0.9) = 0$$

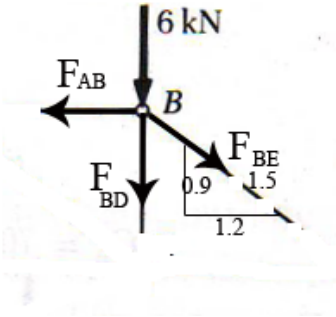
$$Ax = -16\ \ KN$$

$$\sum Fx = 0$$

$$Ax + Cx = 0$$

$$Cx = 16\ \ KN$$

Node B)



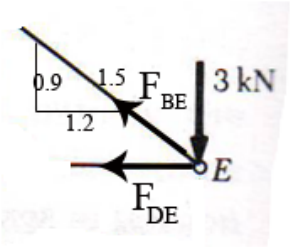
$$F_{AB} = F_{AB}\ (\frac{1.2}{1.5}) = 0.8\ F_{BE}$$

$$\sum Fy = 0$$

$$-6 - F_{BD} - F_{BE}\ (\frac{0.9}{1.5}) = 0$$

$$6 + F_{BD} + 0.6\ F_{BE} = 0$$

Node E)



$$\sum Fy = 0$$

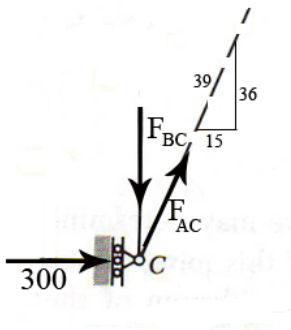
$$-3 + F_{BE}\ (\frac{0.9}{1.5}) = 0$$

$$F_{BE} = 5\ \ KN\ \ T$$

$$\sum Fx = 0$$

$$-F_{DE} - F_{BE}\ (\frac{1.2}{1.5}) = 0$$

Node C)

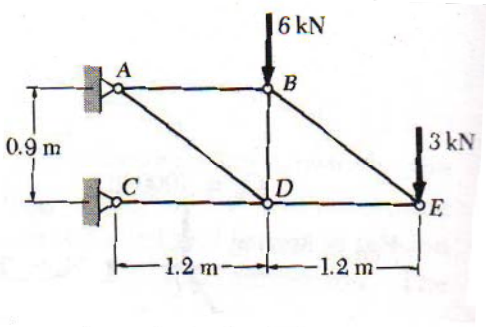


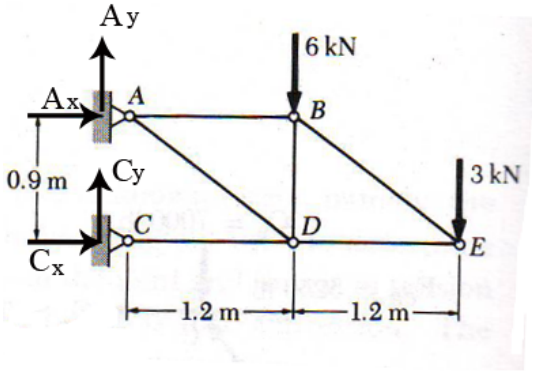
$$\sum Fx = 0$$

$$300 + F_{AC}\ (15/39) = 0$$

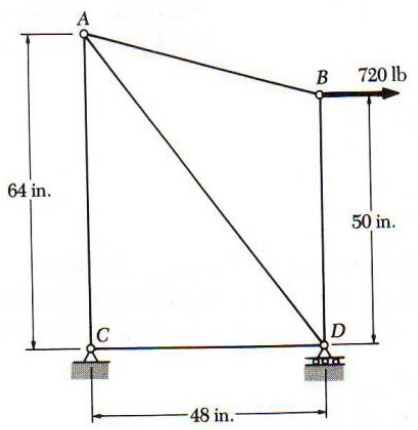
$$F_{AC} = -780\ \ C$$

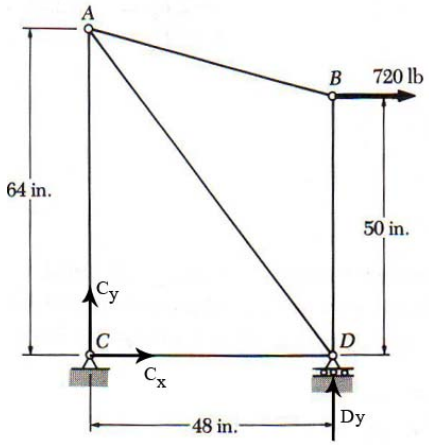
6-6 از متد گره ها استفاده شود،مطلوبست نیروی وارد بر هر عضو از خرپای شکل زیر را و نشان دهید کدام عضو تحت نیروی کششی یا فشاری قرار گرفته است.





6-8 از متد گره ها استفاده شود،مطلوبست نیروی وارد بر هر عضو از خرپای شکل زیر را و نشان دهید کدام عضو تحت نیروی کششی یا فشاری قرار گرفته است.





$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0$$

$$720\ (50) - Dy\ (48) = 0$$

$$Dy = 750\ 1b$$

$$\sum Fy = 0$$

$$Cy + Dy = 0 \qquad Cy = -750\ lb$$

$$\sum Fx = 0$$

$$Cx = -720$$

$$-F_{DE} - 5(\frac{1.2}{1.5}) = 0$$

$$F_{DE} = -4 \quad KN \quad C$$

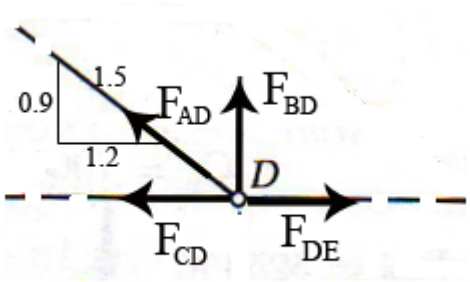
$$F_{AB} = 0.8F_{BE} = 0.8(5) = 4\ KN \quad T$$

$$F_{AB} = 0.8\ (5) = 4\ KN$$

$$6 + F_{BD} + 0.6F_{BE} = 0$$

$$6 + F_{BD} + 0.6(5) = 0 \qquad F_{BD} = -9\ KN \qquad C$$

Node D)



$$\sum Fy = 0$$

$$F_{BD} + F_{AD}(\frac{0.9}{1.5}) = 0$$

$$-9 + 0.6\ F_{AD} = 0$$

$$F_{AD} = +15\ KN \qquad T$$

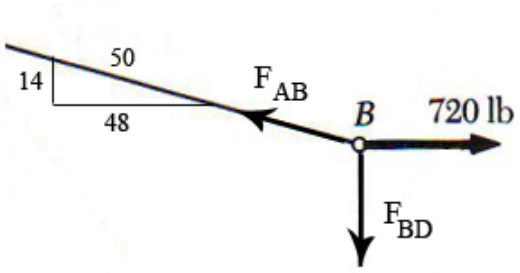
$$\sum Fx = 0$$

$$-F_{CD} + F_{DE} - F_{AD}\ (\frac{1.2}{1.5}) = 0$$

$$-F_{CD} - 4 - 15\ (0.8) = 0$$

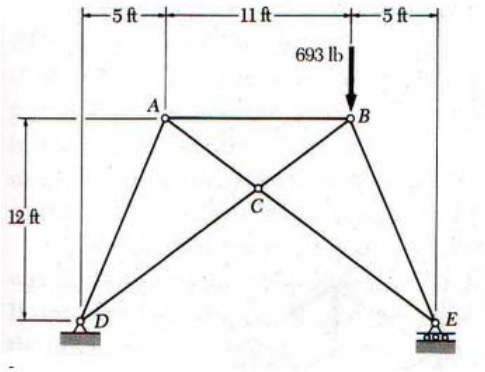
$$F_{CD} = -16\ KN \qquad C$$

Node B)

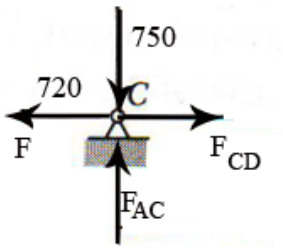


$$720 = F_{AB}\ (48/50)$$
$$F_{AB} = 750\ \ T$$
$$F_{BD} = 750 \times \frac{14}{50}$$
$$F_{BD} = 210\ \ lb \quad T$$

6-10 از متد گره ها استفاده شود،مطلوبست نیروی وارد بر هر عضو از خرپای شکل زیر را و نشان دهید کدام عضو تحت نیروی کششی یا فشاری قرار گرفته است.



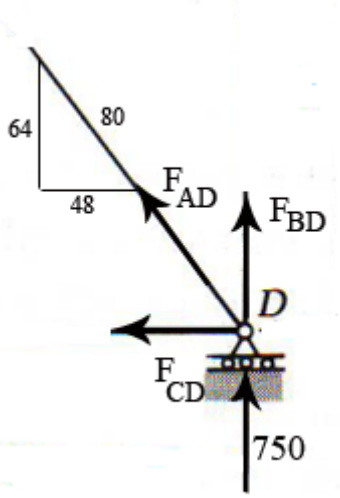
Node C)



$$F_{AC} = 750\ \ 1b\ T$$

$$F_{CD} = 720\ 1b\ \ T$$

Node D)



$$\sum Fx = 0 \Rightarrow -F_{CD} - F_{AD}\ (48/80) = 0$$
$$+720 = -F_{AD}\ (48/80)$$
$$F_{AD} = -1200 \quad lb \quad C$$

$$165+(-2.08)\frac{12}{13}F_{DC}+F_{DC}\frac{12}{20}=0$$

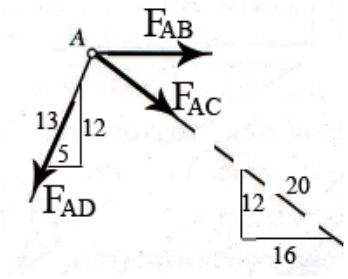
$$165=1.32F_{DC}$$

$$F_{DC}=125\ 1b \quad T$$

$$F_{AD}=-(2.08)\times 125$$

$$F_{AD}=-260\ 1b \quad C$$

Node A)



$$\sum Fx=0$$

$$F_{AB}-F_{AD}\ (5/13)+F_{AC}\ (16/20)=0$$

$$\sum Fy=0$$

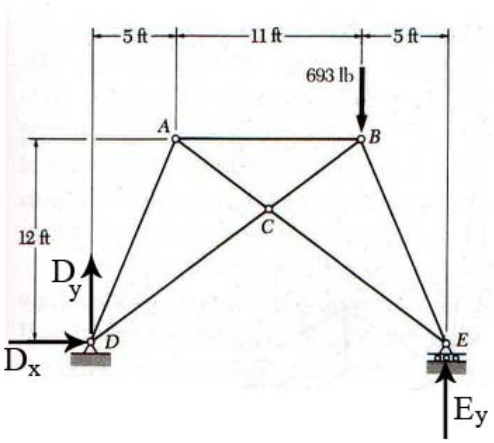
$$F_{AD}\ (12/13)+F_{AC}\ (12/20)=0$$

$$F_{AC}=-\frac{12}{13}\times\frac{20}{12}\times -260$$

$$F_{AC}=400 \quad T$$

$$F_{AB}=-260\ (5/13)-400\ (\frac{16}{20})$$

$$F_{AB}=-420\ lb \quad C$$



$$^{+}\circlearrowleft \sum M_D=0$$

$$-(Ey)\ (21)+693\ (16)=0$$

$$Ey=528\ 1b\ \uparrow$$

$$\sum Fy=0$$

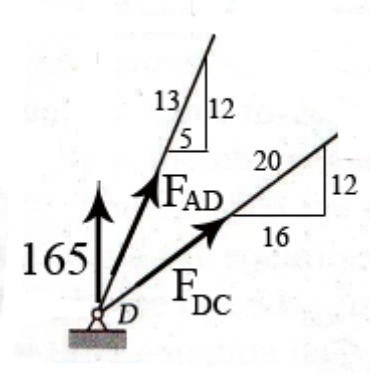
$$-693+Dy+Ey=0$$

$$Dy=165 \quad 1b$$

$$\sum Fx=0$$

$$Dx=0$$

Node D)



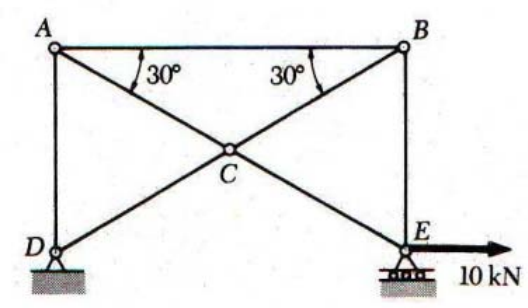
$$\sum Fy=0$$

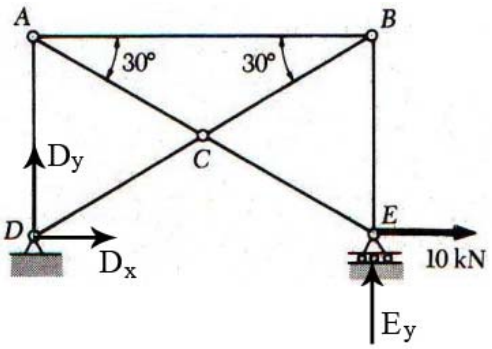
$$165+F_{AD}\ (\frac{12}{13})+F_{DC}\ (12/20)=0$$

$$\sum Fx=0$$

$$F_{AD}(\frac{5}{13})+F_{DC}\ (16/20)=0$$

$$F_{AD}=-(2.08)F_{DC}$$





$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_A = 0$$

$$-Ey\ (DB)\ Cos30 - 10DB\ Sin30 - Dx\ DBSin30 = 0$$

$$Ey\ Cos30 + 10Sin30 + Dx\ Sin30 = 0$$

$$\sum Fx = 0$$

$$Dx = -10\ \ KN$$

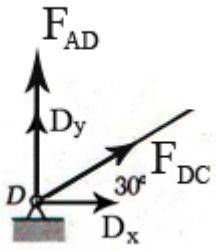
$$\sum Fy = 0$$

$$Ey\ (0.866) + 5 - 5 = 0$$

$$Ey = 0$$

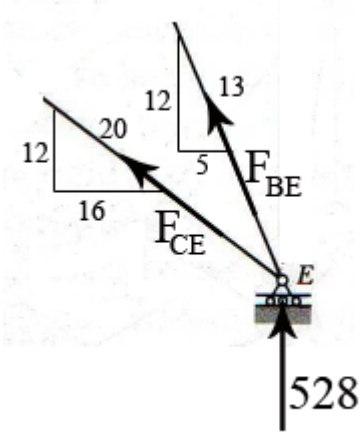
$$Dy = 0$$

Node D)



$$\sum Fx = 0$$

Node E)



$$\sum Fy = 0$$

$$(\frac{12}{13})\ F_{BE} + 528 + \frac{12}{20}\ (F_{CE}) = 0$$

$$F_{CE} = F_{AC} = 400\ \ lb$$

$$(\frac{12}{13})\ F_{BE} + 528 + \frac{12}{20}\ (400) = 0$$

$$(\frac{12}{13})\ F_{BE} + 528 + 240 = 0$$

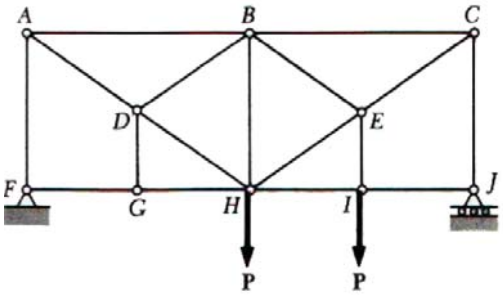
$$(\frac{12}{13})\ F_{BE} = -768$$

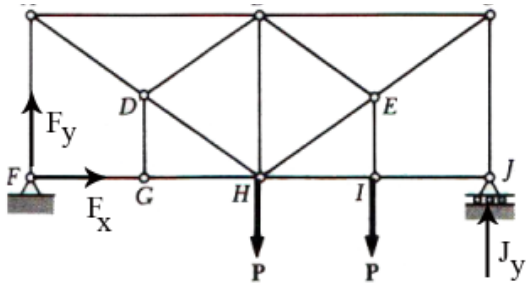
$$F_{BE} = -832 \quad 1b \quad C$$

6-12 از متد گره ها استفاده شود،مطلوبست نیروی وارد بـر هـر عضو از خرپای شکل زیر را و نشان دهید کدام عضو تحت نیـروی کششی یا فشاری قرار گرفته است.

$F_{BE} = -0.5 \times 11.55 = -5.77 \quad KN \quad C$

6-14 کدام یک از اعضای خرپای شکل زیر،عضو خنثی(عضو صفر) دارند؟





$\sum M_F = 0$

$-(Jy)\ (4L) + P\ (3L) + P\ (2L) = 0$

$Jy = 5P$

$\sum Fy = 0$

$Jy + F_Y - 2P = 0$

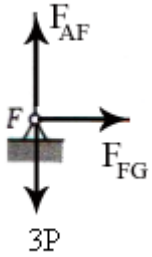
5P+Fy-2P=0

$Fy = -3P$

$\sum Fx = 0$

$Fx = 0$

Node F)



$\sum Fy = 0 \qquad F_{AF} = 3P$

$\sum Fx = 0 \qquad F_{FG} = 0$

$D_X + F_{DC}\ Cos30 = 0$

$-10 + F_{DC}\ Cos30 = 0$

$F_{DC} = 11.55\ KN \quad T$

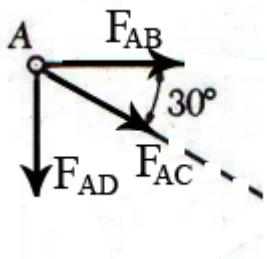
$\sum Fy = 0$

$F_{AD} + D_Y + F_{DC}\ Sin30 = 0$

$F_{AD} = -0.5 \times 11.55$

$F_{AD} = -5.77\ KN \quad C$

Node A)



$\sum Fy = 0$

$-F_{AD} - F_{AC}\ Sin30 = 0$

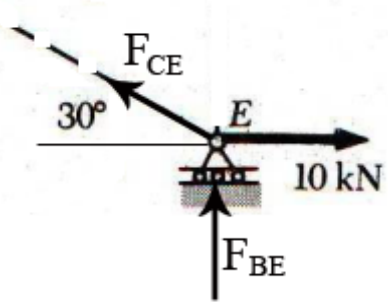
$F_{AC} = -\ (\frac{-5.77}{0.5}) = 11.55\ KN \quad T$

$\sum Fx = 0$

$F_{AB} + F_{AC}\ Cos30 = 0$

$F_{AB} = -0.866 \times 11.55 = -10 \quad KN \quad C$

Node E)



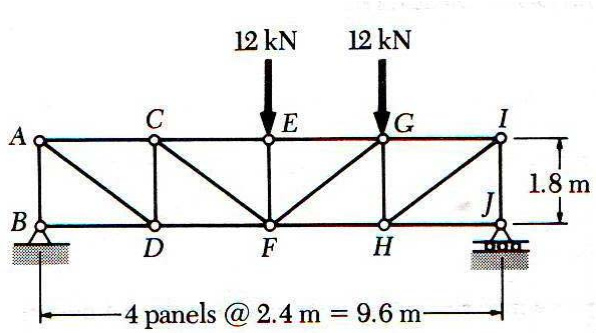
$\sum Fx = 0$

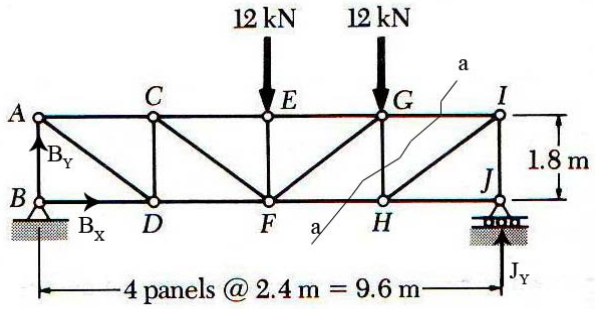
$F_{CE} Cos30 = 10 \qquad F_{CE} = 11.55\ KN \quad T$

$\sum Fy = 0$

$F_{BE} + F_{CE} Sin30 = 0$

6-22نیروهای FGو FH،عضوی از خرپای شکل زیر را پیدا کنید.





$\sum M_B = 0 \circlearrowleft^+$

$-(Jy)\ (9.6) + 12\ (7.2) + 12\ (4.8) = 0$

$Jy = 15 \quad KN \quad \uparrow$

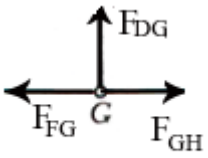
$\sum Fy = 0 \Rightarrow +By - 12 - 12 + 15 = 0$

$By = 9 \ \uparrow$

$\sum Fx = 0$

$Bx = 0$

Node G)



$\sum Fy = 0$

$F_{DG} = 0$

$\sum Fx = 0$

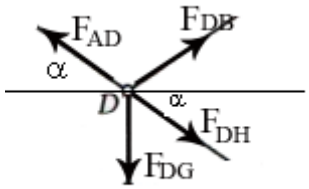
$F_{FG} = F_{GH} = 0$

در گره J ،مطابق گرهF عمل می شود،پس $F_{CJ} = -5P$ بدست خواهد آمد،و در گره I،چون نیروها در راستایx ،یعنی

$$F_{IJ} = F_{HI}$$

$$F_{IJ} = 0$$

Node D)



$\sum Fy = 0$

$F_{DA}Sin\alpha + F_{DB}Sin\alpha - F_{DH}Sin\alpha - F_{DG} = 0$

در بازویADH،طبق قانون دو نیروها،نیروی F_{AD}وF_{DH}،باید مساوی باشند.،پس

$+ F_{DB}Sin\alpha - F_{DG} = 0$

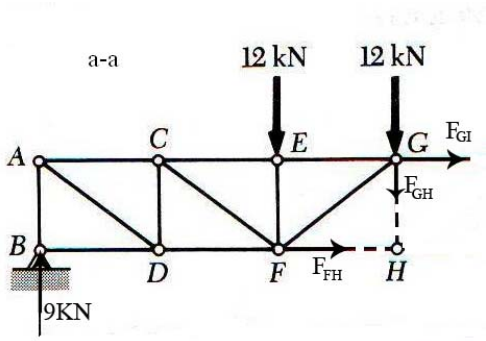
$+ F_{DB}Sin\alpha - 0 = 0$

$+ F_{DB} = 0$

پس نیروهای خنثی اینها هستند

$$F_{FG} = F_{GH} = F_{DG} = F_{DB} = F_{HI} = F_{IJ} = 0$$

برش a-a



$$\sum Fy = 0$$

$$-F_{GH} - 12 - 12 + 9 = 0$$

$$F_{GH} = -15 \; KN \quad C$$

$$\sum M_B = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$-15\ (2.4)\ (3) + 12\ (2.4)\ (3) + 12\ (2.4)\ (2)$$

$$+ FGI\ (1.8) = 0$$

$$-108 + 86.4 + 57.6 + F_{GI}\ (1.8) = 0$$

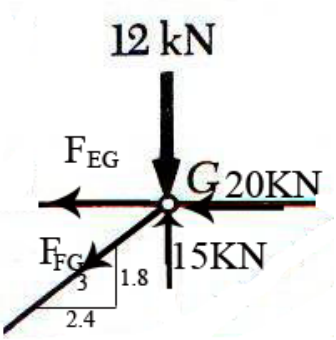
$$F_{GI} = -20 \quad KN \quad C$$

$$F_{FH} = 20 \quad KN \quad T$$

$$\sum Fx = 0$$

$$F_{FH} + F_{GI} = 0$$

Node G)



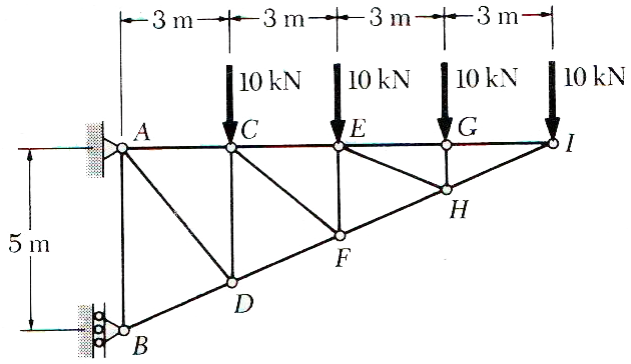
$$\sum Fy = 0$$

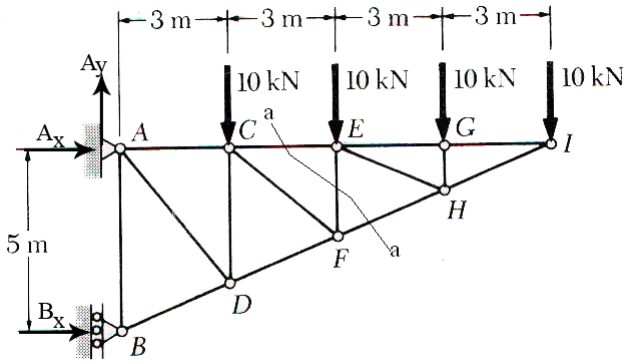
$$+15 - 12 - F_{FG}\ (1.8/3) = 0$$

$$0.6\ F_{FG} = +3$$

$$F_{FG} = 5 \; KN \quad T$$

6-24 نیروهای CE و EF ،عضوی از خرپای شکل زیر را پیدا کنید.





$$\sum Fy = 0 \qquad Ay - 10 - 10 - 10 - 10 = 0$$

$$Ay = 40 \quad \uparrow$$

$$\sum M_B = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$(10)\ (12) + 10\ (9) + 10\ (6) + 10\ (3)$$

$$+ Ax\ (5) = 0$$

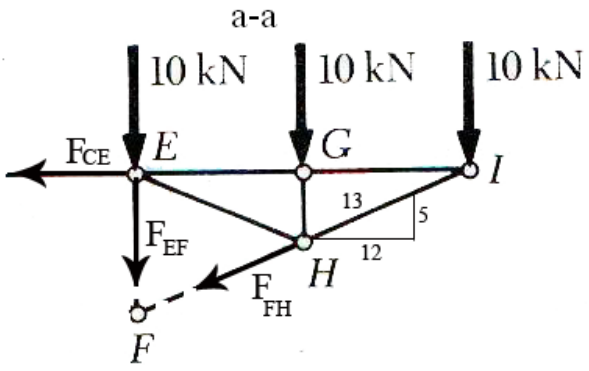
$$5Ax = -300$$

$$Ax = -60$$

$$\sum Fx = 0$$

$$Bx + Dx = 0 \quad Bx = 60$$

برش a-a



$$\sum M_I = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

$$-F_{EF}(6) - 10\ (6) - 10\ (3) = 0$$

$$6F_{EF} = -60 - 30 = -90$$

$$F_{EF} = -15\ KN \quad C$$

$$\sum Fy = 0$$

$$-30 + 15 - F_{FH}\ (5/13) = 0$$

$$F_{FH} = -39 \quad KN \quad C$$

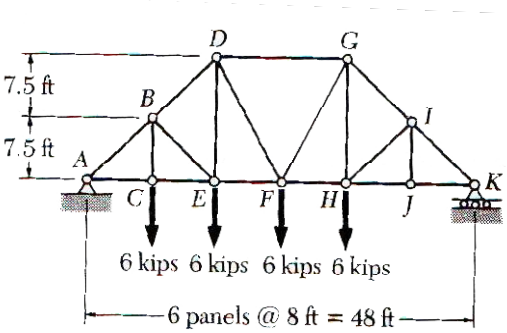
$$\sum Fx = 0$$

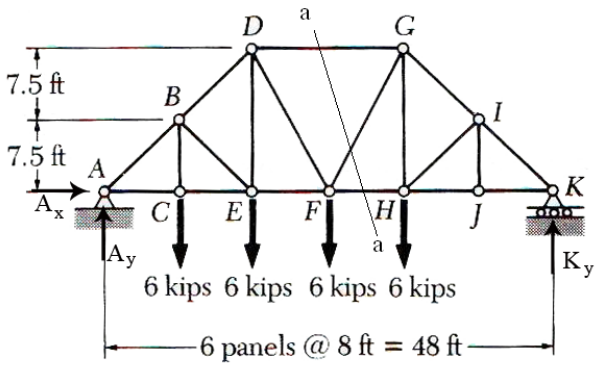
$$-F_{CE} - F_{FH}\ (\frac{12}{13}) = 0$$

$$F_{CE} = +39\ (12/13)$$

$$F_{CE} = 36\ KN \quad T$$

6-26 نیروهای FGو FH ،عضوی از خرپای شکل زیر را پیدا کنید.





$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

$$-(Ky)\ (48) + (6)\ 32 + 6\ (24) + 6\ (16) + 6\ (8) = 0$$

$$Ky\ (48) = 480$$

$$Ky = 10\ \ Kips$$

$$\sum Fy = 0$$

$$Ay + Ky - 24 = 0 \qquad Ay = 14 \quad Kips$$

$$\sum Fx = 0$$

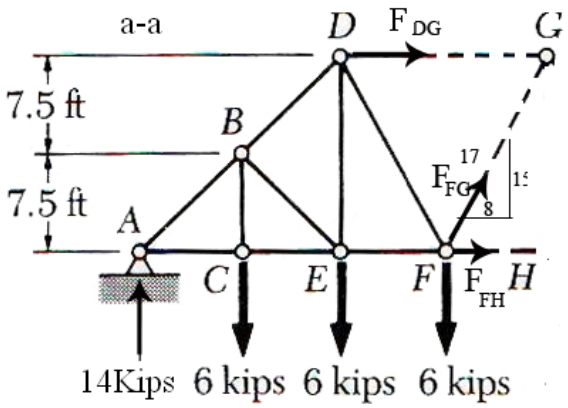
$$Ax = 0$$

$$F_{FG} = 4 \times 17/15 = 4.53 \quad T$$

$$\sum Fy = 0$$

$$14 - 18 + F_{FG}(15/17) = 0$$

برش a-a



$$\curvearrowleft^{+} \sum MA = 0$$

$$F_{DG}\ (15) + 6(24) + 6(16) + 6(8) - F_{FG}\ (\frac{15}{17})\ (24) = 0$$

$$15\ F_{DG} + 288 - 4 \times \frac{17}{15}(\frac{15}{17})\ (24) = 0$$

$$15\ F_{FG} + 288 - 96 = 0$$

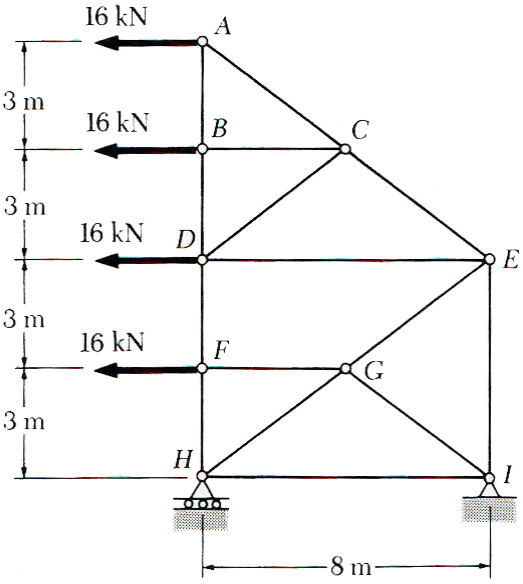
$$F_{DG} = -12.8\ \ Kips$$

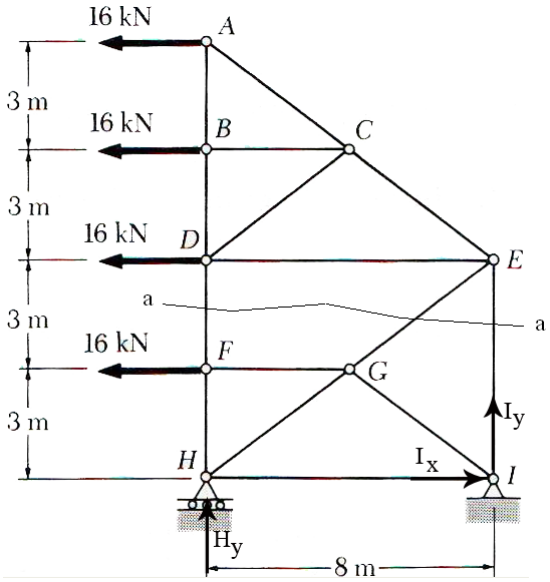
$$F_{DG} + F_{FH} + F_{FG}\ (\tfrac{8}{17}) = 0$$

$$-12.8 + F_{FH} + 4 \times \frac{17}{15} \times \tfrac{8}{17} = 0$$

$$F_{FH} = 10.67 \quad T$$

6-28 نیروهای EIو EG ،عضوی از خرپای شکل زیر را پیدا کنید.





$$\sum M_H = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$-Iy\ (8) - 16\ (12) - 16\ (9) - 16\ (6) - 16\ (3) = 0$$

$$8Iy = -192 - 144 - 96 - 48 = -480$$

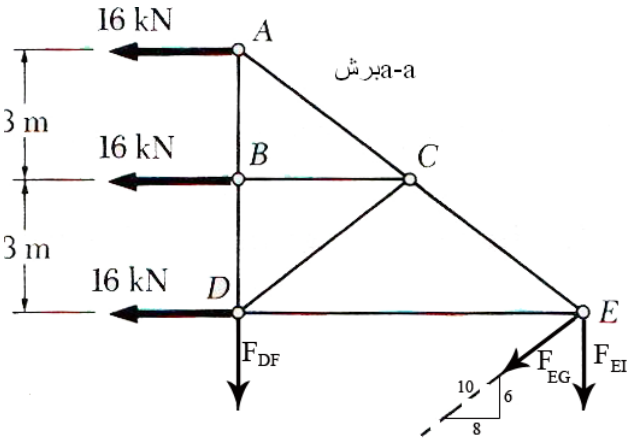
$$Iy = -60\ \ KN$$

$$\sum Fy = 0 \qquad Hy + Iy = 0$$

$$Hy = 60 \quad KN$$

$$\sum Fx = 0 \qquad Ix = 4\ (16) = 64\ \ KN$$

برشa-a



$$\sum Fx = 0$$

$$-3 \times 16 - F_{EG}\ (\frac{8}{10}) = 0$$

$$F_{EG} = -60 \quad KN \quad C$$

$$\sum M_D = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

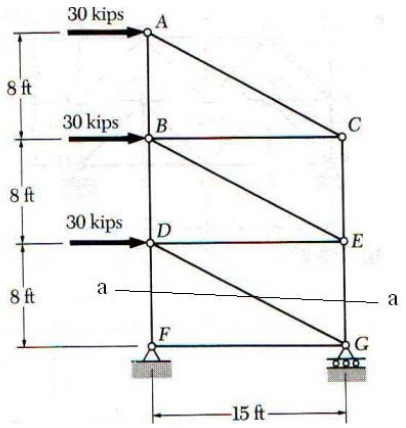
$$-16\ (6) - 16\ (3) + F_{EI}(8) + F_{EG}\ (8)(6/10) = 0$$

$$-144 + 8F_{EI} - 60\ (8)\ (0.6) = 0$$

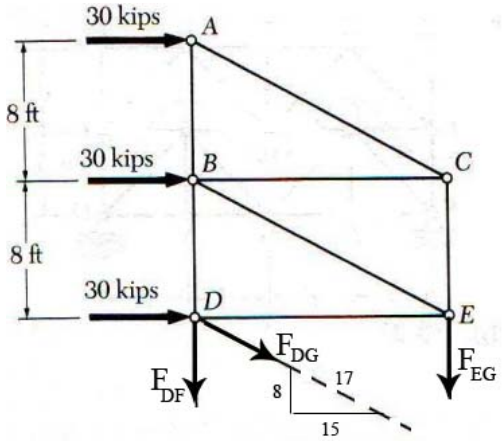
$$8F_{EI} = 432$$

$$F_{EI} = 54 \quad KN \quad T$$

6-30 نیروهای EGو DG ،عضوی از خرپای شکل زیر را پیدا کنید.



برشa-a



$$\sum Fx = 0$$

$$+3 \times 30 + F_{DG}\ (15/17) = 0$$

$$F_{DG} = -102$$

$$F_{DG} = 102 \quad KN \quad C$$

$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$-30\ (16) - 30\ (8) + F_{EG}\ (15) - F_{DG}\ (15/17)\ (16) = 0$$

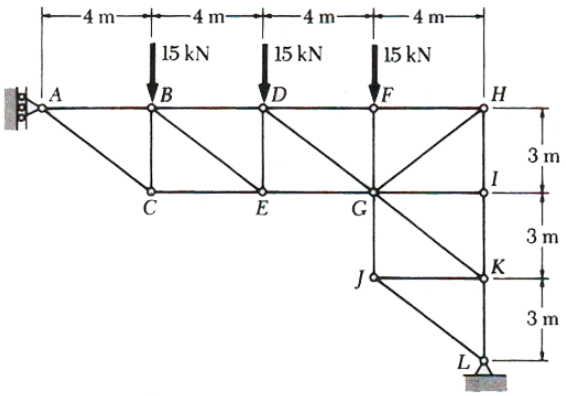
$$-480 - 240 + F_{EG}(15) + 102(\frac{15}{17})(16) = 0$$

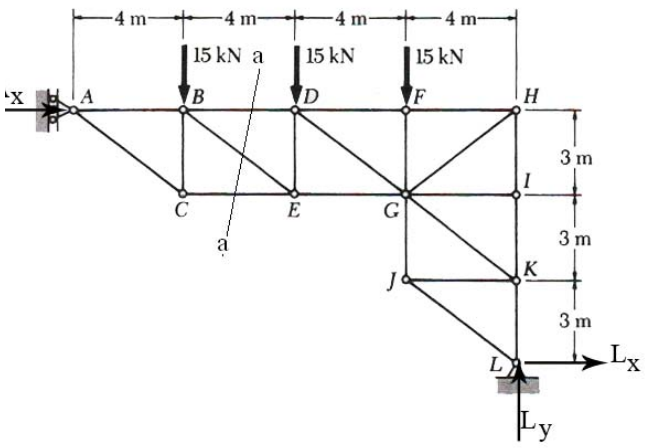
$$15F_{EG} - 720 + 1440 = 0$$

$$15F_{EG} = -720$$

$$F_{EG} = -48 \ KN \quad C$$

6-32 نیروهای BDو CE، BE ،عضوی از خرپای شکل زیر را پیدا کنید.





$$\curvearrowleft^{+} \sum M_A = 0$$

$$-Ly\ (16)-Lx\ (9)+15(12)+15(8)+15(4)=0$$

$$\sum Fy=0$$

$$Ly-45=0 \qquad Ly=45\ KN$$

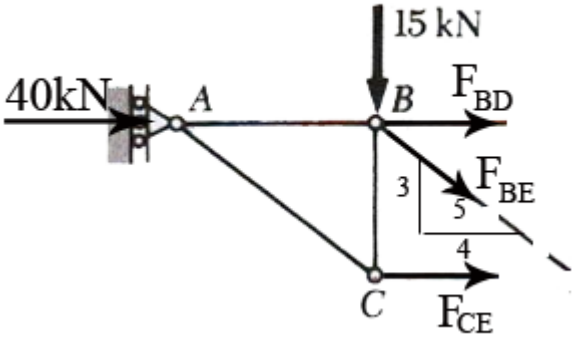
$$9Lx=-16(45)+12(12)+15(8)+15(4)$$

$$9Lx=-360 \qquad Lx=-40$$

$$\sum Fx=0$$

$$Lx+Ax=0 \qquad Ax=40$$

برشa-a



$$\sum Fy=0$$

$$-(F_{BE})(\tfrac{3}{5})-15=0$$

$$F_{BE}=-25\ KN \quad C$$

$$\sum M_A=0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$(15)(4)-F_{CE}(3)+F_{BE}(4)(\tfrac{3}{5})=0$$

$$3F_{CE}=60-25(4)(\tfrac{3}{5})=60-60$$

$$F_{CE}=0$$

$$\sum Fx=0$$

$$40+F_{BD}+F_{CE}+F_{BE}(\tfrac{4}{5})=0$$

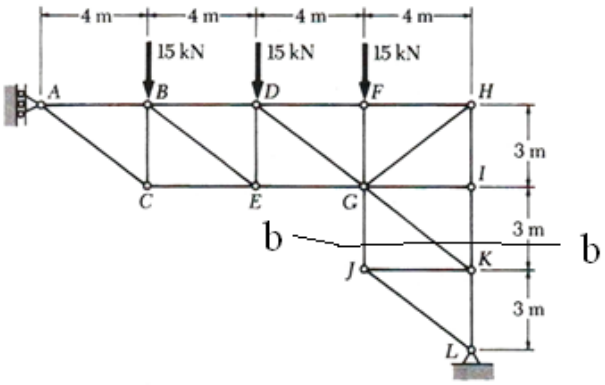
$$40+F_{BD}+0-25\ (\tfrac{4}{5})=0$$

$$40+F_{BD}+0-20=0$$

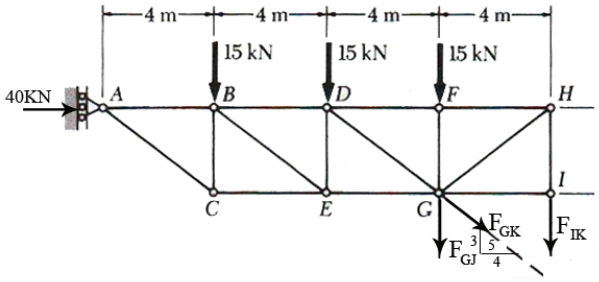
$$40+F_{BD}+0-25\ (\tfrac{4}{5})=0$$

$$F_{BD}=-20KN \quad C$$

6-34 از مسئله (6-32)، استفاده کـرده ونیروهـای IKو GK ، GJ،عضوی از خرپای شکل زیر را پیدا کنید.



برشb-b



$$\sum Fx=0$$

$$+40+F_{GK}(\tfrac{4}{5})=0$$

$$F_{GK}=-50 \quad C$$

$$\curvearrowleft^{+}\ \sum M_A=0$$

$$+F_{GJ}\ (12)+F_{IK}\ (16)+F_{GK}(\tfrac{3}{5})\ (12)$$

$$-F_{GK}(\frac{4}{5})\ (3)+15\ (12)+15\ (8)+15\ (4)=0$$

$$12F_{Gj}+16F_{IK}-360+120+180+120+60=0$$

$$12F_{Gj}+16F_{IK}+120=0$$

$$\sum Fy=0$$

$$-45-F_{GJ}-F_{IK}-F_{GK}\ (\tfrac{3}{5})=0$$

$$F_{GJ}+F_{IK}=-45+30=-15$$

$$\begin{cases} 12F_{GJ} + 12F_{IK} = -180 \\ -12F_{GJ} - 16F_{IK} = 120 \end{cases}$$

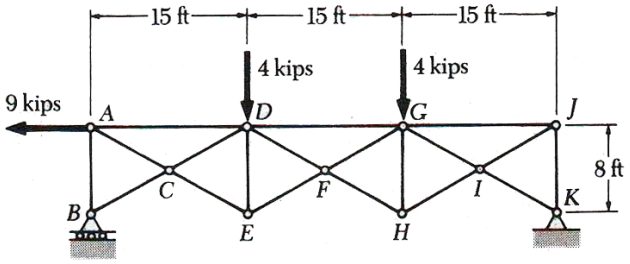
$$-4F_{IK} = -60$$

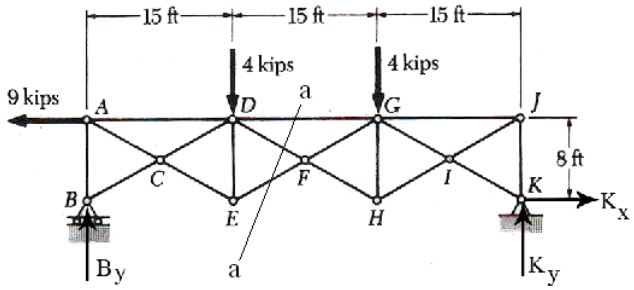
$$F_{IK} = 15KN \quad T$$

$$F_{Gj} = -15 - F_{IK} = -15 - 15$$

$$F_{GJ} = -30 \quad KN \quad C$$

6-36 نیروهای DGو FG ،FH ،عضوی از خرپای شکل زیر را پیدا کنید.





$$\sum M_B = 0 \quad \text{↵}^{+} \qquad Kx = 9$$

$$-(Ky)\ (45) + 4\ (30) + 4\ (15) - 9\ (8) = 0$$

$$45\ Ky = 120 + 60 - 72 = 108$$

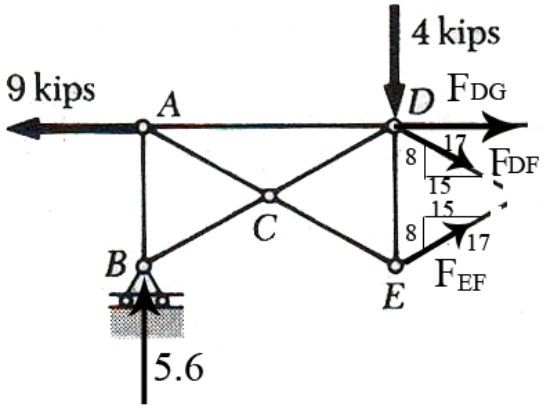
$$Ky = 2.4 \ \ Kips$$

$$\sum Fx = 0 \qquad Kx = 9 \ \ Kips$$

$$\sum Fx = 0 \qquad By - 8 + Ky = 0$$

$$By = 8 - Ky = 5.6 \ \ Kips$$

برش a-a



$$\sum M_B = 0 \text{↵}^{+}$$

$$\sum Fx = 0$$

$$\sum Fy = 0$$

$$\begin{cases} (4)\ (15) - 9\ (8) + F_{DG}(8) + F_{DF}(8/17)\ (15) + \\ F_{DF}(\frac{15}{17})\ (8) - F_{EF}(8/17)\ (15) = 0 \quad (a) \\ -9 + F_{DG} + F_{DF}(15/17) + F_{EF}(15/17) = 0 \\ 5.6 - 4 - F_{DF}(8/17) + F_{EF}\ (8/17) = 0 \end{cases}$$

سه معادله سه مجهول

در ۸ ضرب می شود

$$-72 + 8F_{DG} + F_{DF}\ (\frac{8x15}{17}) + F_{EF}\ (\frac{8x15}{17}) = 0 \qquad (1)$$

در ۱۵ ضرب می شود

$$24 - F_{DF}\ (\frac{15\times 8}{17}) + F_{EF}\ (\frac{15\times 8}{17}) = 0 \qquad (2)$$

از جمع ۱و ۲ می شود

$$-48 + 8F_{DG} + 2\times\frac{8\times 15}{17}F_{EF} = 0$$

$$-6 + F_{DG} + \frac{30}{17}\ F_{EF} = 0$$

$$F_{DG} = 6 - \frac{30}{17}\ F_{EF}$$

$$F_{DF} = F_{EF} + 3.4$$

همه را در معادله(a) جایگزین می کنیم

$$60-72+8\ (6-\frac{30}{17}\ F_{EF})+(F_{EF}+3.4)\ (\frac{8}{17}\times 15)$$
$$+\frac{8\times 15}{17}\ (F_{EF}+3.4)-\frac{8\times 15}{17}F_{EF}=0$$

$$60-72+48\ -\frac{30\times 8}{17}\ F_{EF}+2\times\frac{8\times 15}{17}F_{EF}$$
$$+\frac{2\times 8\times 15}{17}\times 3.4-\frac{8\times 15}{17}\ F_{EF}=0$$

$$60-72+48-14.11F_{EF}+14.11F_{EF}+48-7.06F_{EF}=0$$

$$84-7.06F_{EF}=0$$

$$F_{EF}=11.9\ \ Kips\quad T$$

به خاطر قانون دو نیرو $F_{FG}=F_{EF}$

$$F_{FG}=F_{EF}=11.9\ \ Kips\quad T$$

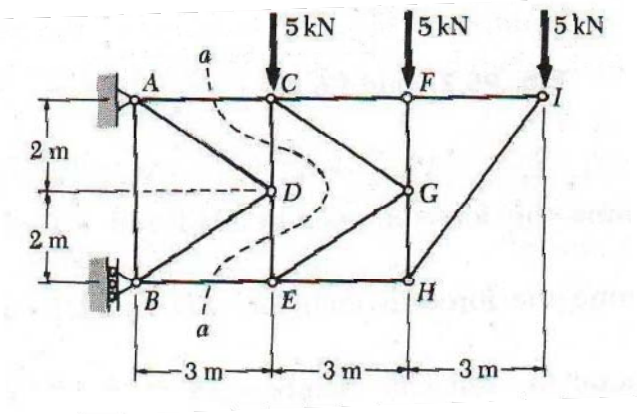
$$F_{DF}=11.9+3.4=15.3\ T$$

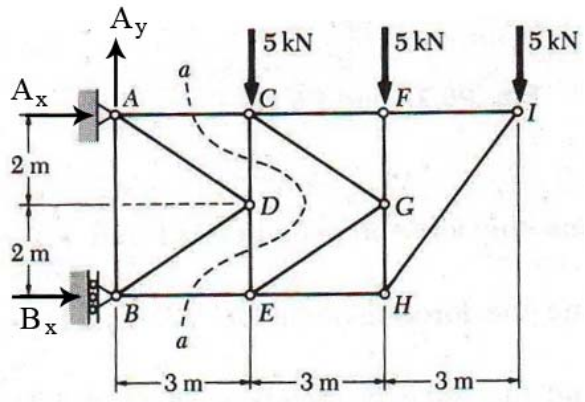
$$F_{DF}=F_{FH}=15.3\ \ Kips\quad T$$

$$F_{DG}=6-\frac{30}{17}\times 11.9=6-21=-15$$

$$F_{DG}=-15\ \ Kips\quad C$$

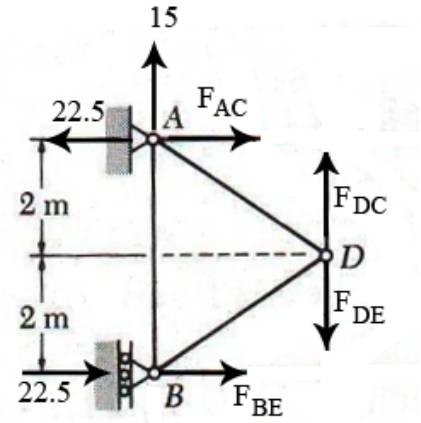
6-38 نیروهای AC وBE ،عضوی از خرپای شکل زیر را پیدا کنید.(از برش a-a استفاده کنید)





$$\sum M_B=0\ \curvearrowleft^+$$
$$5\ (9)+5\ (6)+5\ (3)+Ax\ (4)=0$$
$$-4\ \ Ax=45+30+15=90$$
$$Ax=-22.5\ \ KN$$
$$\sum Fx=0$$
$$Bx+Ax=0\qquad Bx=22.5\ \ KN$$
$$\sum Fy=0\qquad Ay-3(5)=0$$
$$Ay=15\ \ KN$$

برش a-a

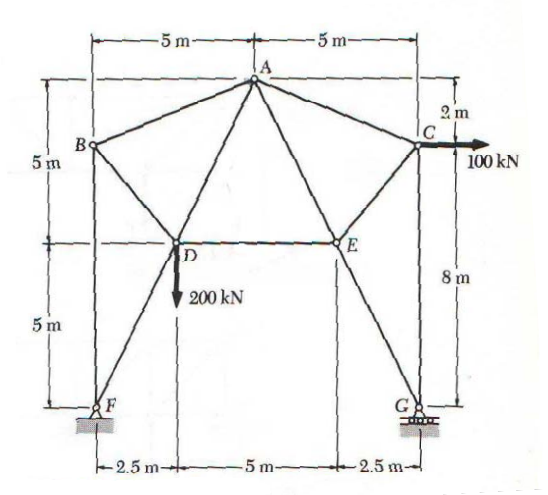


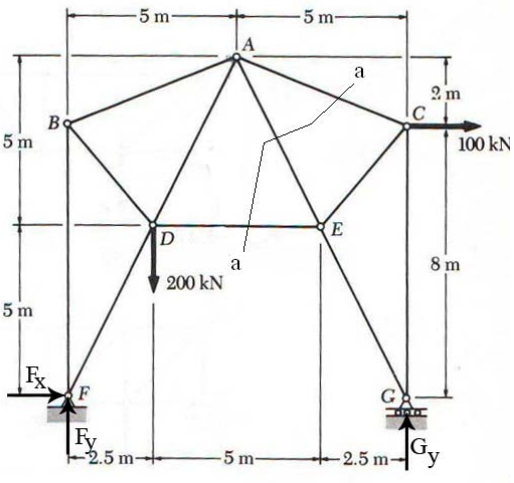
$$\sum M_B=0\ \curvearrowleft^+$$
$$F_{DC}=F_{DE}\quad \text{طبق قانون دو نیرو}$$
$$-(22.5)\ (4)+F_{AC}\ (4)=0$$
$$F_{AC}=22.5\quad KN\quad T$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AC} - 22.5 + 22.5 + F_{BE} = 0$$

$$F_{BE} = -22.5 \quad KN \quad C$$

6-40 نیروهای AE وDE ،عضوی از خرپای شکل زیر را پیـدا کنید.





$$\sum M_F = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

$$-(Gy)\ (10) + 200\ (2.5) + 100\ (8) = 0$$

$$10\ Gy = 500 + 800 = 1300$$

$$Gy = 130 \quad KN$$

$$\sum Fy = 0$$

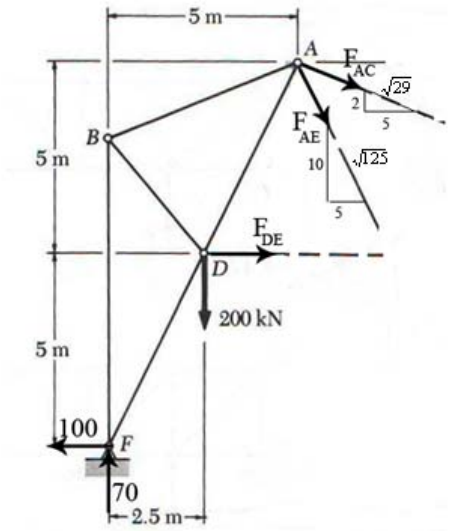
$$Fy + Gy = 200$$

$$Fy = 70 \quad KN$$

$$\sum Fx = 0$$

$$Fx + 100 = 0 \qquad Fx = -100 \quad KN$$

برش a-a



$$\sum M_F = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

$$200(2.5) + F_{DE}(5) + F_{AC}\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)(5) + F_{AC}\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)(10) +$$

$$F_{AE}\left(\frac{10}{\sqrt{125}}\right)(5) + F_{AE}\left(\frac{10}{\sqrt{125}}\right)(10) = 0 \quad (a)$$

$$\sum Fy = 0$$

$$70 - 200 - F_{AC}\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right) - F_{AE}\left(\frac{10}{\sqrt{125}}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\sum Fx = 0$$

$$-100 + F_{DE} + F_{AC}\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + F_{AE}\left(\frac{5}{\sqrt{125}}\right) = 0 \quad (2)$$

معادله (۱)را ضربدر ۵ومعادله (۲)راضربدر ۲کرده و بـا هـم جمـع می زنیم

$$5\ (-130) - F_{AC}\ (\frac{10}{\sqrt{29}}) - F_{AE}\ \frac{50}{\sqrt{125}} = 0$$

$$-200 + 2F_{DE}\ + \frac{10}{\sqrt{29}} F_{AC} + F_{AE}\ \frac{10}{\sqrt{125}} = 0$$

$$2F_{DE}\ - 850 - F_{AE}\ \frac{40}{\sqrt{125}} = 0$$

$$F_{DE} = 425 + \frac{20}{\sqrt{125}}\ F_{AE}\ \ (3)$$

$$\frac{2}{\sqrt{29}}\ F_{AC} = -130 - \frac{10}{\sqrt{125}}\ F_{AE}$$

معادله(۳) را در معادله(a) میگذاریم

$$500 + 5\ (425 + \frac{20}{\sqrt{125}} F_{AE}) + 5\ (-130 - \frac{10}{\sqrt{125}}\ F_{AE})$$

$$+ 25\ (-130 - \frac{10}{\sqrt{125}}\ F_{AE}) + \frac{50}{\sqrt{125}}\ F_{AE} + \frac{50}{\sqrt{125}}\ F_{AE} = 0$$

$$500 + 2125 + \frac{100}{\sqrt{125}} F_{AE} - 650 - \frac{50}{\sqrt{125}}\ F_{AE}$$

$$-3250 - \frac{250}{\sqrt{125}}\ F_{AE} + \frac{100}{\sqrt{125}}\ F_{AE} = 0$$

$$\frac{-100}{\sqrt{125}}\ F_{AE} = 1275$$

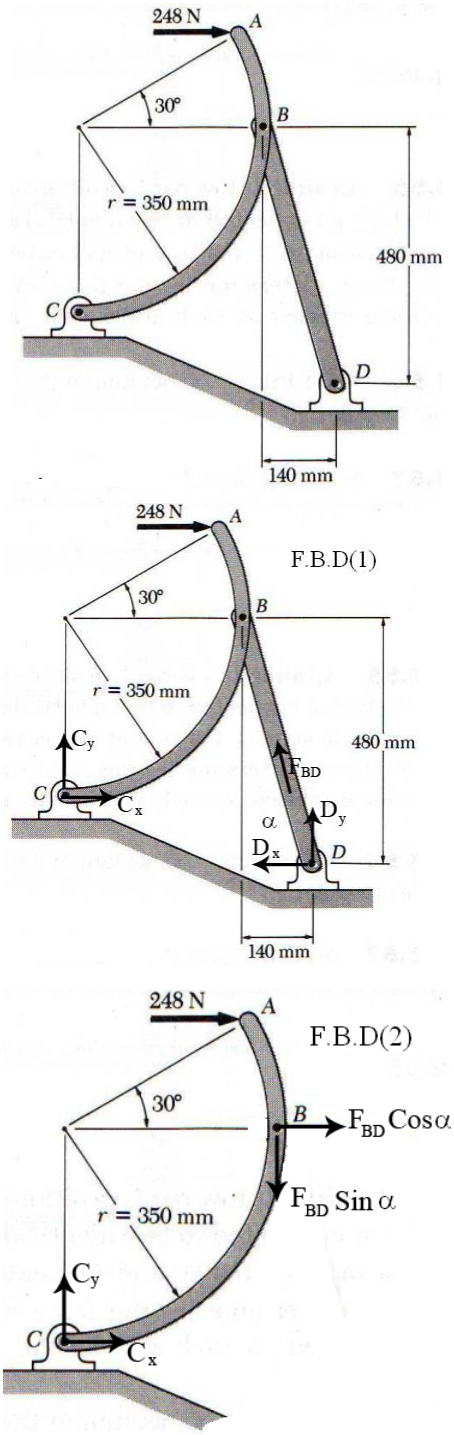
$$F_{AE} = -142.55\ KN \quad C$$

$$F_{DE} = 425 + \frac{20}{\sqrt{125}}\ (-142.55)$$

$$F_{DE} = 425 - 255 = 170\ KN \quad T$$

مسائل مربوط به قاب ها

6-50 بازویBD که عضوی از قاب شکل زیر را تشکیل می دهد، مطلوبست عکس العمل نیروها در پینC و نیروی ایجـاد شـده در بازویBD



$Dx = F_{BD}Cos\alpha \quad Dy = F_{BD}Sin\alpha$

$\sum M_C = 0 \curvearrowleft^{+} \quad F.B.D(2)$

$(248)\ (350 + 350Sin30) + F_{BD}\ Cos\alpha\ (350)$

$+ F_{BD}Sin\alpha\ (350) = 0$

$$F.B.D(1) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{480}{140} \quad \alpha = 73.73$$

$$(248)\ (525) + F_{BD}(98) + F_{BD}(336) = 0$$

$$F_{BD} = \frac{-248x525}{434} = -300 \quad N \quad C$$

$\sum Fy = 0$

$Cy - F_{BD}\ Sin\alpha = 0$

$Cy = -300\ (0.96) = -288 \quad N$

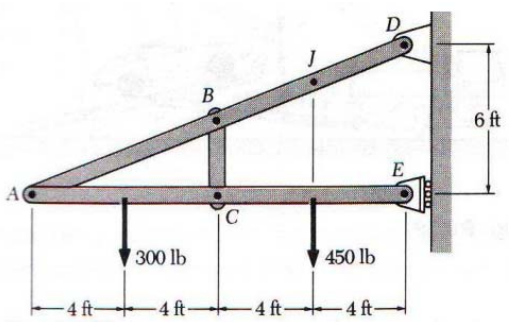
$Cx + 248 + F_{BD}\ Cos\alpha = 0$

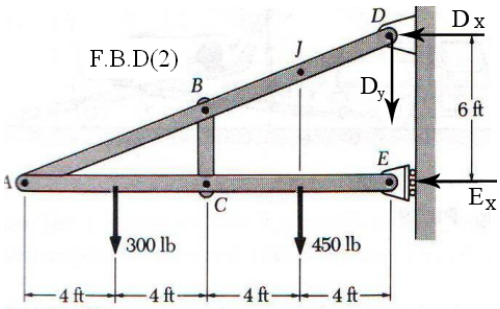
$\sum Fx = 0$

$Cx + 248 - 300 \times 0.28 = 0$

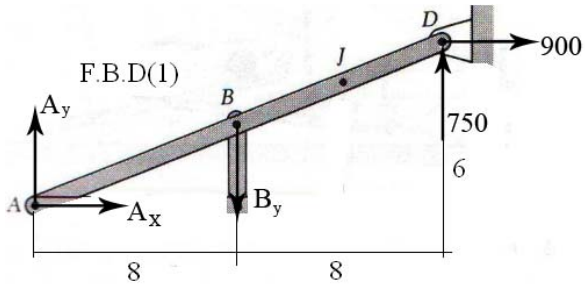
$Cx = -164 \quad N$

6-52 مطلوبست عکس العمل همه نیروها در پین Aو B از عضوABD قاب شکل زیر.





به خاطر قانون دو نیروها،در بازویBC ،یک نیرو اثر می کند.



$\sum M_A = 0 \curvearrowleft^{+} \Rightarrow F.B.D(2)$

$-Dx\ (6) + 450\ (12) + 300\ (4) + Dy\ (16) = 0$

$\sum Fy = 0$

$Dy = -750\ \ lb$

$16\ Dy - 6\ Dx + 5400 + 1200 = 0$

$16\ (-750) + 6600 = 6\ Dx$

$Dx = -900\ lb$

$\sum Fy = 0 \Rightarrow F.B.D(1)$

$Ay - By + 750 = 0$

$\sum M_A = 0 \curvearrowleft^{+} \Rightarrow F.B.D(1)$

$-(750)\ (16) + 900\ (6) + By\ (8) = 0$

$8By = 12000 - 5400$

$By = 825\ 1b\ \downarrow$

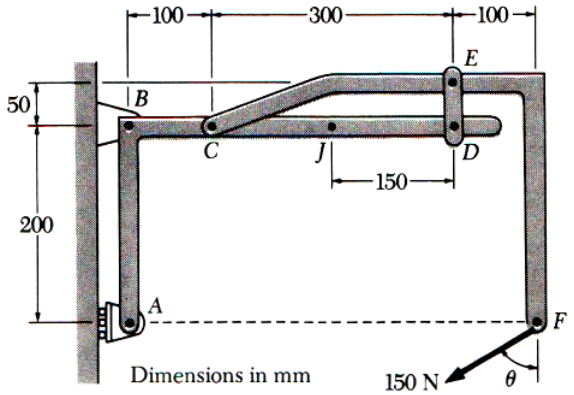
$Ay = 825 - 750$

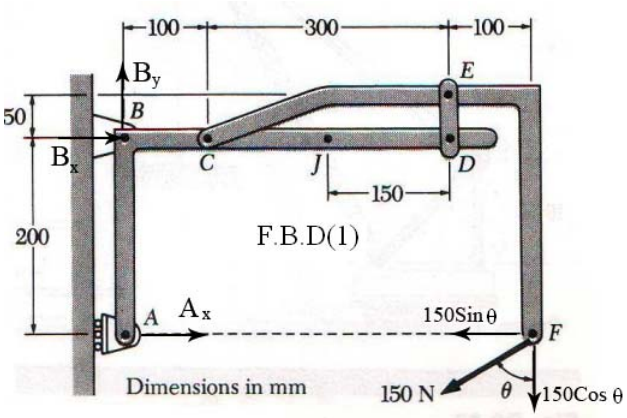
$Ay = 75\ 1b\ \uparrow$

$Ax + 900 = 0$

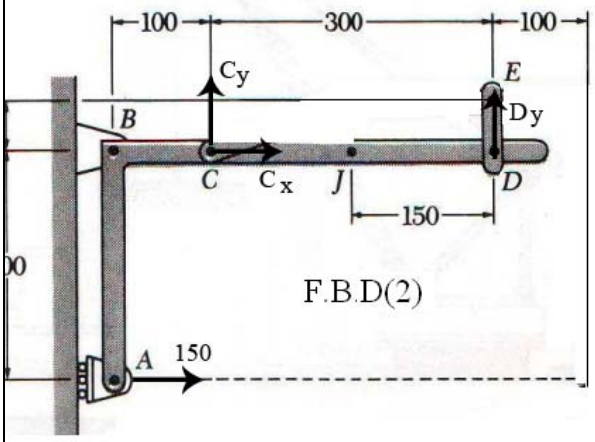
$Ax = 900\ 1b\ \leftarrow$

6-54 مطلوبست عکس العمل همه نیروها در پین A و B و C و D از عضو ABCD، قاب شکل زیر را،به شرطی که $\theta = 90$ ،باشد.





به خاطر قانون دو نیروها،در بازوی DE ،یک نیرو اثر می کند.



$$\curvearrowleft^{+} \sum M_A = 0 \Rightarrow F.B.D(1)$$

$$Bx\ (200) + 150Cos\theta(500) = 0 \quad \theta = 90$$

$$Bx = 0$$

$$\sum Fx = 0$$

$$Ax + Bx - 150 = 0$$

$$Ax = 150 \quad N$$

$$\sum Fy = 0$$

$$By = 0$$

$$\curvearrowleft^{+} \sum M_A = 0 \Rightarrow F.B.D(2)$$

$$-(Dy)\ (400) + Cx\ (200) - Cy\ (100) = 0$$

$$2Cx - 4Dy - Cy = 0$$

$$\sum Fx = 0$$

$$Cx = -150\ N$$

$$\sum Fy = 0$$

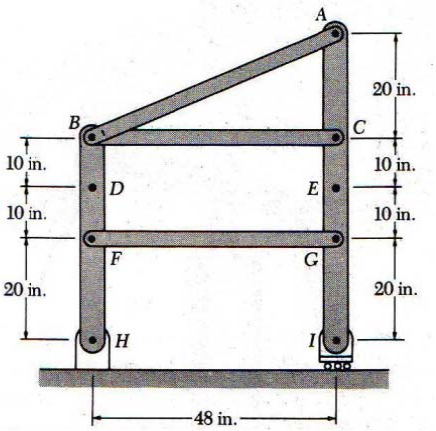
$$Dy + Cy = 0$$

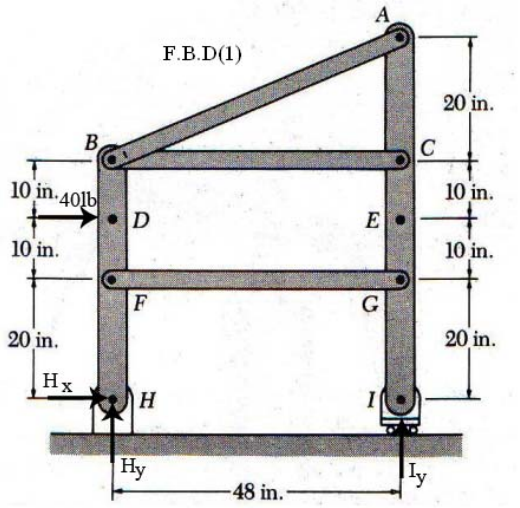
$$2(-150) - 4Dy - (-Dy) = 0$$

$$Dy = -100\ N \downarrow$$

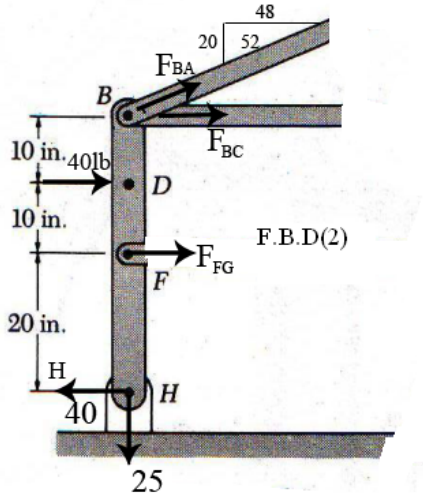
$$Cy = -Dy = +100\ N \uparrow$$

6-62 مطلوبست عکس العمل نیروها در پین A و C و G و I از بازوی قاب AI ، شکل زیر به شرط اینکه نیروی 40lb بطور افقی به سمت راست(a)(به نقطه D) ، (b)(نقطه E) وارد شود.





به خاطر قانون دو نیروها،در بازوی FG ،یک نیرو اثر می کند.



$$\sum M_H = 0 \circlearrowleft^{+} \Rightarrow F.B.D(2)$$

$$-Iy\ (48) + 40\ (30) = 0$$

$$Iy = 25\ \ lb \uparrow$$

$$Hy + Iy = 0 \qquad Hy = -25\ \ lb$$

$$Hx + 40 = 0 \qquad Hx = -40\ \ lb$$

$$\sum Fy = 0 \Rightarrow F.B.D(2)$$

$$F_{BA}\ (\frac{20}{52}) = 25$$

$$F_{BA} = 65\ lb \quad as \quad showen$$

$$\sum M_H = 0 \circlearrowleft^{+} \Rightarrow F.B.D(2)$$

$$\left[F_{BC} + F_{BA}\ (48/52)\right] 40 + F_{FG}\ (20) + 40\ (30) = 0$$

$$\sum Fx = 0$$

$$F_{BC} + F_{BA}\ (48/52) + F_{FG} = 0$$

$$F_{FG} = -(F_{BC} + F_{BA}\ 48/52)$$

$$40\left[F_{BC} + F_{BA}\ (\frac{48}{52})\right] + 1200 + 20F_{FG} = 0$$

$$40(-F_{FG}) + 1200 + 20F_{FG} = 0$$

$$20F_{FG} = 1200$$

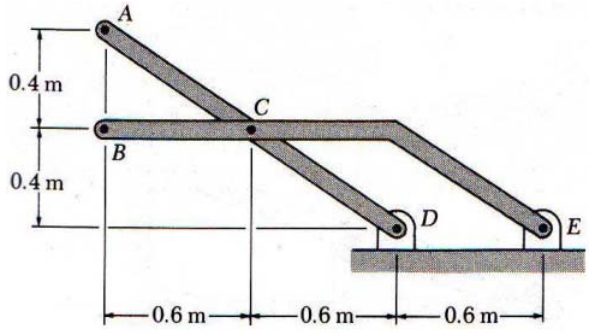
$$F_{FG} = 60\ lb$$

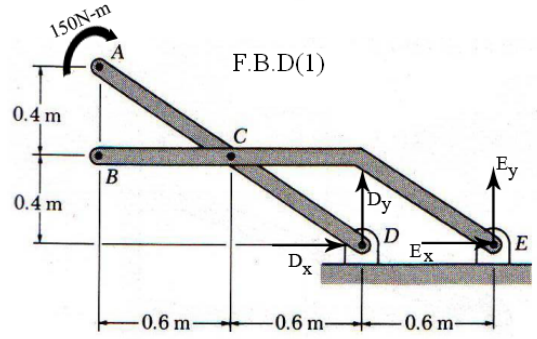
$$60 = -F_{BC} - 65(48/52) = -F_{BC} - 60$$

$$F_{BC} = -120\ lb$$

چون نیروی 40lb در راستای DE عمل می کند(بردار لغزنده)،بنابراین حالت (b)،مثل حالت اول (a)خواهد بود

6-64 مطلوبست عکس العمل نیروها در پین E و D به شرط اینکه کوپل 150N-m موافق عقربه ساعت به(a) (نقطه A)،به (b)(نقطه B) وارد شود.





a)

$\sum M_E = 0 \circlearrowleft^+ \Rightarrow F.B.D(1)$

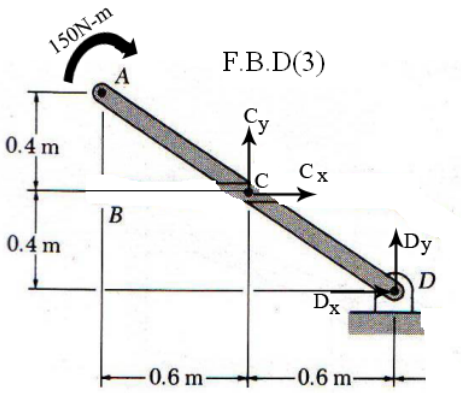
$150 + Dy\ (0.6) = 0$

$Dy = -250\ N \downarrow$

$\sum Fy = 0$

$Ey + Dy = 0$

$Ey = 250 \uparrow$



$\sum Fy = 0 \Rightarrow F.B.D(3)$

$Cy + Dy = 0 \Rightarrow F.B.D(3)$

$Cy = +250\ N \uparrow$

$\sum M_D = 0 \circlearrowleft^+ \Rightarrow F.B.D(3)$

$150 + Cy\ (0.6) + Cx(0.4) = 0$

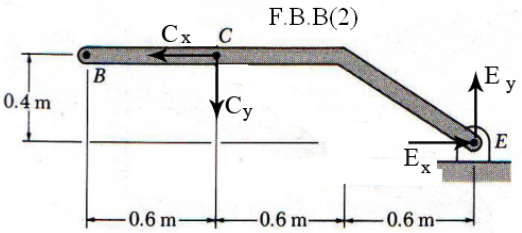
$150 + 0.6\ (250) + Cx(0.4) = 0$

$150 + 150 + 0.4Cx = 0$

$Cx = -750\ N$

$Cx + Dx = 0$

$Dx = 750\ N \rightarrow$

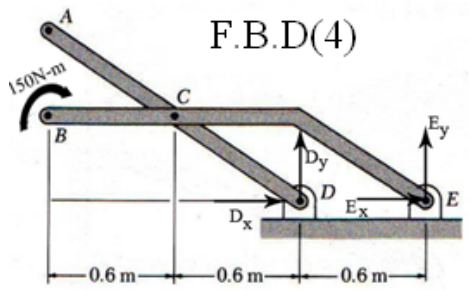


$\sum Fx = 0 \Rightarrow F.B.D(2)$

$-Cx + Ex = 0$

$Ex = -750\ N$

$Ex = 750\ N \leftarrow$



b)

$\sum M_E = 0 \circlearrowleft^+ \Rightarrow F.B.D(4)$

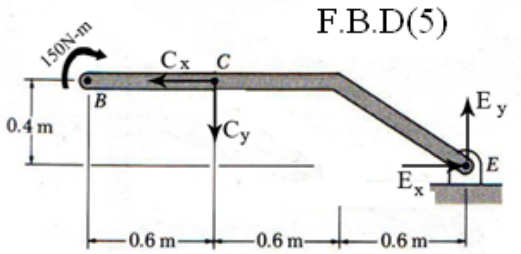
$150 + 0.6\ (Dy) = 0$

$Dy = -250\ N \downarrow$

$\sum Fy = 0$

$Dy + Ey = 0$

$Ey = -250\ N \downarrow$



$\sum Fy = 0 \Rightarrow F.B.D(5)$

$Ey - Cy = 0$

$Cy = -250\ N$

$\sum M_E = 0 \circlearrowleft^+ \Rightarrow F.B.D(5)$

$150 - Cy(1.2) - Cx(0.4) = 0$

$150 - (-250)(1.2) - Cx(0.4) = 0$

$0.4Cx = 150 - 300 = -150$

$Cx = -375\ N$

$\sum Fy = 0 \Rightarrow F.B.D(5)$

$-Cx + Ex = 0$

$Ex = -375\ N \leftarrow$

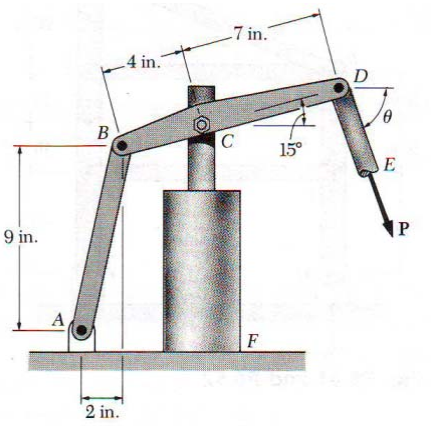
$Ex = -375\ N \leftarrow$

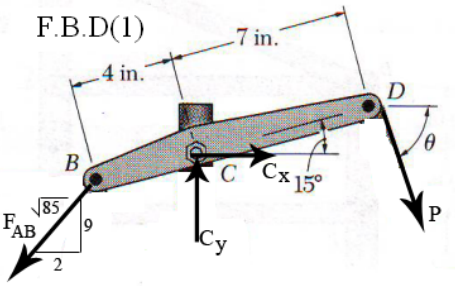
$$\sum Fy = 0 \Rightarrow F.B.D(3)$$

$$Dx + Ex = 0$$

$$Dx = 375 \quad N \rightarrow$$

6-68 سیلندر هیدرولیک CF،بازوی DE را بتدریج کنترل می کند،در حالت نشان داده شده،اگر $P = 40lb\ ,\theta = 80^\circ$ باشد،اولاً مطلوبست نیروئی که در بازوی AB بوجود می آید،ثانیاً عکس العمل نیروها در پین C را پیداکنید.





$$\sum M_C = 0 \ \curvearrowleft^{+} \ F.B.D(1)$$

$$-\frac{9}{\sqrt{85}}\ F_{AB}\ (4\ Cos15) + \frac{2}{\sqrt{85}}\ F_{AB}\ (4\ Sin15)$$

$$+ P\ Sin80\ (7\ Cos15) + P\ Cos80\ (7\ Sin15) = 0$$

$$P = 90lb$$

$$-3.77\ F_{AB} + 0.225\ F_{AB} + 599.3 + 28.3 = 0$$

$$-3.545\ F_{AB} + 627.6 = 0$$

$$F_{AB} = 177 \quad lb$$

$$\sum Fy = 0$$

$$Cy - F_{AB}\ (\frac{9}{\sqrt{85}}) - P\ Sin80 = 0$$

$$Cy = 172.8 + 88.6 = 261.4 \quad lb$$

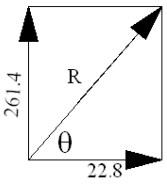
$$\sum Fx = 0$$

$$Cx - F_{AB}\ \frac{2}{\sqrt{85}} + P\ Cos80 = 0$$

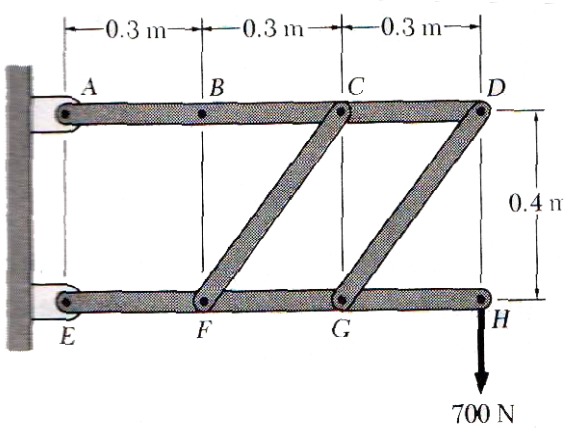
$$Cx = 38.4 - 15.6 = 22.8 \quad lb$$

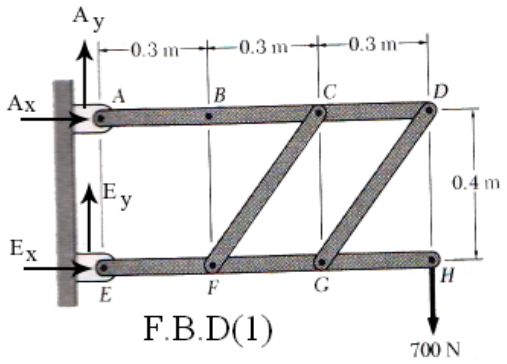
$$R = \sqrt{22.8^2 + 261.4^2} = 262.4 \ lb$$

$$\tan\theta = \frac{261.4}{22.8} \qquad \theta = 85^\circ$$



6-84 قاب نشان داده شده زیر ،بوسیله دو عضو AD وEH ، به کمک دو بازوی دیگر EF وDG متصل شده اند، مطلوبست نیروی بوجود آمده در بازوی EF وDG را.





$$\sum M_E = 0 \quad \curvearrowleft^{+} \quad \Rightarrow F.B.D(1)$$

$$(700)\ (3)\ (0.3) + Ax\ (0.4) = 0$$

$$Ax = -1575 \quad N \leftarrow$$

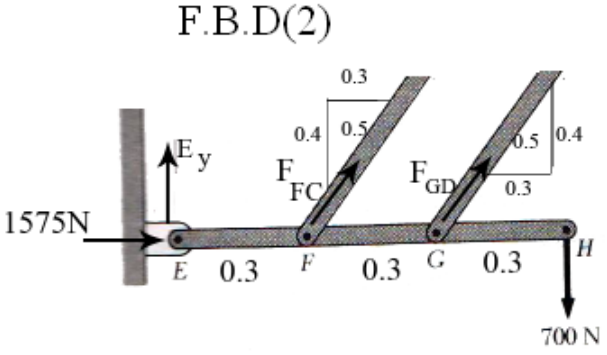
$$\sum Fx = 0$$

$$Ex + Ax = 0$$

$$Ex = 1575\ \ N \rightarrow$$

$$\sum M_E = 0 \quad \curvearrowleft^{+} \quad \Rightarrow F.B.D(2)$$

به خاطر قانون دو نیروها،درهر دو بازوی CFوDG ،یک نیرو اثر می کند.



$$(700)\ (3)\ (0.3) - F_{GD}\ (0.6)\ (\frac{0.4}{0.5}) - F_{FC}\ (0.3)\ (\frac{0.4}{0.5}) = 0$$

$$0.6\ \ F_{GD} + 0.3\ \ F_{FC} = (700)(0.9)(\frac{5}{4}) = 787.5$$

$$\sum Fx = 0$$

$$1575 + F_{FC}\ (\frac{0.3}{0.5}) + F_{GD}\ (\frac{0.3}{0.5}) = 0$$

$$\begin{cases} F_{FC} + F_{GD} = -1575(\frac{5}{3}) = -2625 \\ 0.6\ \ F_{GD} + 0.3\ \ F_{FC} = 787.5 \end{cases}$$

$$-0.6F_{GD} - 0.6F_{FC} = -2625(-0.6) = 1575$$

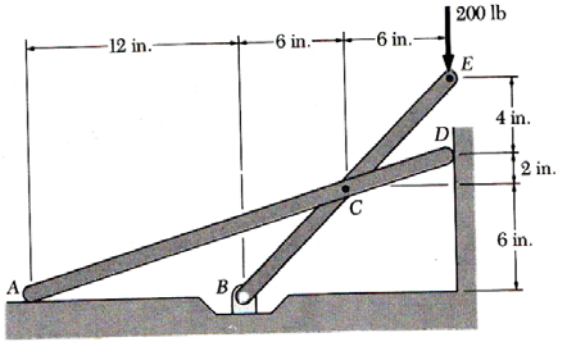
$$-0.3F_{FC} = 1575 + 787.5 = 2365.5$$

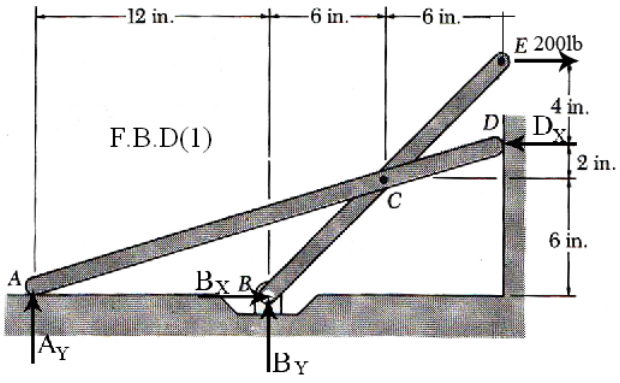
$$F_{FC} = -7875\ \ N$$

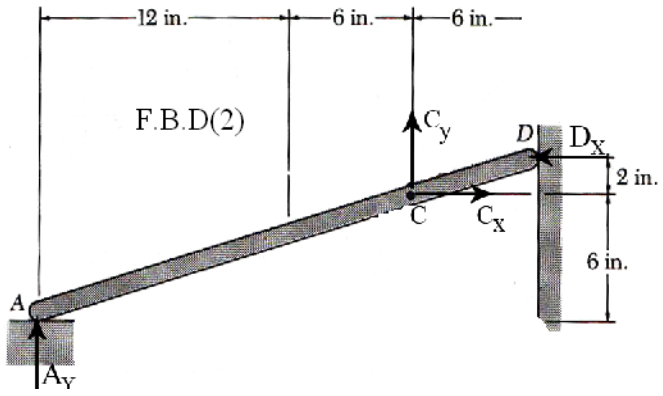
$$F_{GD} = -2625 + 7875$$

$$F_{GD} = 5250\ \ N$$

6-88 بازویAD روی دیوار و سطح افقی بدون اصطکاک قرار گرفته اند،عکس العمل نیروها در نقاطD و AوC را حساب کنید، به شرط اینکه نیروی200 lb بطور افقی به سمت راست در نقطهE اثر کند.







$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowleft^{+} \quad \Rightarrow F.B.D(2)$$

$$-Cy\ (18) + Cx\ (6) - Dx\ (8) = 0$$

$$\sum Fy = 0$$

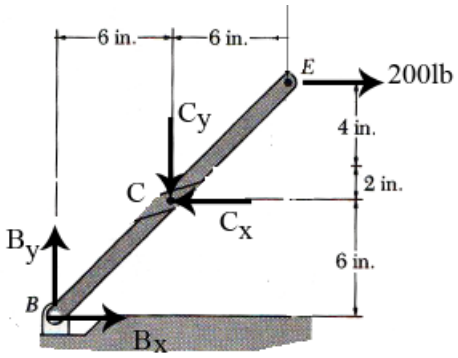
$$Ay + Cy = 0$$

$$\sum Fx = 0$$

$$Cx - Dx = 0$$

$$Cx = 360 \quad 1b \ \rightarrow$$

$$\sum M_B = 0 \quad \curvearrowleft^{+} \quad \Rightarrow F.B.D(3)$$



F.B.D(3)

$$(200)\ (12) - Cx\ (6) + Cy\ (6) = 0$$

$$-18\ Cy + 6\ Cx - 8\ (Cx) = 0$$

$$-18\ Cy - 2\ Cx = 0$$

$$2\ Cx = -18\ Cy$$

$$2400 - 3\ (-18\ Cy) + 6\ Cy = 0$$

$$2400 + 60\ Cy = 0$$

$$Cy = -40\ 1b \ \downarrow$$

$$Cx = -9Cy = -9(-40) = 360 \ \ lb$$

$$Cx = 360 \quad 1b \ \rightarrow$$

$$Ay = -Cy = -(-40) = 40$$

$$Ay = 40 \ \ lb \ \uparrow$$

$$Cx - Dx = 0$$

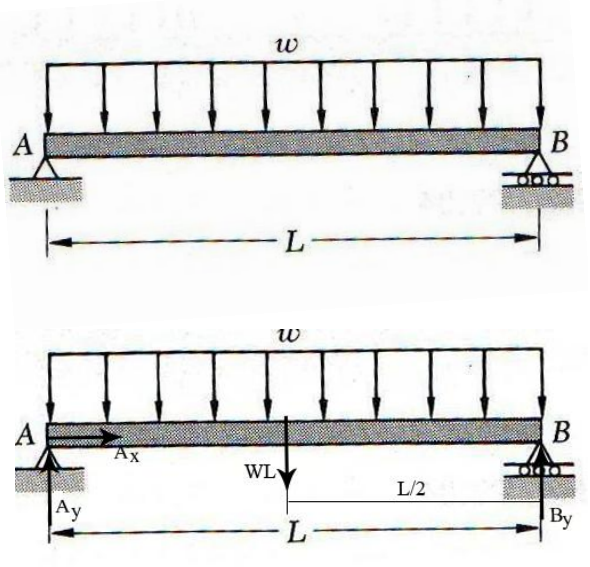
$$Dx = 360\ lb$$

$$Dx = 360\ lb \ \leftarrow$$

فصل ۷

گشت آور خمشی و دیاگرام برشی و خمشی

7-22دیاگرام برشی و گشت آور خمشی بـر تیـری را کـه نیروهـا مطابق شکل زیر بر آن وارد می شود رسم کنید.



$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$(By)\ (k) - wL(L_2) = 0$$

$$By = {wL}/{2}$$

$$\sum Fy = 0$$

$$By + Ay = wL$$

$$Ay = wL - {wL}/{2} = {wL}/{2}$$

$$\sum Fx = 0 \qquad Ax = 0$$

$$-wx + \frac{wL}{2} - V = 0$$

$$V = {wL}/{2} - wx$$

$$x = 0$$

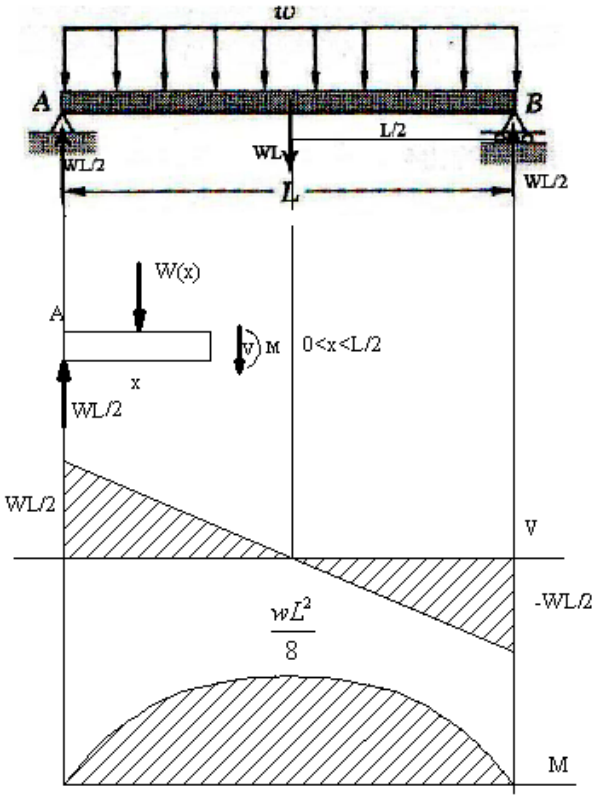
$$V = {wL}/{2}$$

$$x = L$$

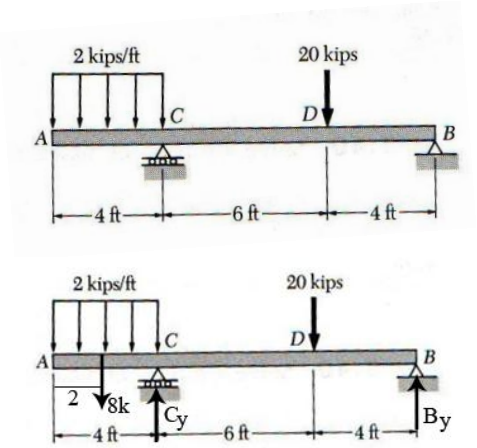
$$V = {wL}/{2} - wL = -{wL}/{2}$$

$$M_{\max} = L \times \frac{wL}{2} \times {1}/{2}$$

$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8}$$



7-28 دیاگرام برشی و گشت آور خمشی بر تیری را کـه نیروهـا مطابق شکل زیر بر آن وارد می شود رسم کنید.



$$\sum M_C = 0 \;\curvearrowleft^{+}$$

$$-(8)+20\ (6)-By\ (10)=0$$

$$10By = 120-16 = 104$$

$$By = 10.4$$

$$Cy = By - 20 - 8 = 0$$

$$Cy = 28 - 10.4$$

$$Cy = 17.6$$

$$\underline{0 < x < 4}$$

$$-2x - V = 0 \quad V = -2x$$

$$-(2x)\ (\frac{x}{2}) + M = 0 \quad M = -x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} -8+17.6-V=0 \quad V=9.6 \\ -8(X-2)+17.6(X-9)-M=0 \\ -8+16+17.6X-70.4-M=0 \\ M = 9.6X - 54.4 \end{array}\right\} \; 4 < x < 14$$

$$-8+17.6-20-V=0 \quad V=-10.4$$

$$-8(X-2)+17.6(X-4)-20(X-10)-M=0$$

$$-8X+16+16.6-70.4-20x+200-M=0$$

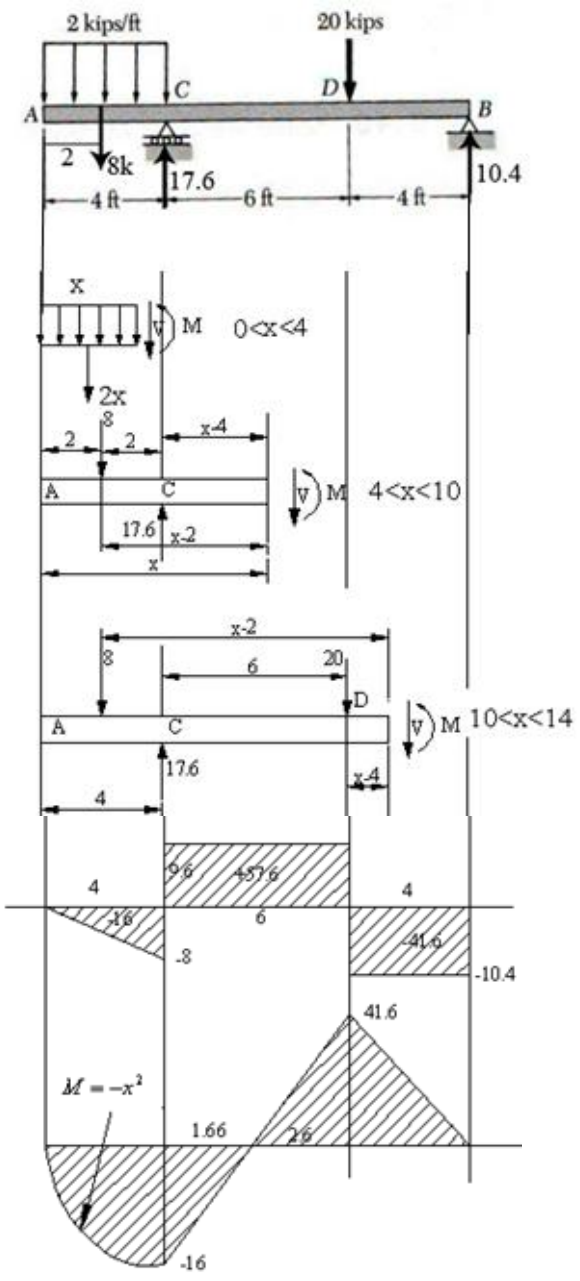
$$M = -10.4X + 145.6$$

$$\underline{10 < x < 14}$$

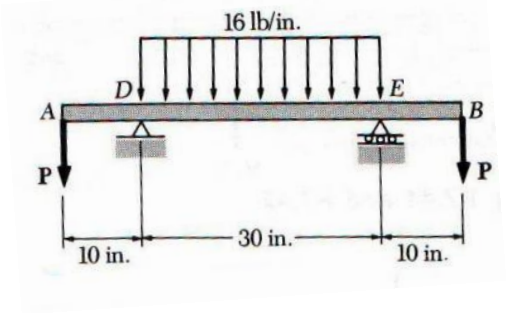
$$\begin{cases} x=14 \\ M=0 \end{cases} \begin{cases} x=10 \\ M=41.6 \end{cases}$$

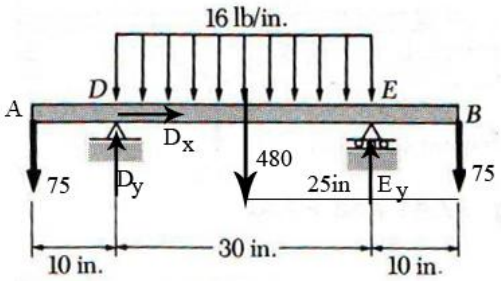
$$\frac{41.6}{16} = X_1 \diagup X_2 = 2.6$$

$$X_1 + X_2 = 6 \qquad X_1 = \frac{6}{3.6} = 1.66$$



7-29 دیاگرام برشی و گشت آور خمشی بر تیری را که نیروهای P مطابق شکل زیر بر آن وارد می شود رسم کنید.به شرط اینکه P=75lb ،باشد.





$\sum M_D = 0 \ \curvearrowleft^{+}$

$-(75)\ (10) - Ey\ (30) + 75\ (40) + 480\ (15) = 0$

$30Ey = -750 + 3000 + 7200$

$30Ey = 9450$

$Ey = 315$

$Dy + Ey - 480 - 75 - 75 = 0$

$Dy = -315 + 480 + 150$

$Dy = 315$

$Dx = 0$

$0 < x < 10$

$-75 - V = 0$

$V = -75$

$-75X - m = 0$

$M = -75x$

$\begin{cases} x = 0 \\ M = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10 \\ M = -750 \end{cases}$

$10 < X < 40$

$-75 + 315 - 16\ (x - 10) - V = 0$

$V = -16x + 400$

$-75(x) + 315(x - 10) - 16\ (x - 10)(\frac{x - 10}{2}) - M = 0$

$-75x + 315 - 3150 - 8x^2 - 800 + 160x - M = 0$

$M = -8x^2 + 400x - 3950$

$\begin{cases} x = 10 \\ V = 240 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 40 \\ V = -240 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10 \\ M = -750 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 40 \\ M = -750 \end{cases}$

7-29 ادامه

$40 < x < 50$

$-75 + 315 - 480 + 315 - V = 0$

$V = 75$

$-75(x) + 315(x - 10) - 480(x - 25)$

$+ 315(x - 40) - M = 0$

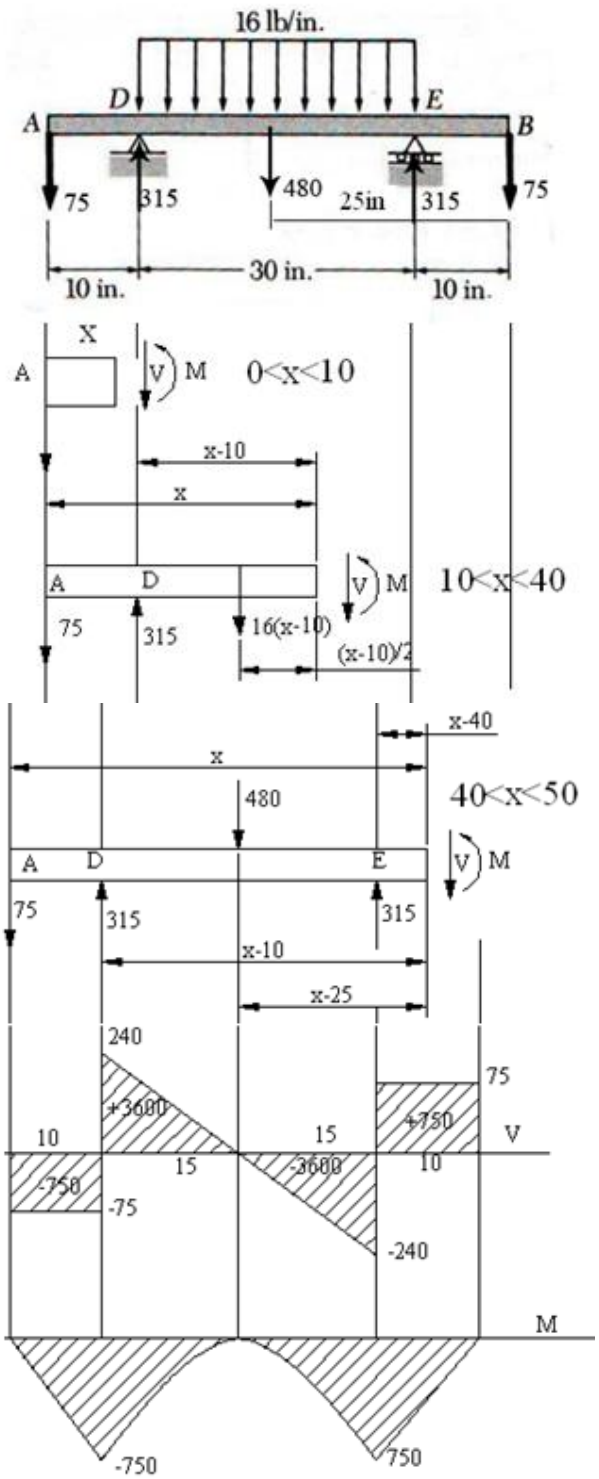
$M = -75x + 315x - 3150 + 480x$

$+12000 + 315x - 12600$

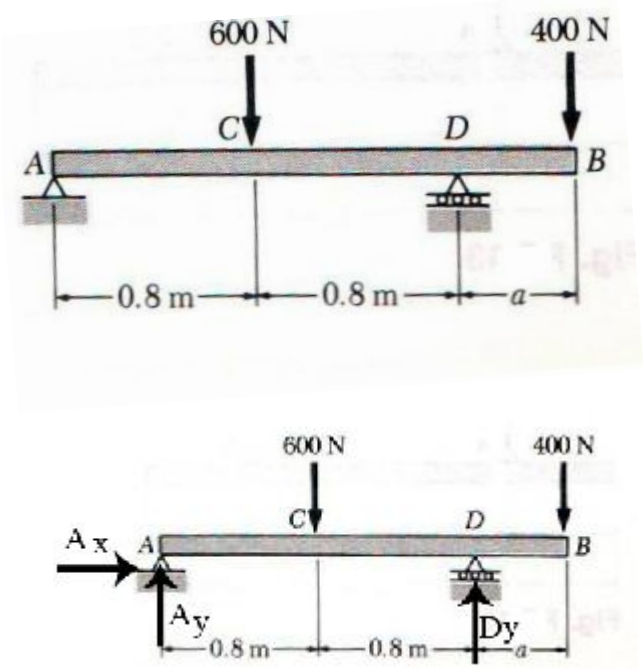
$M = 75x - 3750$

$\begin{cases} x = 40 \\ M = -750 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 50 \\ M = 0 \end{cases}$

دیاگرام برشی و گشت آور خمشی مسئله7-29



7-30 دیاگرام برشی و گشت آور خمشی بر تیری را که نیروها مطابق شکل زیر بر آن وارد می شود رسم کنید. به شرط اینکه a=0.3mباشد.



$$\curvearrowleft^{+} \sum M_D = 0$$

$$(Ay)\ (1.6) - 600\ \ (0.8) + 400\ \ (0.3) = 0$$

$$1.6Ay = 480 - 120 = 360$$

$$Ay = 225$$

$$Ay + Dy - 600 - 400 = 0$$

$$Dy = 1000 - 225 = 775$$

$$Ax = 0$$

$$0 < x < 0.8 \begin{cases} 225 - V = 0 \quad V = 225 \\ 225x - M = 0 \quad M = 225x \end{cases}$$

$$0.8 < x < 1.6$$

$$225 - 600 - V = 0$$

$$V = -375$$

$$225\ (X) - 600\ (X - 0.8) - M = 0$$

$$M = -375x + 480$$

$$1.6 < x < 1.9 \qquad 225 - 600 + 775 - V = 0$$

$$V = 400$$

$$225\ (x) - 600\ (x - 0.8) + 775\,(x - 1.6) - M = 0$$

$$M = 225x - 600x + 775x + 480 - 1240$$

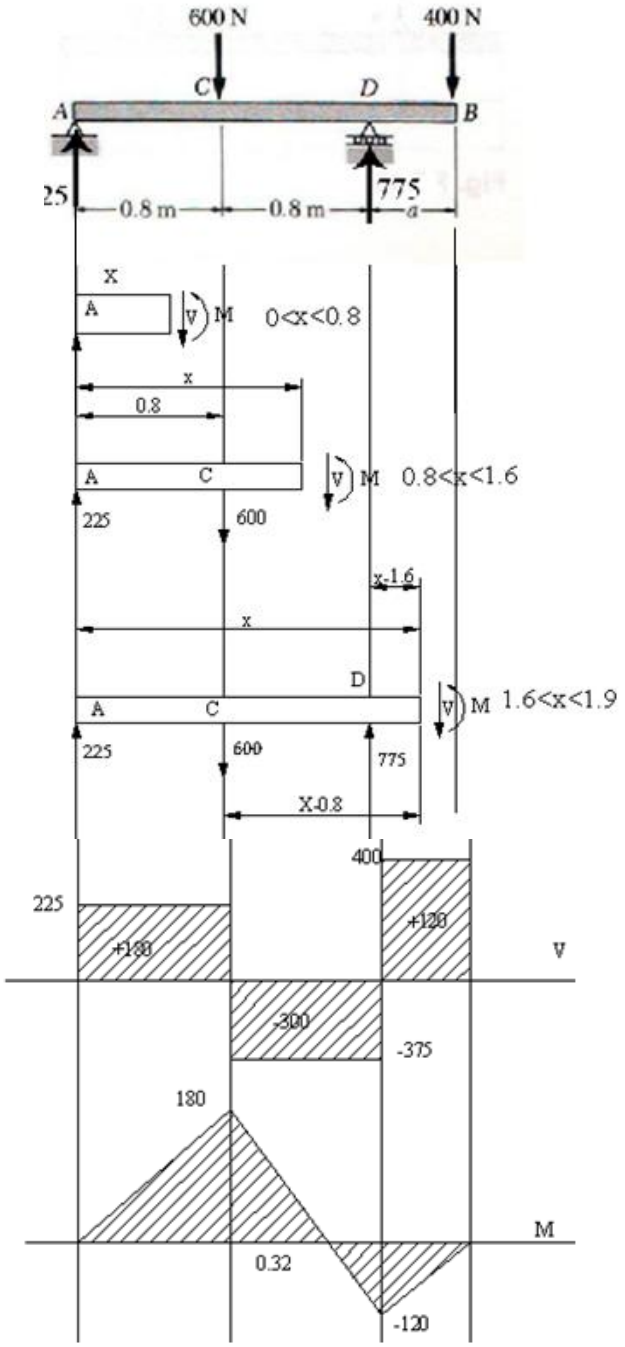
$$M = 400x - 760$$

$$\frac{180}{120} = {}^{X_1}\!/_{X_2} = 1.5$$

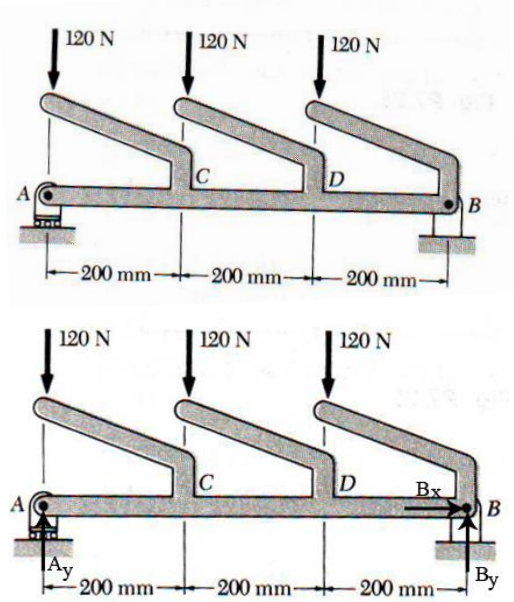
$$X_1 + X_2 = 0.8$$

$$X_1 = {}^{0.8}\!/_{2.5} = 0.32$$

دیاگرام برشی و گشت آور خمشی مسئله7-30



7-38 دیاگرام برشی و گشت آور خمشی بر تیری را که نیروها مطابق شکل زیر بر آن وارد می شود رسم کنید.



$$\sum M_D = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$(Ay)(600) - 120(600)$$
$$-120(400) - 120(200) = 0$$
$$600Ay = 1200(600 + 400 + 200)$$
$$Ay = 240$$
$$Ay + By - 3\times 120 = 0$$
$$By = -240 + 360 = 120$$
$$Bx = 0$$

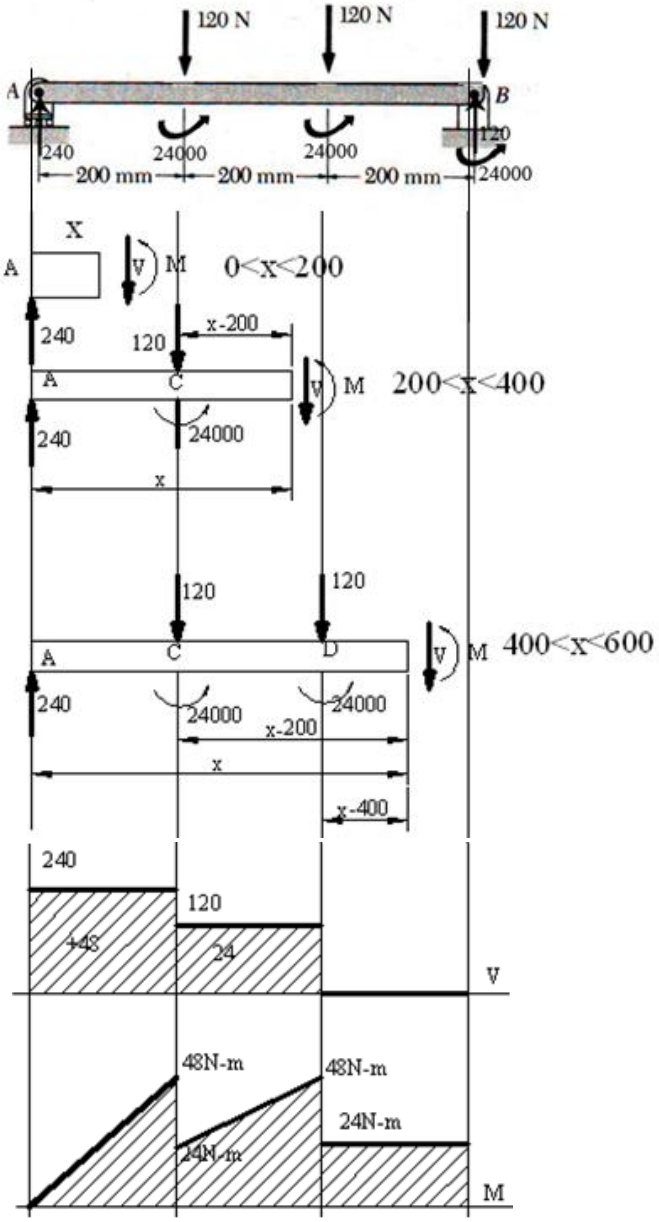
$$0 < x < 200$$
$$20 - V = 0$$
$$V = 240$$
$$240x - M = 0$$
$$M = 2240x$$

$$200 < x < 400$$
$$240 - V - 120 = 0$$
$$V = 120 \quad N$$
$$240(x) - 120(x - 200) - 24000 - M = 0$$
$$M = 120x$$

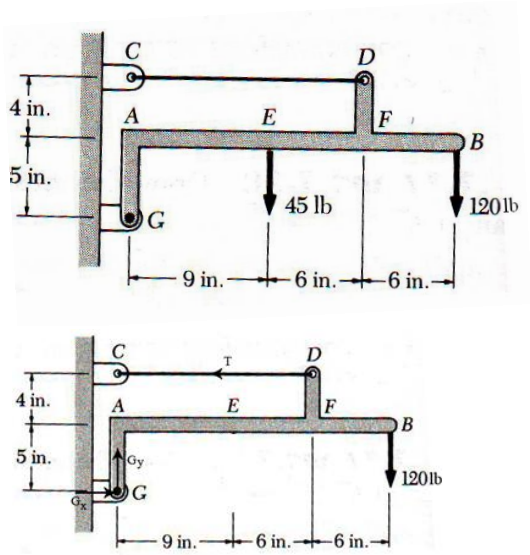
$$400 < x < 600$$
$$V = 0$$
$$240 - 120 - 120 - V = 0$$

$$240(x) - 120(x - 200) - 120(x - 400) - 48000 - M = 0$$

$$M = 240 - 120x + 24000 - 120x + 48000 - 48000$$
$$M = 24000$$



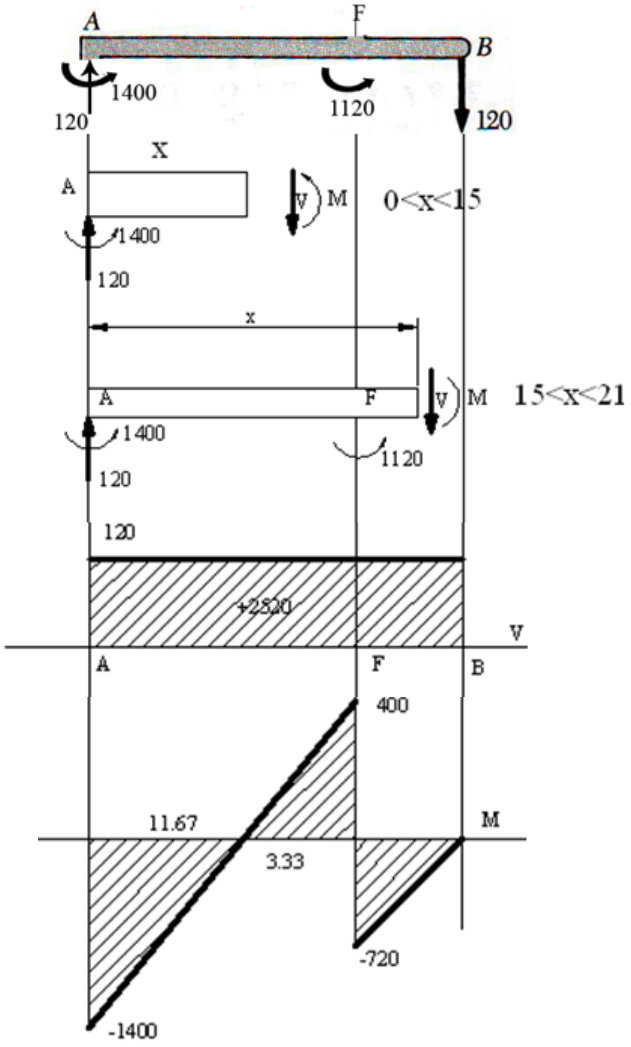
7-40 دیاگرام برشی و گشت آور خمشی بر تیری را که نیروها مطابق شکل زیر بر آن وارد می شود رسم کنید.به شرطی که نیروی 45lb حذف شده باشد.



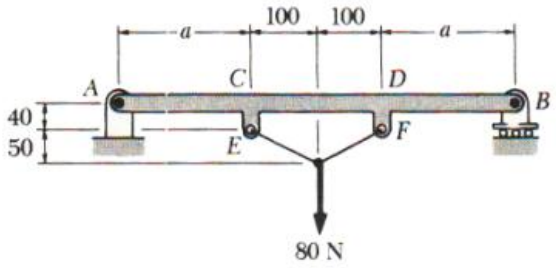
$$\sum M_G = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$
$$+(120)\ (21) - T(9) = 0$$
$$T = 280 \quad 1b$$

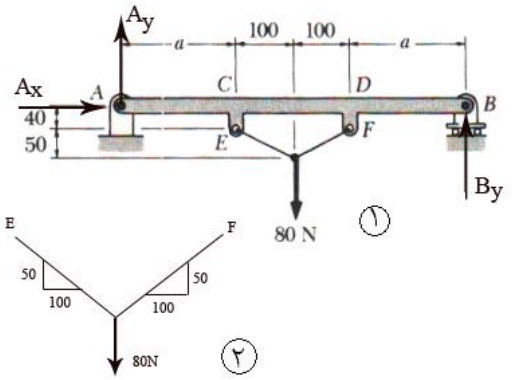
$$Gx - T = 0$$
$$Gx = 280$$
$$Gy - 120 = 0$$
$$Gy = 120$$
$$0 < x < 15$$
$$120 - V = 0$$
$$V = 120$$
$$120(x) - 1400 - M = 0$$
$$M = 120x - 1400$$
$$15 < x < 21$$
$$120 - V = 0$$
$$V = 120$$
$$120(x) - 1400 - 1120 - M = 0$$
$$M = 120x - 2520$$
$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{1400}{400} = 3.5$$

$$x_1 + x_2 = 15$$
$$x_2 = \frac{15}{4.5} = 3.33\ ,\ x_1 = 11.67$$
$$M(15,-720)$$
$$M + 720 = \frac{720}{6}\ (x-15)$$
$$M = -720 + 120x - 1800$$
$$M = 120x - 2520$$



7-42 دیاگرام برشی و گشت آور خمشی بر تیری را که نیروها مطابق شکل زیر بر آن وارد می شود رسم کنید.به شرطی که $a = 200mm$ باشد.





$$From\ 2 \Rightarrow \sum Fy = 0$$

$$-(E)\ (\frac{50}{\sqrt{12500}}) - F\ (\frac{50}{\sqrt{12500}}) - 80 = 0$$

$$\sum Fx = 0 \rightarrow\ E\ (\frac{100}{\sqrt{12500}}) - F\ (\frac{100}{\sqrt{12500}}) = 0$$

$$E = F$$

$$-2\ (\frac{50}{\sqrt{12500}})\ E = 80$$

$$E = -89.44\ N$$

$$F = -89.44\ N$$

$$Ey = 40\ \ N \downarrow$$

$$Ex = 80\ \ N \rightarrow$$

$$From\ 1 \Rightarrow -(By)(600) + (80)(300) = 0$$

$$600By = 24000 \qquad By = 40 \quad N \uparrow$$

$$Ay = By - 80 = 0$$

$$Ay = 80 - 40 = 40\ \ N \uparrow$$

$$Ax = 0$$

$$0 < x < 200$$

$$V = 40$$

$$M = 40x$$

$$200 < x < 400$$

$$-V - 40 + 40 = 0$$

$$V = 0$$

$$+40(x) - 40(x - 200) - 3200 - M = 0$$

$$M = 8000 - 3200 = 4800$$

$$400 < x < 600$$

$$40 - 40 - 40 - V = 0$$

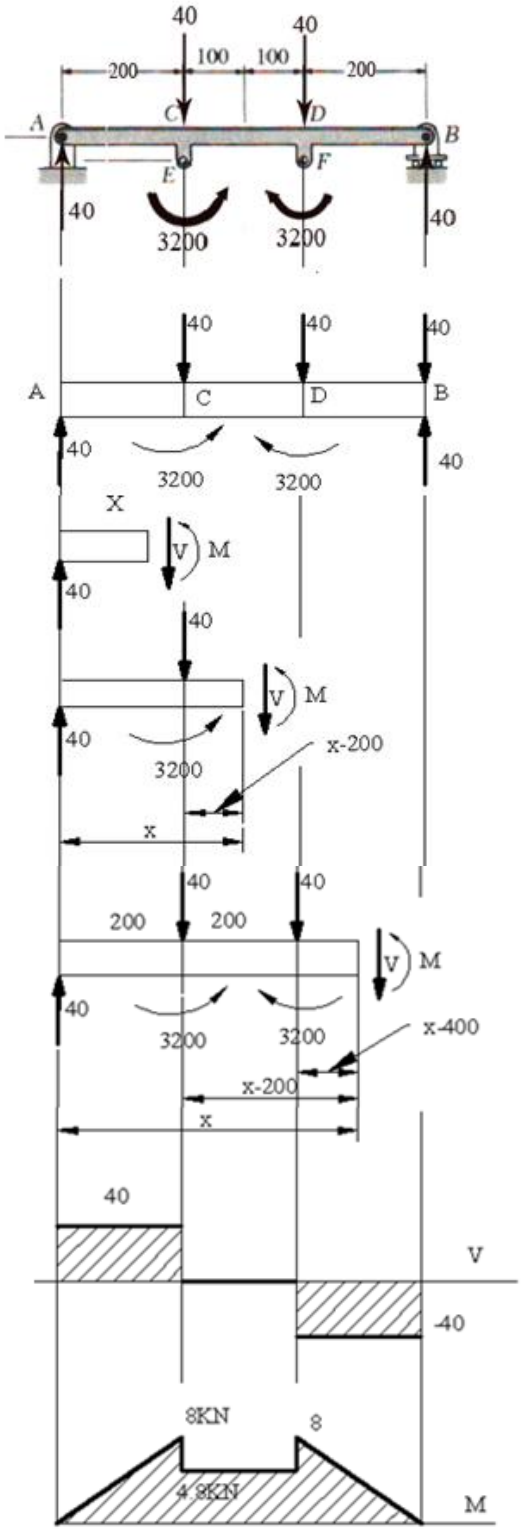
$$V = -40$$

$$40(x) - 40(x - 200) - 40(x - 400) - M = 0$$

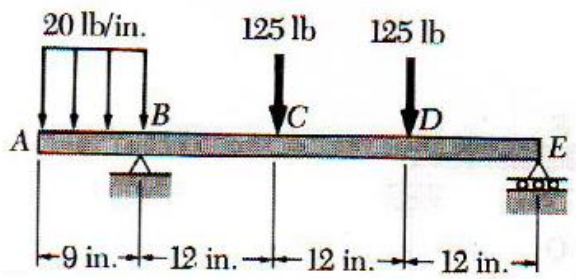
$$M = -40x + 24000$$

$$\begin{cases} x = 400 \\ M = 8KN \end{cases} \quad \begin{cases} x = 600 \\ M = 0 \end{cases}$$

دیاگرام برشی و گشت آور خمشی مسئله7-42



7-58 دیاگرام برشی و گشت آور خمشی بر تیری را که نیروها مطابق شکل زیر بر آن وارد می شود رسم کنید



$0 < x < 9$

$\sum MB = 0$

$-36\ \ Ey + 125\ \ (24) + 125\ \ (R) - 180\ \ (4.5) = 0$

$36\ \ Ey = 4500\ - 810$

$Ey = 102.5\ \ lb$

$By + Ey = 430$

$By = 327.5\ \ lb$

$0 < x < 9$

$-V - 20x = 0$

$V = -20x$

$M = -10\ \ x^2$

$\begin{cases} x = 9 \\ V = -180 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 \\ M = -810 \end{cases}$

$9 < x < 21$

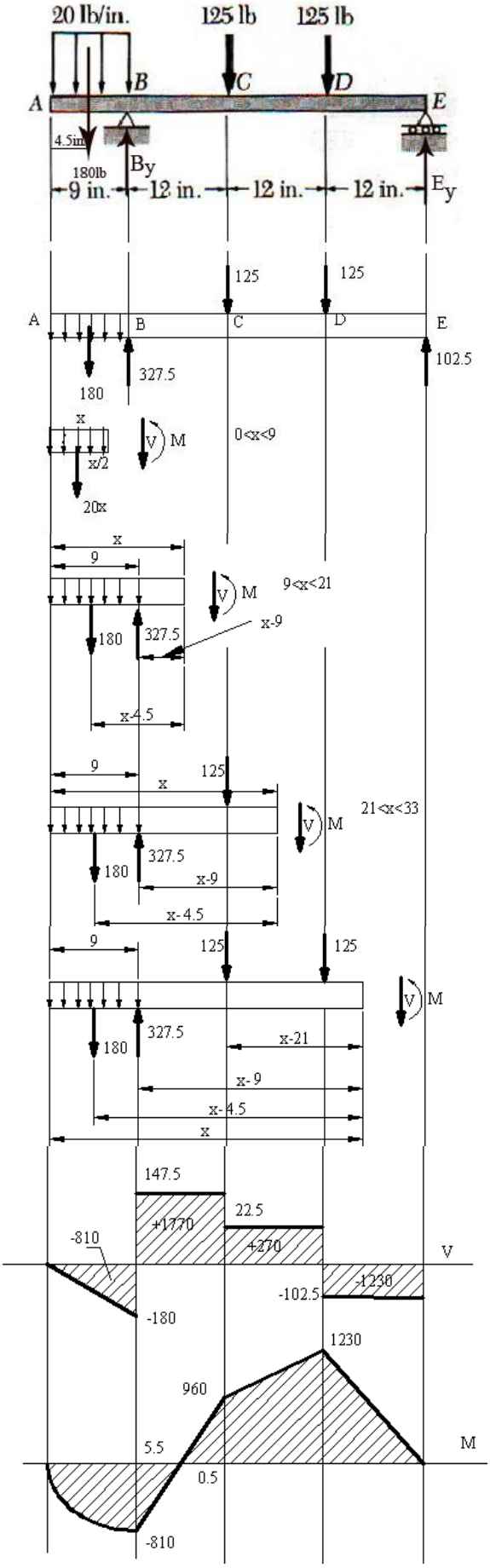
$-180 + 327.5 - V = 0$

$V = 147.5$

$-180\ \ (x - 4.5) + 327.5\ \ (x - 9) - M = 0$

$M = -180x + 810 + 3275X - 2907.5$

$M = 147.5X - 2137.5$



$$\begin{cases} x = 21 \\ M = 960 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 \\ M = -810 \end{cases}$$

$$21 < x < 33$$

$$-180 + 32.7 - 125 - V = 0$$

$$V = 22.5$$

$$-180\ (x - 4.5) + 327.5\ (x - 9) -$$

$$125\ (x - 21) - M = 0$$

$$M = -180x + 810 + 327.5x -$$

$$2947.5 - 125x + 2625$$

$$M = 25.5x + 487.5$$

$$\begin{cases} x = 21 \\ M = 960 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 33 \\ M = 1230 \end{cases}$$

$$33 < x < 45$$

$$-180 + 327.5 - 125 - 125 - V = 0$$

$$V = -102.5$$

$$-180\ (x - 4.5) + 327.5\ (x - 9) - 125\ (x - 21)$$

$$-125\ (x - 33) - M = 0$$

$$M = -180x + 810 + 327.5x -$$

$$2947.5 - 125x + 2625 - 125x + 4125$$

$$M = -102.5x + 4612.5$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{960}{810} = 1.185$$

$$x_1 + x_2 = 12$$

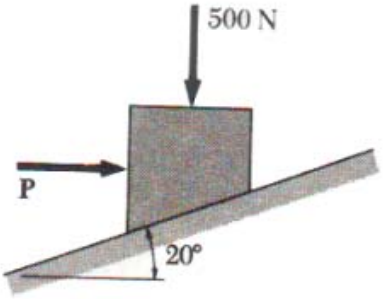
$$x_1 = \frac{12}{2.185} = 5.5$$

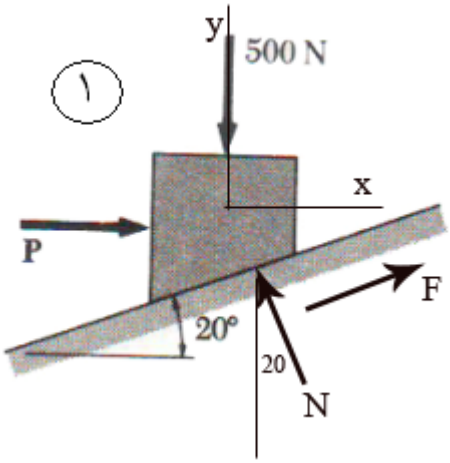
$$\begin{cases} x = 33 \\ M = 1230 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 45 \\ M = 0 \end{cases}$$

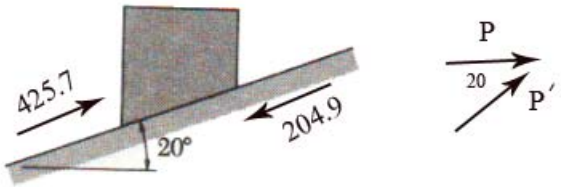
فصل ۸

اصطکاک

8-2 ضریب اصطکاک بین بلوک و سطح شیب دار برابر است با $\mu_k = 0.25$ و $\mu_s = 0.3$ ، پیدا کنید آیا بلوک به حال تعادل قرار می گیرد یا نه؟جهت نیروی اصطکاک را پیدا کنید به شرط اینکه $P = 400\ N$ باشد.







$$\mu_s = 0.3$$
$$\mu_k = 0.25$$
$$P = 400\ \ N$$

$$\sum Fy = 0 \quad From \quad Fig(1)$$
$$+ N\ \ Cos20 + F\ \ Sin20 - 500 = 0$$

$$\sum Fx = 0\ \ From\ \ Fig(1)$$

$$400 + FCos20 - NSin20 = 0$$
$$N + F\tan 20 = \frac{500}{Cos20} = 532$$
$$-N + F\ Cat20 = -\frac{400}{Sin20} = -1169.52$$
$$F\ (0.364 + 2.747) = -637.52$$
$$F = -\frac{637.52}{3.111} = -204.9\ \ N$$
$$From(2) \rightarrow Cos20 = \frac{P}{P'}$$
$$P' = \frac{400}{Cos20} = 425.7\ \ N$$

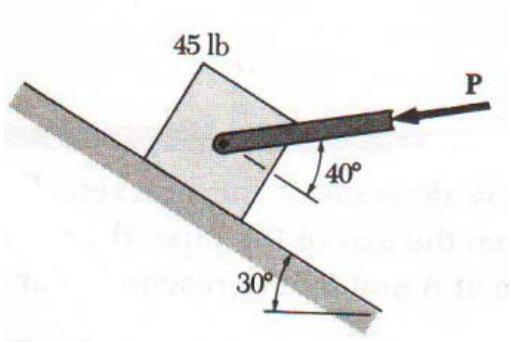
No, Equilibrium تعادل بر قرار نمی شود

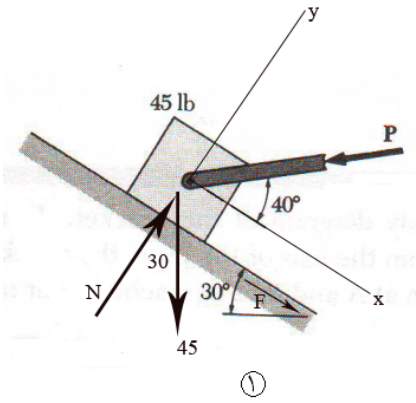
Block moving up بلوک به سمت بالا حرکت می کند

$$F = -204.92\ \ N$$
$$N = 532 - F\tan 20$$
$$N = 532 + 204.92\ \ \tan 20$$
$$N = 532 + 74.59 = 606.6\ \ N$$

$$F = \mu_k N = 0.25 \times 606.6 = 151.65$$
$$F = 151.7 \quad N$$

8-4 ضریب اصطکاک بین بلوک و سطح شیب دار برابر است با $\mu_k = 0.4$ و $\mu_s = 0.3$ ، پیدا کنید آیا بلوک به حال تعادل قرار می گیرد یا نه؟جهت نیروی اصطکاک را پیدا کنید به شرط اینکه $P = 60\ N$ باشد.





$p = 60^{\,1b}$

$\mu_S = 0.4$

$\mu_K = 0.3$

$\sum Fy = 0$

$N - 45Cos30 - 60Sin40 = 0$

$N = 38.97 + 38.57$

$N = 77.54 \;\; lb$

$\sum Fx = 0$

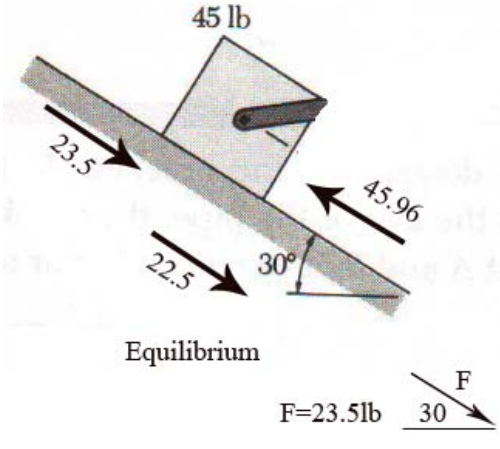
$45 \;\; Sin30 - 60 \;\; Cos40 + F = 0$

$F = 45.96 - 22.5$

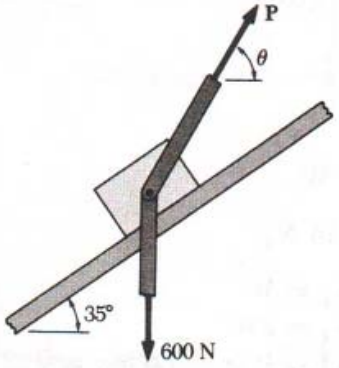
$F = 23.5 \;\; lb$

Equilibrum

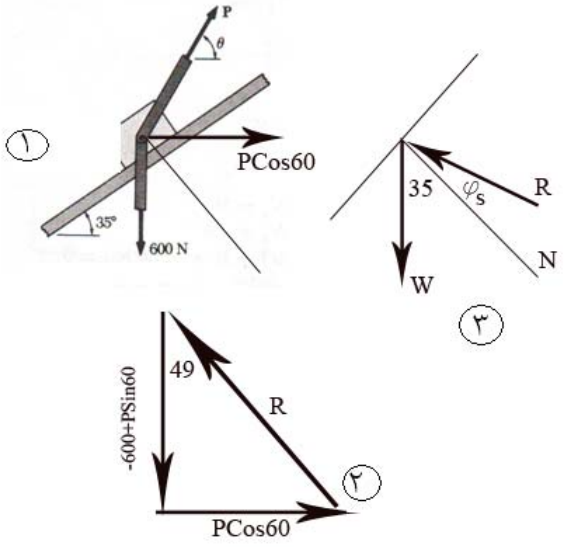
$F = 23.5$



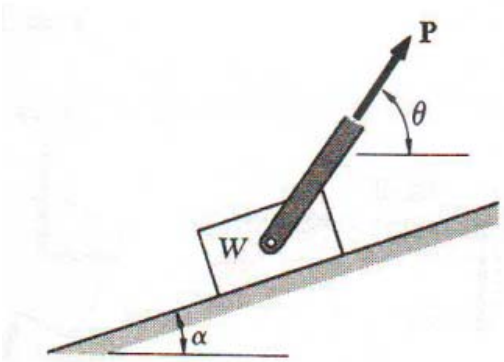
8-6 ضریب اصطکاک بین بلوک و سطح شیب دار برابر است با $\mu_k = 0.3$ و $\mu_s = 0.4$ ، اگر زاویه $\theta = 60^\circ$ باشد، پیدا کنید کوچکترین نیروی Pو جهت آن وقتی که (a) بلوک به سمت بالا شروع به حرکت کند، و(b)حرکت به سمت بالا را حفظ کند،و(c) ازحرکت بلوک به سمت پائین سطح شیب دار جلو گیری کند.

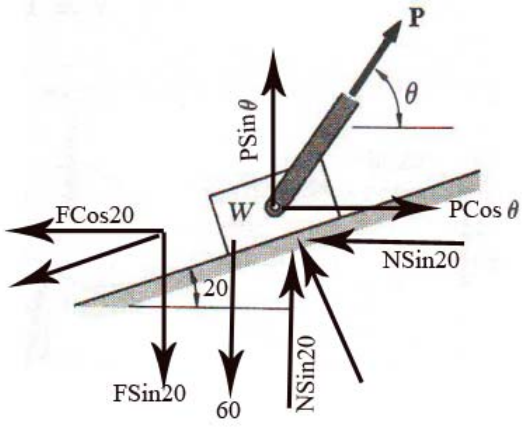


a: to Start up
b: Keep moving , impeding
c: to prevent from moving



8-8 بلوکW به وزن ۶۰ پوندروی سطح شیب دار قرار گرفته است، اگر $\alpha = 20^\circ$و $\mu_k = 0.3$ باشد ، پیدا کنید کوچکترین نیروی Pو جهت آن وقتی که (a) بلوک به سمت بالا شروع به حرکت کند، و(b) ازحرکت بلوک به سمت پائین سطح شیب دار جلو گیری بعمل آورد.





$$\sum Fx = 0$$

$$PCos\theta - NSin20 - FCos20 = 0$$

$$\sum Fy = 0$$

$$-60 + PSin\theta + NCos20 - FSin20 = 0$$

$$F = N\mu_S = 0.3N$$

$$PCos\theta - \frac{F}{0.3}Sin20 - FCos20 = 0$$

$$PCos\theta = F(1.14) + 0.94F = 2.08F$$

$$\tan\phi_S = \mu_S = 0.25$$

$$\phi_S = 14.04$$

$$35 + 14.04 = \varphi = 49.04$$

$$From(1) \rightarrow \sum Fy = 0$$

$$-W + PSin60 - 600 = 0$$

$$W = PSin60 - 600$$

$$From(2) \rightarrow \tan\ 49.04 = \frac{Fx}{Fy}$$

$$\frac{PCos60}{-W} = \frac{P\ Cos60}{+600 - p\ Sin60}$$

a)

$$+600\ \tan 49.04 - P\ Sin60\ \tan 49.04 = P\ Cos60$$

$$P\ (\tan 49.04\ Sin60 + Cos60) = 600\ \tan 49.04$$

$$P = \frac{600\ \tan 49.04}{\tan 49.04\ Sin60 + Cos60}$$

$$P = \frac{691.195}{1.4976} = 461.5\ N$$

b)

$$\tan\phi_K = \mu_K = 0.2$$

$$\phi_K = 11.3 \qquad \varphi = 35 + 11.3 = 46.3$$

$$P = \frac{600\ \tan 46.3}{\tan 46.3\ Sin60 + Cos60}$$

$$P = \frac{627.864}{0.9062 + 0.5} = \frac{627.864}{1.4062}$$

$$P = 446.5\ \ N$$

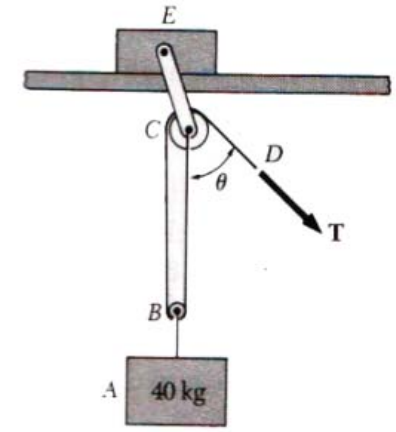
c)

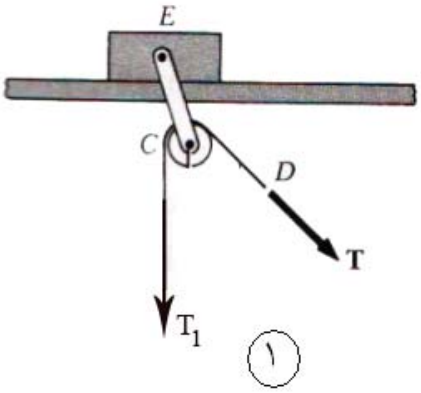
$$\varphi = 35 - 14.04 = 20.96$$

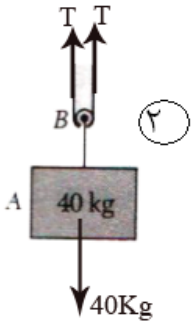
$$P = \frac{600\ \tan 20.96}{\tan 20.96\ Sin60 + Cos60} = \frac{229.84}{0.332 + 0.5} = 276.3$$

$$P = 276.3\ \ N$$

8-10 ۴۰ کیلو گرم بلوکA به یک قرقرهB وC مطابق شکل آویزان شده است ، قرقره Cبه بلـوکE کـه وزن نـاچیز دارد روی ریل بدون اصطکاک متصل است ،از اصطکاک در قرقره هـا صـرف نظر می شود، مطلوبسـت تعیـین حـداقل زاویـه θ ، وقتـی کـه سیستم به حالت تعادل قرار گیرد.







$$-60+PSin\theta+\frac{F}{0.3}Cos20-FSin20=0$$

$$PSin\theta=-3.13F+0.34F=-2.8F+60$$

$$PSin\theta=-2.8(\frac{PCos\theta}{2.08})+60=-1.346PCos\theta+60$$

$$P=\frac{60}{Sin\theta+1.346Cos\theta}$$

$$P'=0 \Rightarrow Min$$

$$P'=\frac{-(Cos\theta-1.346Sin\theta)60}{K^2}=0$$

$$Cos\theta-1.346Sin\theta=0 \Rightarrow \tan\theta=\frac{1}{1.346} \quad \theta=36.7^\circ$$

$$P=\frac{60}{Sin36.7+1.346Cos36.7}$$

$$P=35.9\ lb\ As\ \theta=36.7$$

b) جهتF خلاف حرکت است

$$\begin{cases} PCos\theta-NSin20+FCos20=0 \\ -60+PSin\theta+NCos20+FSin20=0 \end{cases}$$

$$PCos\theta-\frac{F}{0.3}Sin20+F(0.94)=0$$

$$PCos\theta=0.2F$$

$$-60+PSin\theta+\frac{F}{0.3}Cos20+FSin20=0$$

$$PSin\theta=60-3.47F$$

$$PSin\theta=\frac{60}{Sin\theta+17.35Cos\theta}$$

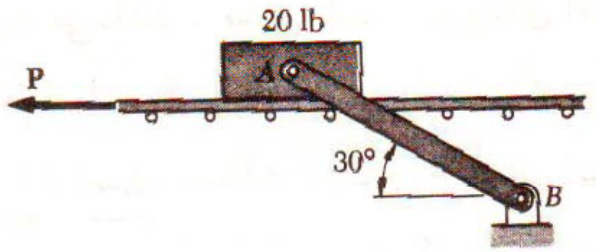
$$P'=\frac{-60(Cos\theta-17.35Sin\theta)}{k^2}=0$$

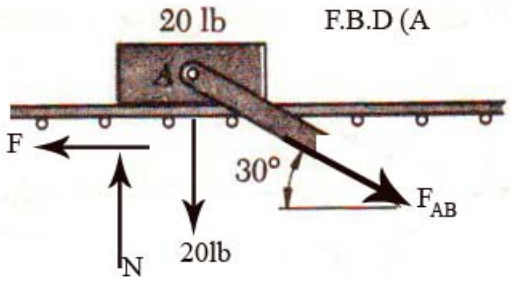
$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{1}{17.35} \quad \Rightarrow \theta=3.3^\circ$$

$$P=\frac{60}{Sin3.3+17.35Cos3.3}$$

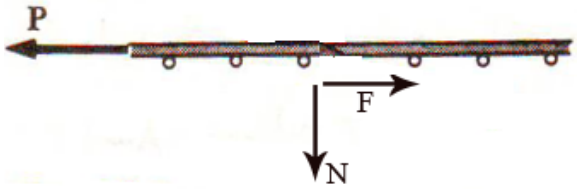
$$P=3.45\ lb\ \ As \Rightarrow \theta=3.3^\circ$$

8-12 جسمی به وزن $20lb$ روی تسمه ناقل در حال سکون بوده و متصل به میله اتصال AB نیز می باشد.میدانیم که ضریب اصطکاک بین جسم و سطح تسمه 0.25 ، از وزن میله صرفنظر می شود،معیین کنید مقدار نیروی P لازم برای حرکت تسمه بسمت چپ را.





F.B.D تسمه



$\mu_S = 0.25$

$W_A = 20 \quad 1b$

FBD (A)

$F = 0.25\ N$

$\sum Fy = 0$

$N - 20 - F_{AB}\ Sin30 = 0$

$\sum Fx = 0$

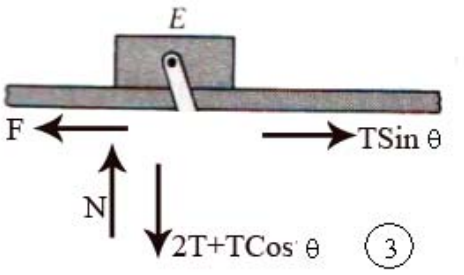
$-F + F_{AB}\ Cos30 = 0$

$-0.25N + F_{AB}\ Cos30 = 0$

$-0.25\ (20 + F_{AB}(0.5)) + F_{AB}\ Cos30 = 0$

$-5 - 0.125\ F_{AB} + F_{AB}(0.866) = 0$

$0.741\ F_{AB} = 5$



$\mu_S = 0.3$

$\theta = ? \qquad w = 0$

$From(1) \Rightarrow \sum M_O = 0$

$T\ (a) - T_1(a) = 0$

$T = T_1$

$From(2) \Rightarrow \sum Fy = 0$

$2T = 40$

$T = 20$

$From(3) \Rightarrow \sum Fx = 0$

$F = T\ Sin\theta$

$F = \mu N = 0.3\ N$

$0.3\ N = T\ Sin\theta$

$\sum Fy = 0$

$N = 2T + T\ Cos\theta$

$0.3\ (2T + T\ Cos\theta) = T\ Sin\theta$

$0.3\ (40 + 20\ Cos\theta) = 20\ Sin\theta$

$12 + 6\ Cos\theta = 20\ Sin\theta$

$20\ Sin\theta - 6\ Cos\theta = 12$ حل معادله مثلثاتی

$Sin\theta - \frac{6}{10}\ Cos\theta = 12/20$

$\tan\alpha = \frac{6}{20} \Rightarrow \alpha = 16.7^\circ$

$Sin\theta\ Cos\alpha - Cos\theta\ Sin\alpha = \frac{12}{20}\ Cos\alpha$

$Sin\ (\theta - \alpha) = \frac{12}{20} Cos16.7 = 0.5746 = Sin35.1$

$\Rightarrow \theta - \alpha = 35.1$

$\theta = 35.1 + 16.7 \qquad \theta = 51.8$

$F_{AB} = 6.751^{1b}$

$F = F_{AB}(0.866) = 6.75\ \ (0.866)$

$F = 5.84\ 1b$

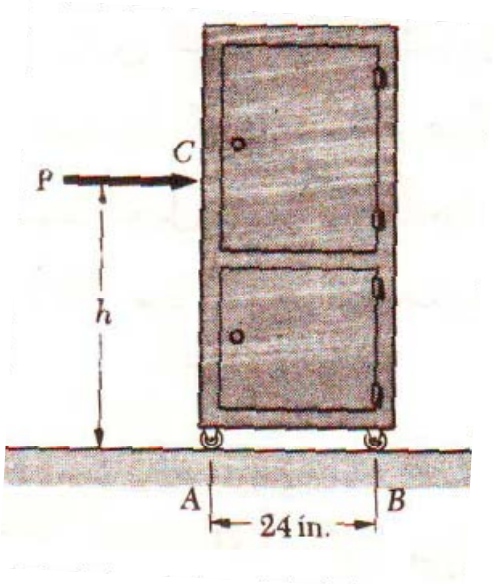
تسمه FBD

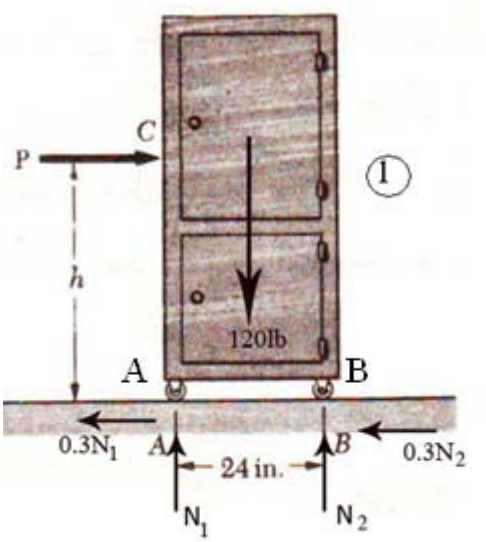
$\sum Fx = 0$

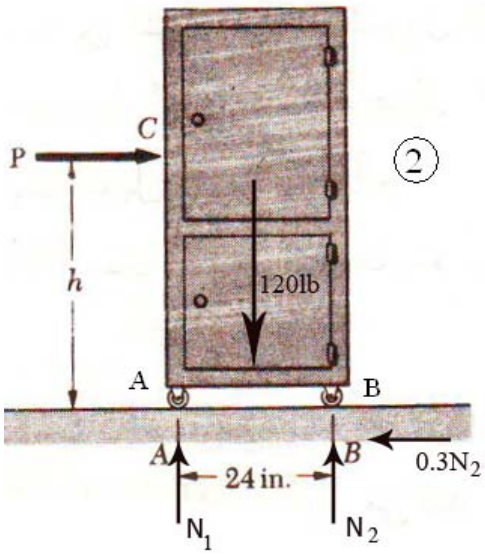
$-p + f = 0$

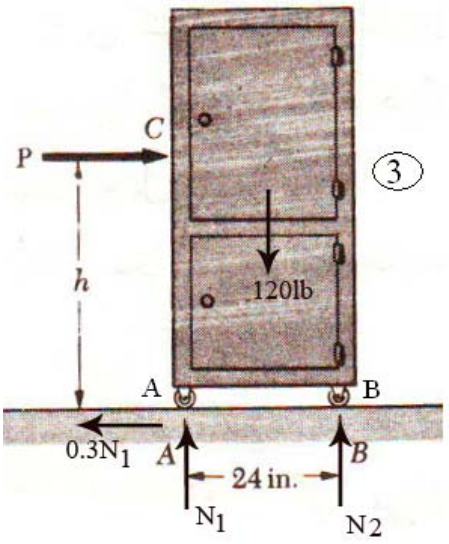
$P = 5.84\ 1b$

8-14 قفسه ای بوزن $20\ lb$ روی چرخ هائی قرار داده شده،بطوریکه از چرخش آن جلوگیری شود.ضریب اصطکاک 0.3 است هر گاه $h = 32\ in$ باشد،معیین کنید مقدار نیروی لازم P برای حرکت قفسه بسمت راست را (a) هر گاه چرخها در نقطه BوA کاملاً قفل و در گیر باشند (b) هرگاه در نقطهB قفل و در نقطهA آزاد باشندو (c) هرگاه در نقطهA در گیر و در نقطهB آزاد باشند.









قفل A, B

a)

$$From(1) \Rightarrow \sum Fx = 0$$
$$P = 0.3\ N_1 + 0.3\ N_2$$
$$From(1) \Rightarrow \sum Fy = 0$$
$$N_1 + N_2 = 120$$
$$P = 0.3\ (120) = 36 \quad 1b \rightarrow$$

b)

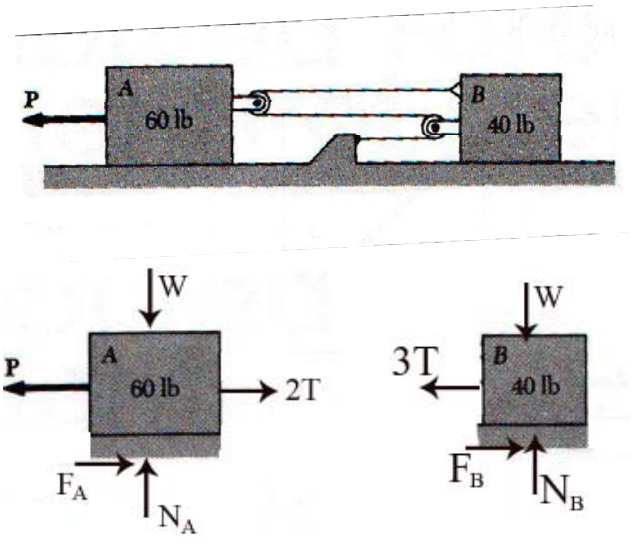
Aآزاد

B قفل

$$From(2) \Rightarrow \sum M_A = 0$$
$$P(32) - N_2\ (24) + 120\ (12) = 0$$
$$From(2) \Rightarrow \sum Fy = 0$$
$$N_1 + N_2 = 120$$
$$P = 0.3N_2$$
$$32P = 24\ (\frac{P}{0.3}) - 120\ (12)$$
$$32P = 80P - 1440$$
$$48P = 1440$$
$$P = 30\ lb \rightarrow$$

$$\sum M_A = 0 \ \curvearrowleft^{+}$$
$$-N_2\ (24) + P\ (32) + 120\ (12) = 0$$
$$P = 0.3\ N_1$$
$$N_1 + N_2 = 120$$
$$-(120 - \frac{P}{0.3})\ (24) + p\ (32) + 1440 = 0$$
$$-2880 + 80P + 32P + 1440 = 0$$
$$112P = 1440$$
$$P = 12.85\ lb \rightarrow$$

8-137 بلوک Aو Bبوسیله کابل مطابق شکل متصل شده اند،اگر ضریب اصطکاک برای همه سطوح $P = 0.3\ N_1$ تماس باشد و از اصطکاک در قرقره ها صرف نظر شود،مطلوبست تعیین حداقل نیروی P وقتی که بلوک ها به حرکت در آیند،ثانیاً حداقل نیرو ی P را تعیین کنید وقتی که Pبه بلوکB اثر کند.



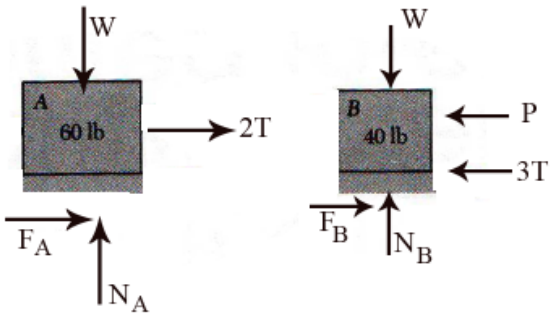
a)

$$\sum Fy = 0$$
$$N_B = w = 40$$
$$F_B = \mu N_B = 40 \times 0.3 = 12$$
$$\sum Fx = 0$$
$$3T = F_B = 12 \qquad \underline{T = 4\ lb}$$

$$\sum Fy = 0$$
$$N_B = w = 60$$
$$F_A = \mu A = 60 \times 0.3 = 18 \ lb$$
$$\sum Fx = 0$$
$$-P + 2T + F_A = 0$$
$$P = 18 + 8 = 24 \ lb$$

b)

اگر P را روی B اثر کند



$$W_A = 60 = N_A$$
$$F_A = 60 \times 0.3 = 18$$
$$F_A + 2T = 0 \qquad T = -9$$
$$N_B = w = 40$$
$$F_B = 40 \times 0.3 = 12$$
$$P + 3T = F_B$$
$$P - 27 = 12$$

$$P = 39 \ lb$$

۱- سئولات میان ترم ونهایی و کوئیز های مربوط به دانشگاه گیلان از صفحه ۴۴۹ تا صفحه۴۸۴
۲- سئولات میان ترم ونهایی و کوئیز های مربوط به دانشگاه مهر آستان از صفحه۴۸۵ تا صفحه۵۱۹
۳- سئولات میان ترم ونهایی و کوئیز های مربوط به دانشکده فنی فومن(پردیس دانشگاه تهران) از صفحه ۵۲۰ تا صفحه۵۵۸

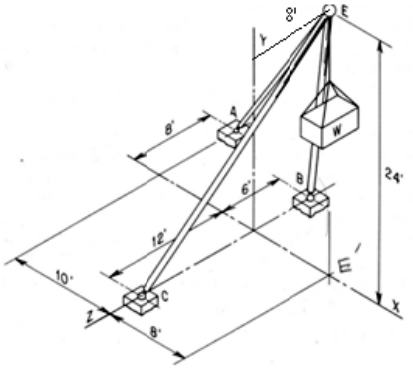
به نام خدا

مدت ۳/۵ ساعت

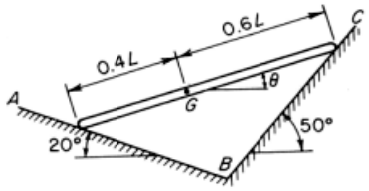
تاریخ ۷۵/۲/۲۰

امتحان میان ترم،استاتیک گره مکانیک دانشگاه گیلان

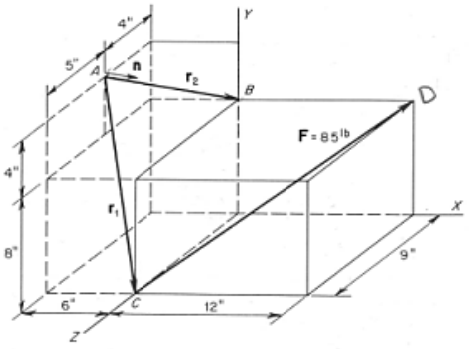
۱- وزن W برابر با ۳۶۰۰ پوند است، مطلوبست کشش در بازوی AE و BE و CE ، تمام مفصل های A و B و C از نوع کاسه و ساچمه می باشند.



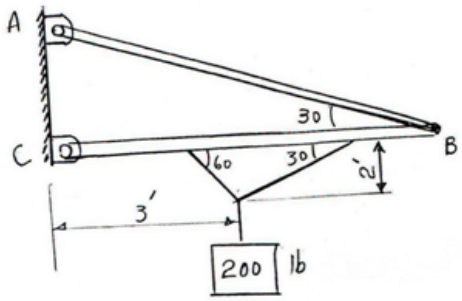
۲- میله ای به طول L به وزن W روی دو سطح شیب دار صیقلی قرار گرفته است اگر میله در حال تعادل باشد زاویه θ چقـدر است.



۳- مطلوبست ممان نیروی F= 85 lb نسبت به نقطه A و خط AB و هم چنین فاصله نیروی F از نقطه A .



۴- مطلوبست نیروهای عکس العمل در نقاط A و C شکل زیر، وزن بازوی AB و BC به ترتیب ۱۰۰ و ۱۵۰ پوند است.



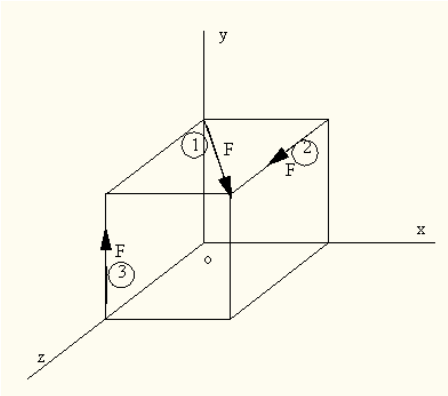
$AB = 10\ ft$

$W_{AB} = 100lb$

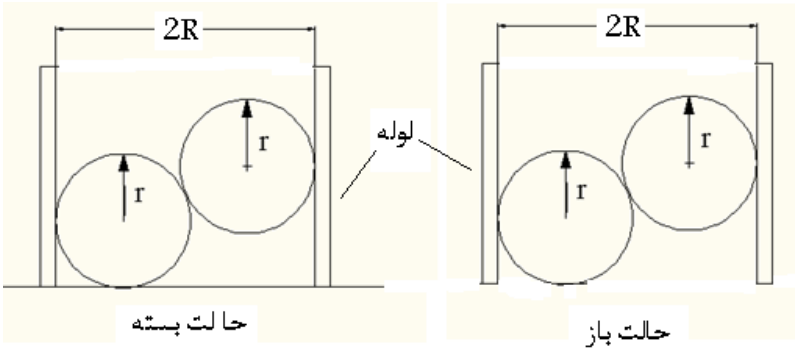
$W_{BC} = 150lb$

A و B و C پین هستند.

۵- سه نیروی مساوی مطابق شکل روی مکعب به ضلع a اثر می کنند، اولاً تعیین کنید نیروی معادل و کوپل در مبدأ مختصات ثانیاً تبدیل سیستم فوق به یک رنچ در نقطه ای به طول $\frac{1}{2}a$



۶- دو کره مشابه ، هر یک به جرم m و شعاع r مطابق شکل داخل یک لوله سر باز استوانه ای شکل به شعاع R و جرم M قرار گرفته اند $R<2r$ اگر از اصطکاک در تمامی سطوح در تماس صرف نظر شود، حداقل جرم لوله را تعیین کنید به طوری که واژگون نشود، اگر ته لوله بسته باشد آیا امکان واژگون شدن آن وجود دارد؟



موفق باشید محمد جواد تسکینی

حل مسئله ۱

جهت همه نیروها به سمت E فرض شود .

$A(-10,0,-8)$ $B(0,0,-6)$ $E(8,24,-8)$ $C(0,0,12)$

$W = 3600 \quad lb$

AE , $dx = 18$ $dy = 24$ $dz = 0$

BE , $dx = 8$ $dy = 24$ $dz = -2$

CE , $dx = 8$ $dy = 24$ $dz = -20$

نیرو	مقدار	dx	dy	dz	d	F_x	F_y	F_z
AE	T_{AE}	18	24	0	30	$\frac{18}{30}T_{AE}$	$\frac{24}{30}T_{AE}$	0
BE	T_{BE}	8	24	-2	25.38	$\frac{8}{25.38}T_{BE}$	$\frac{24}{25.38}T_{BE}$	$\frac{2}{25.38}T_{BE}$
CE	T_{CE}	8	24	-20	32.25	$\frac{8}{32.25}T_{CE}$	$\frac{24}{32.25}T_{CE}$	$\frac{-18}{32.25}T_{CE}$
W	3600	-	-	-			-3600	

$$\begin{cases} \frac{18}{30}T_{AE} + \frac{8}{25.38}T_{BE} + \frac{8}{32.25}T_{CE} = 0 \\ \frac{24}{30}T_{AE} + \frac{24}{25.38}T_{BE} + \frac{24}{32.25}T_{CE} - 3600 = 0 \\ \frac{2}{25.38}T_{BE} - \frac{-20}{32.25}T_{CE} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2}{25.38}T_{BE} - \frac{-20}{32.25}T_{CE} = 0$$

$$T_{BE} = 7.87T_{CE}$$

$$0.6T_{AE} + \frac{8}{25.38}(7.87)T_{CE} + \frac{8}{32.25}T_{CE} = 0$$

$$0.6T_{AE} + 2.48T_{CE} + 0.248T_{Ce} = 0$$

$$T_{AE} = -4.55T_{CE}$$

$$\frac{24}{30}(-4.55T_{CE}) + \frac{24}{25.38}(7.87)T_{CE} + \frac{24}{32.25}T_{CE} = 3600$$

$$-3.64T_{CE} + 7.44T_{CE} + 0.744T_{CE} = 3600$$

$$T_{CE} = 792 \quad lb$$

$$T_{BE} = 7.87(792) = 6233 \quad lb$$

$$T_{AE} = -4.55(792) = -3604 \quad lb$$

پس جهت نیرو از E است به A

حل مسئله ۲

$$\sum F_y = 0$$
$$-W + N_1 Cos50 + N_2 Cos20 = 0$$
$$\sum F_x = 0$$
$$-N_1 Sin50 + N_2 Sin20 = 0$$
$$\sum M_{N_2} = 0$$
$$W(0.4LCos\theta) - N_1 Sin50(LSin\theta)$$
$$-N_1 Cos50(LCos\theta) = 0$$
$$N_1 = \frac{N_2 Sin20}{Sin20} = 0.446N_2$$
$$W = N_2(Cos50)(0.446) + N_2 Cos20$$
$$W = 1.226N_2$$
$$N_2 = 0.815W$$
$$N_1 = 0.446(0.815)W$$
$$N_1 = 0.363W$$
$$W(0.4LCos\theta) - N_1 Sin50(LSin\theta) - N_1 Cos50(LCos\theta) = 0$$
$$W(0.4)(L)Cos\theta - 0.363WSin50(LSin\theta) - 0.363WCos50LCos\theta = 0$$
$$0.4Cos\theta - 0.278Sin\theta - 0.233Cos\theta = 0$$
$$0.167Cos\theta = 0.278Sin\theta$$
$$\tan\theta = 0.60$$
$$\theta = 31^\circ$$

از راه دیگر

$$\sum F_x = 0$$
$$-N_1 Sin50 + N_2 Sin20 = 0$$
$$N_2 = 2.24N_1$$
$$\sum M_G = 0$$
$$(N_1 Sin50)(0.6LSin\theta) + N_1 Cos50(0.6LCos\theta)$$
$$+ N_2 Sin20(0.4LSin\theta) - N_2 Cos20(0.4LCos\theta) = 0$$
$$N_1(0.46)Sin\theta + N_1(0.38)Cos\theta + N_2(0.136)Sin\theta - N_2(0.375)Cos\theta = 0$$
$$N_1(0.46)Sin\theta + N_1(0.38)Cos\theta + 2.24N_1(0.136)Sin\theta - 2.24N_1(0.375)Cos\theta = 0$$
$$0.46Sin\theta + 0.38Cos\theta + 0.3Sin\theta - 0.84Cos\theta = 0$$
$$0.76Sin\theta + 0.46Cos\theta = 0$$
$$\tan\theta = \frac{0.46}{0.76} = 0.605$$
$$\theta = 31^\circ$$

حل مسئله ۳

$D(12,8,0)\quad ,A(-6,12,4)\quad B(0,8,0)\ ,C(0,0,9)$

$F = 85\ \ lb$

$$\lambda_{Cd} = \frac{\overrightarrow{CD}}{\overline{CD}} = \frac{12i + 8j - 9k}{\sqrt{144 + 64 + 81}} = \frac{12i + 8j - 9k}{17}$$

$$\vec{F} = \overline{F}\lambda_{CD} = (85)\frac{12i + 8j - 9k}{17} = 60i + 40j - 45k$$

$$r_{\vec{1}} = r_{AC\rightarrow} = 6i - 12j + 5k$$

$$\vec{M}_A = r_{AC}xF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -12 & 5 \\ 60 & 40 & -45 \end{vmatrix} \begin{matrix} j & j \\ 6 & -12 \\ 60 & 40 \end{matrix} = 540i + 300j + 240k + 720k - 200i + 270j$$

$$\overrightarrow{M}_A = \vec{r}_{AC}x\vec{F} = 340i + 570j + 960k$$

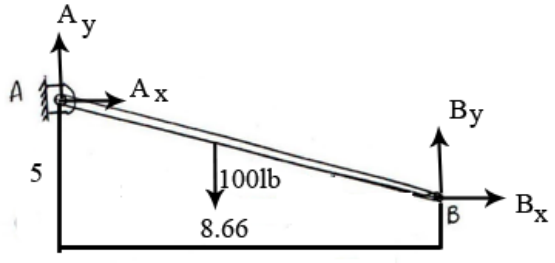
$$\overrightarrow{M}_{AB} = (\overrightarrow{M}_A.\lambda_{AB})$$

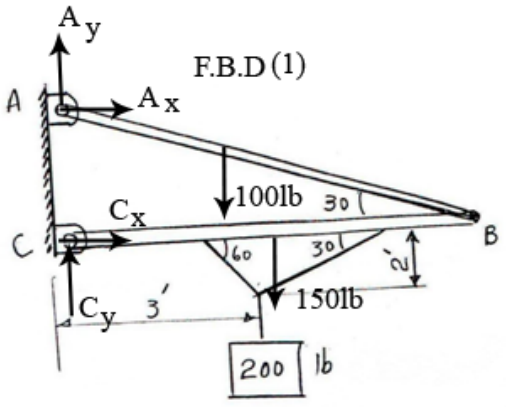
$$\overrightarrow{\lambda_{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}} = \frac{6i - 4j - 4k}{\sqrt{36 + 16 + 16}} = \frac{6i - 4j - 4k}{8.25}$$

$$\overrightarrow{M}_{AB} = (340i + 570j + 960k).(\frac{6i - 4j - 4k}{8.25})$$

$$\overrightarrow{M}_{AB} = (\frac{340x6 - 570x4 - 960x4}{8.25}) = \frac{-4080}{8.25} = -495\ \ lb - in$$

حل مسئله 4





$W_{AB} = 100\ \ lb \qquad W_{BC} = 150\ \ lb \quad AB = 10 \quad ft$

$BC = 10\cos 30$

$BC = 8.66$

$AC = {}^{10}/_{2} = 5$

$\sum M_C = 0 \qquad \curvearrowright^{+}$F.B.D(1)

$$5(AX) + 100\left(\frac{8.66}{2}\right) + 150\left(\frac{8.66}{2}\right) + 200\ (3) = 0$$

$$A_X = -336.5 \qquad 1b$$

F.B.D بازویAB

$$\curvearrowright^{+} \sum M_B = 0 \qquad 5(AX) + 8.66\,(Ay) - 100\left(\frac{8.66}{2}\right) = 0$$

$$5(-336.5) + 8.66\,Ay - 100\,(4.33) = 0$$

$$Ay = 244 \qquad Ib \uparrow$$

$$\sum FX = 0 \qquad Ax + Cx = 0 \qquad Cx = 336.5 \qquad Ib \rightarrow$$

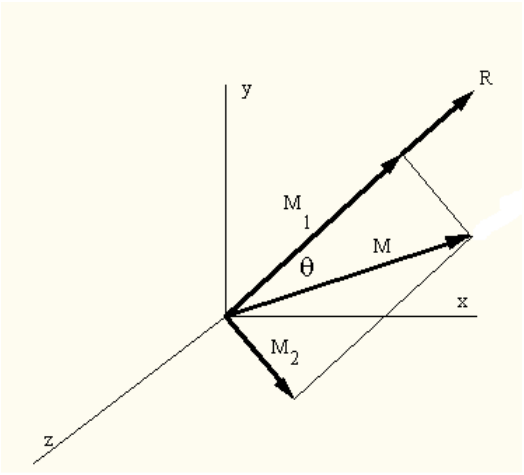
$$\sum Fy = 0 \qquad 244 - 100 - 150 + Cy - 200 = 0$$

$$Cy = 206 \quad Ib \uparrow$$

$$\vec{C} = 336.5\,i + 2.6\,j$$

$$\vec{A} = -336.5\,i + 244\,j$$

حل مسئله ۵



$$\vec{F}_1 = \frac{F}{\sqrt{2}}(ai - aj)$$

$$\vec{F_1} = F(0.707)(i - j) \qquad \vec{F_2} = Fk \qquad \vec{F_3} = Fj$$

$$\vec{R} = F(0.707i + 0.293\,j + k)$$

$$r_1 = aj \qquad r_3 = ak \qquad r_2 = ai + aj$$

$$\vec{M_O} = ajX\,(0.707(i - j)F) + (ai + aj)X\,(Fk) + akX\,(Fj)$$

$$\vec{M_O} = a(0.707F)(-k) + (aF)(-j) + aF(i) + aF(-i)$$

$$\vec{M_O} = -aF(j + 0.707k)$$

$$\vec{M_1} = \frac{\vec{R}.(\vec{R}.\vec{M_O})}{(\vec{R})^2}$$

$$\vec{M_1} = F(0.707i + 0.293\,j + k).\frac{[0.293(-aF) - 0.702(aF)]}{F(\sqrt{0.5 + .086 + 1})^2}$$

$$\vec{M_1} = -aF(0.466i + 0.185\,j + 0.63k)$$

$$\vec{M_2} = \vec{M_O} - \vec{M_1}$$

$$\vec{M_2} = -aF(0.815\,j - 0.446i + 0.077k)$$

$$\vec{M_2} = \vec{r}x\vec{R} \qquad r = xi + yj + zk \qquad x = \frac{1}{2}a$$

$$\overrightarrow{M_2} = \begin{vmatrix} i & j & k & j & j \\ x & y & z & x & y \\ 0.707 & 0.293 & 1 & 0.707 & 0.293 \end{vmatrix}$$

$$= F(yj + 0.707zj + 0.293xk - 0.707yk - 0.293zi - xj)$$

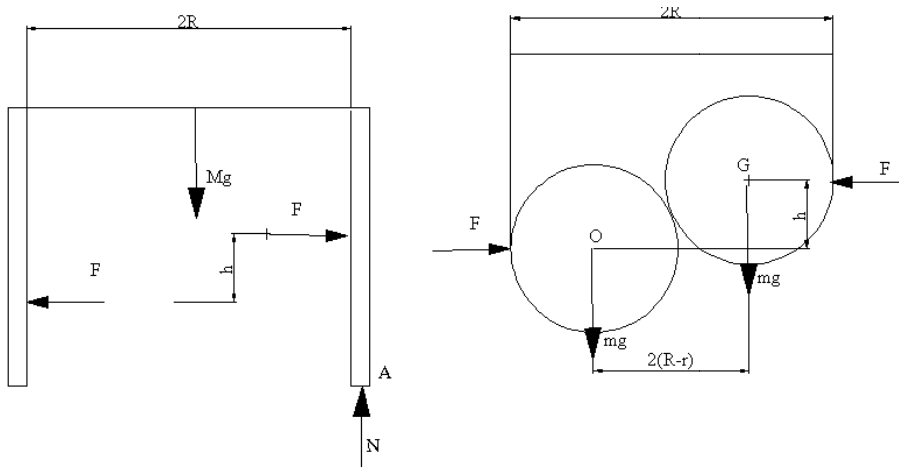
$$= -aF(0.815j - 0.446i + 0.77k)$$

$$\text{J} \begin{cases} 0.707z - x = -a(0.815) \\ x = 0.5a \qquad z = -0.445a \end{cases}$$

$$\text{i} \begin{cases} y - 0.293z = a(0.446) \\ y - 0.293(-0.445a) = a(0.446) \\ y = 0.315a \end{cases}$$

حل مسئله ۶

در حا لت باز



لوله $\sum M_A = 0$ $\qquad MgR - Fh = 0$

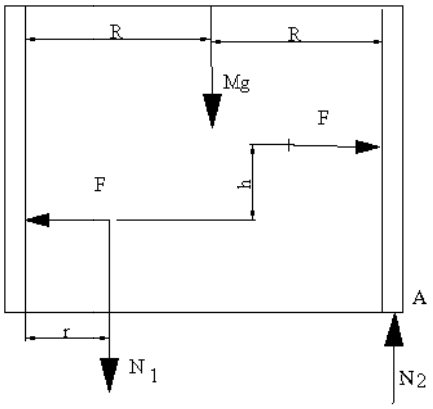
گلوله $\sum M_O = 0$ $\qquad (mg)(2)(R-r) - Fh = 0$

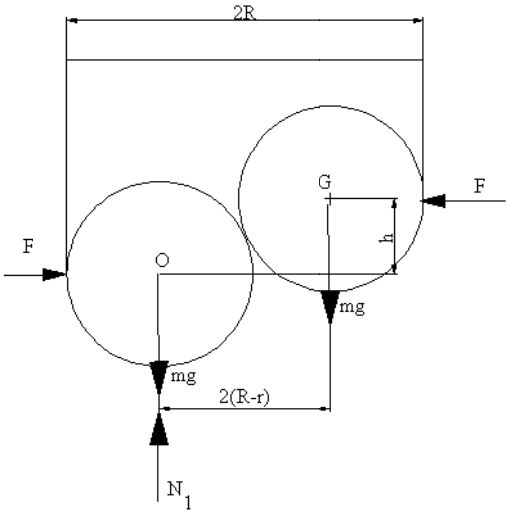
$$2mg(R-r) = MgR$$

$$M = 2m(\frac{R-r}{R}) \qquad M \geq 2m(1-\frac{r}{R})$$

واژگون نمی شود.

در حالت بسته





لوله $\sum F_y = 0$

$Mg + N_1 - N_2 = 0$

$N_2 = Mg + N_1$

گلوله $\sum F_y = 0$ $\qquad N_1 = 2mg$

لوله $\sum M_A = 0$

$N_1(2R - r) - Fh + MgR = 0$

$2mg(2R - r) + MgR - 2mg(R - r) = 0$

$MgR + 2mg(2R - r - R + r) = 0$

$MR + 2mR = 0$

$2m + M = 0$

معادله فوق غیر ممکن است، هیچ وقت صفر نمی شود، پس در حالت دوم لوله هیچ وقت واژگون نمی شود.

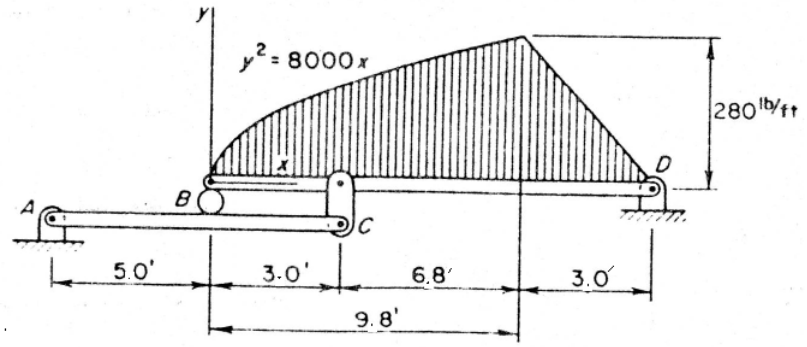
به نام خدا

مدت ۳/۵ ساعت

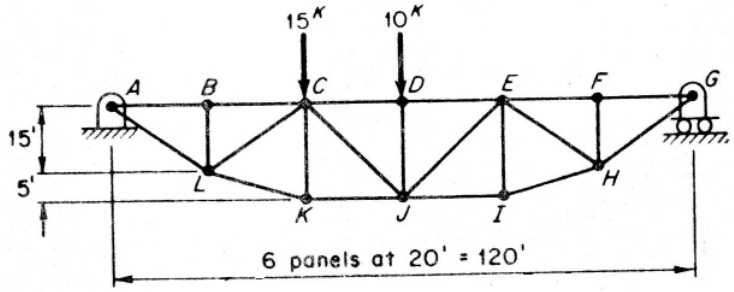
تاریخ ۷۵/۴/۹

امتحان نهائی،استاتیک گره مکانیک دانشگاه گیلان

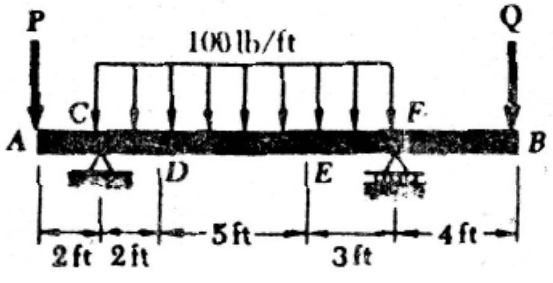
۱- مطلوبست نیروی عکس العمل در نقطه C ، توزیع بار روی بازوی BD بصورت $y^2 = 8000x$ است که y بر حسب 1b/ft و x بر حسب ft است.



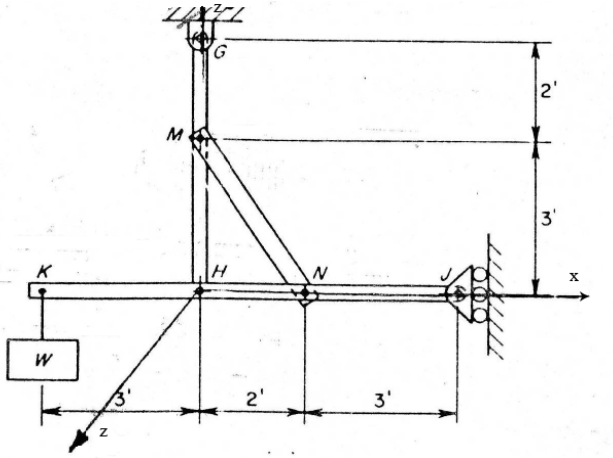
۲- خرپای شکل زیر مفروض است، مطلوبست نیروهای BC و CL و EJ .



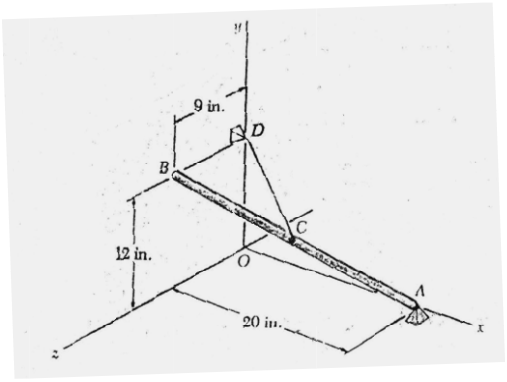
۳- بر تیر AB باری یک نواخت $100 \ \ 1b/ft$ و نیروهای متمرکز Q و P وارد مـی شـود و گفـت آور خمشـی آن معلـوم و برابـر $M_D=400 \ \ 1b-ft$ در نقطه D و در نقطه E برابر با $M_E=150 \ 1b/ft$ مـی باشـد، دیـاگرام نیـروی برشـی و گشـت آور خمشی آنرا رسم کنید.



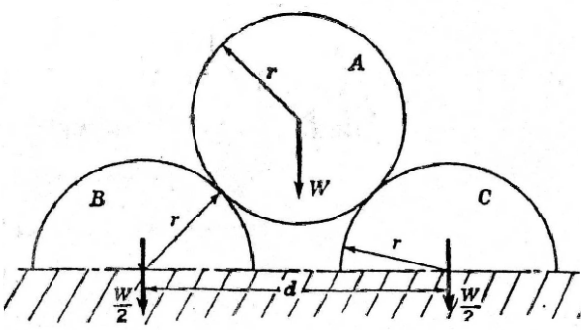
۴- مطلوبست نیروهای عکس العمل در نقطه G و J و H و M از قاب شکل زیر، وزن W برابر با 300 1b است، از وزن تمام اعضاء صرف نظر می شود توجه داشته باشید که جهت و مقدار عکس العمل نیروها در نقاط گفته شده باید محاسبه گردد.



۵- میله AB به وزن 12 1b بوسیله کاسه و ساچمه A و کابل CD در حال تعادل است، نقطه B روی دیوار بدون اصطکاک zy تکیه داده شده است و نقطه C وسط میله AB قرار دارد مطلوبست کشش کابل CD و عکس العمل نیروها در نقاط A و B .



۶- سیلندر A روی دو نیم سیلندر C و B قرار گرفته است، وزن A برابر W و وزن C و B برابر $\frac{W}{2}$ است، اگر ضریب اصطکاک استاتیکی بین کف و نیم سیلندرها μ_S باشد مطلوبست تعیین حداکثر فاصله d وقتی که تعادل برقرار باشد، d فاصله مرکز دو نیم سیلندر است و آنرا بر حسب r و μ_S بدست آورید.



موفق باشید محمد جواد تسکینی

حل مسئله ۱

$y = 280$

$(280)^2 = 8000x$

$x = 9.8$

$dw = ydx$

$w = \int ydx$

$w = \int_0^{9.8} (8000)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$

$w = (8000)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{9.8}$

$w = 1829.33 \qquad w\bar{x} = \int Xeldw = \int xydx$

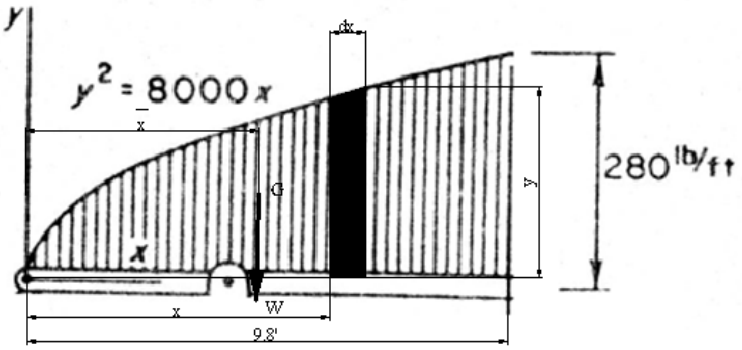
$1829.33\bar{x} = \int_0^{9.8} (8000)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx$

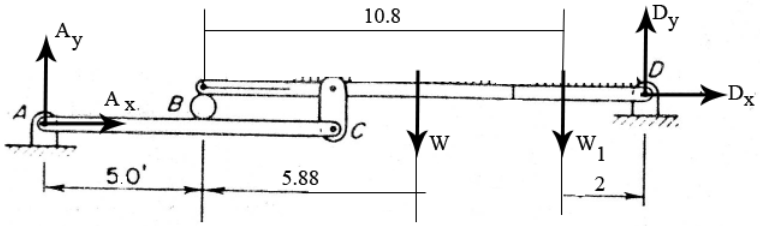
$1829.33\bar{x} = (8000)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^{9.8}$

$1829.33\bar{x} = 10756.48$

$\bar{x} = 5.88$

$w_1 = 280 \times \frac{3}{2} = 420 \ \ lb$



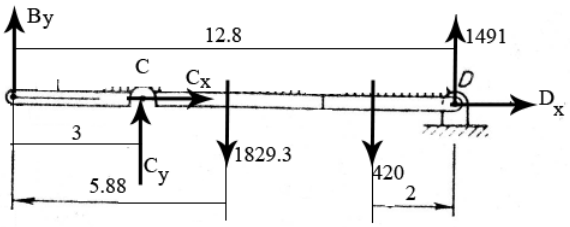


$W_1 = 420 \ \ lb \qquad W = 1829.3 \ \ lb$

$\sum M_A = 0$

$-D_y(17.8) + 420(15.8) + 1829.33(10.8) = 0$

$D_y = 1491 \ \ lb$



$\sum M_B = 0$

$-1491(12.8) + 420(10.8) + 1829.3(5.88) - 3cy = 0$

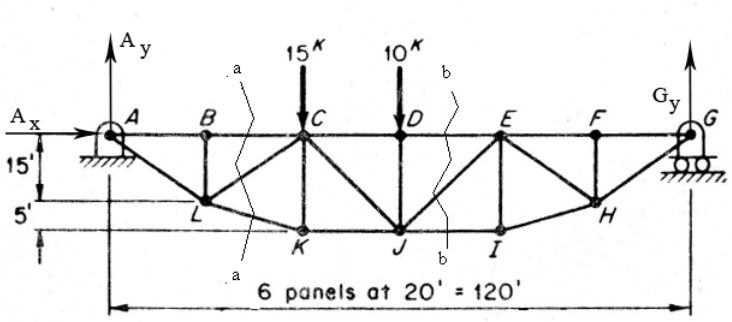
$3cy = -19085 + 4536 + 10756 = -3793$

$cy = -1264$

$cy = 1264 \quad lb \downarrow$

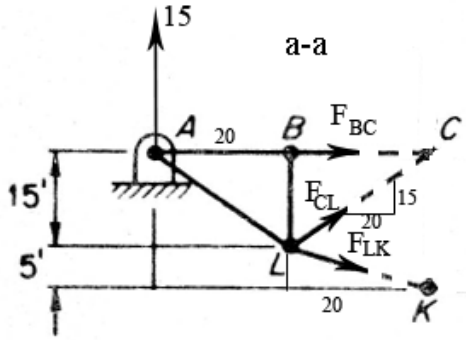
حل مسئله ۲

$$\sum M_A = 0$$
$$-Gy(120) + 10(60) + 15(40) = 0$$
$$Gy = 10Kips \uparrow$$
$$\sum F_y = 0$$
$$Ay + 10 - 18 - 10 = 0$$
$$Ay = 15Kips \uparrow$$
$$\sum F_x = 0 \; Ax = 0$$
$$\sum M_L = 0$$
$$+(15)(20) + F_{BC}(15) = 0$$



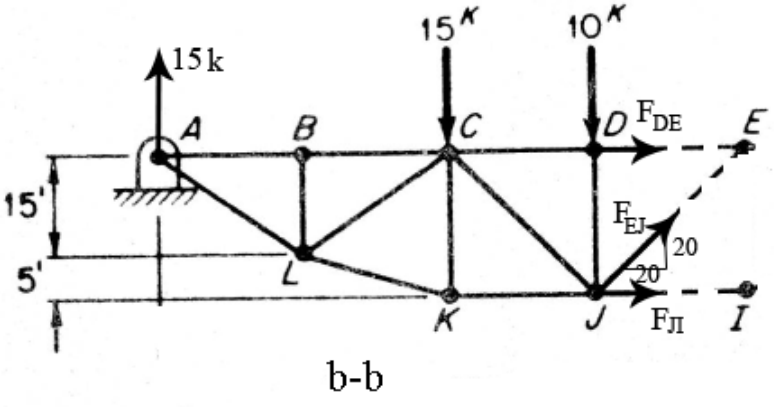
a-aبرش

$$F_{BC} = -20k$$
$$F_{BC} = 20KIPS \quad I$$
$$\sum M_C = 0$$
$$(15)(40) + F_{LK}(\frac{20}{\sqrt{425}})(15) - F_{LK}(20)(\frac{5}{\sqrt{425}}) = 0$$
$$F_{LK}\frac{400}{\sqrt{425}} = 15(40)$$
$$F_{LK} = 30.9K \qquad T$$
$$15 + F_{CL}(\frac{15}{25}) - F_{LK}(\frac{5}{\sqrt{425}}) = 0$$
$$15 + F_{CL}(\frac{15}{25}) - 30.9(\frac{5}{\sqrt{425}}) = 0$$
$$F_{CL}(\frac{15}{25}) = -15 + 7.5 = -7.5$$
$$F_{CL} = -12.5K$$
$$F_{CL} = 12.5KC$$



b-bبرش

$$15 - 15 - 10 + \frac{20}{\sqrt{800}}F_{Ej} = 0$$
$$\frac{20}{\sqrt{800}}F_{Ej} = 10$$
$$F_{Ej} = 14.14K \qquad T$$



b-b

حل مسئله ۳

$M_D = 400$

$M_E = 150$

$\sum M_C = 0$

$-10F_y + 14Q + 1000(5) - P(2) = 0$

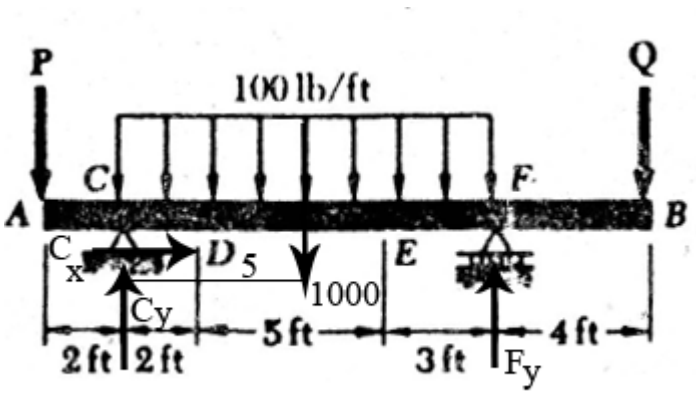
$10F_y = 14Q - 2P + 5000$

$F_y = 1.4Q - 0.2P + 500$

$\sum Fy = 0$

$-P + cy - 1000 + 1.4Q - 0.2P + 500 - \varphi = 0$

$cy = 1.2p - 0.4Q + 500$



$-V_D - 200 + 1.2P - 0.4Q + 500 - P = 0$

$V_D = 0.2P - 0.4Q + 300$

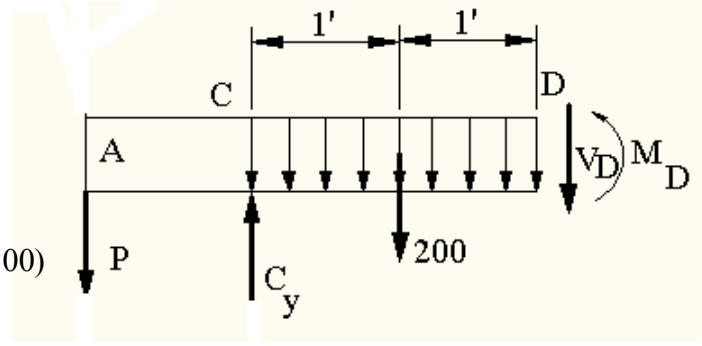
$\sum M_A = 0$

$-M_D + 4(V_D) + 200(3) - 2(1.2P - 0.4Q + 500) = 0$

$M_D = 4(0.2P - 0.4Q + 300) + 600 - 2(1.2P - 0.4Q + 500)$

$400 = 0.8P - 1.6Q + 1200 + 600 - 2.4P + 0.8Q - 1000$

$1.6P + 0.8Q = 400$



$-V_E - 700 - P + 1.2P - 0.4Q + 500 = 0$

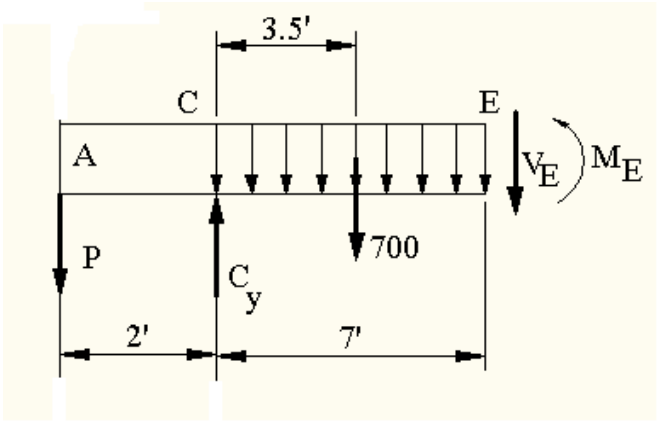
$V_E = 0.2P - 0.4Q - 200$

$\sum M_A = 0$

$-M_E + 9V_E + 700(5.5) - 2(1.2P - 0.4Q + 500) = 0$

$M_E = 1.8P - 3.6Q - 1800 + 3850 - 2.4P + 0.8Q - 1000$

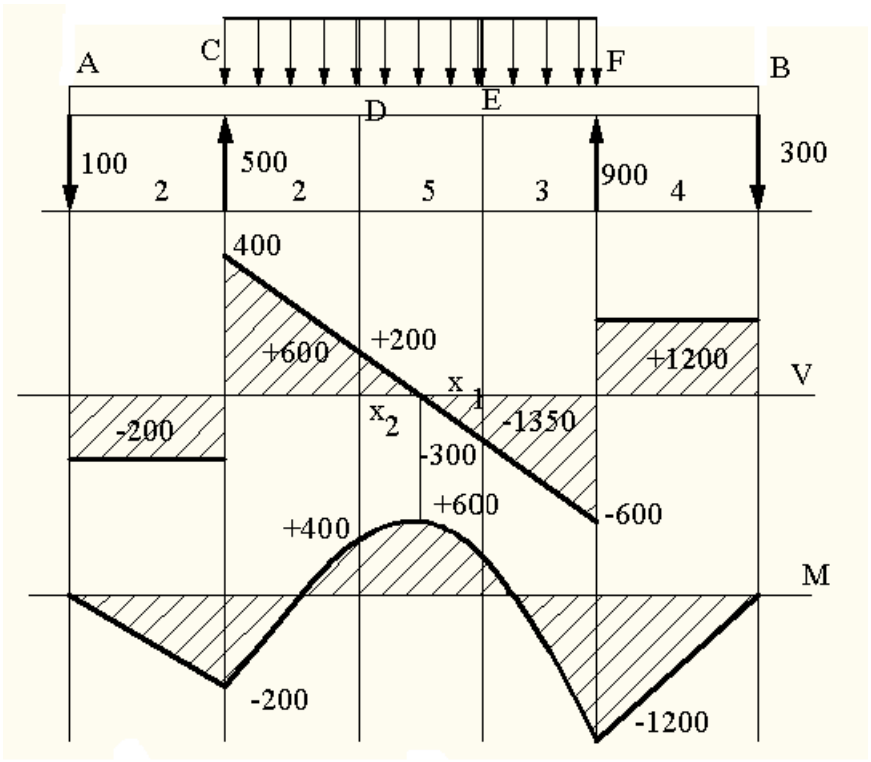
$150 = -0.6P - 2.8Q + 1050$



دو معادله دو مجهول

$$\text{-3.5}\begin{cases} 0.6P + 2.8Q = 900 \\ 1.6P + 0.8Q = 400 \\ -5.6P - 2.8 = -1400 \end{cases} \quad -5P = -500 \quad P = 100$$

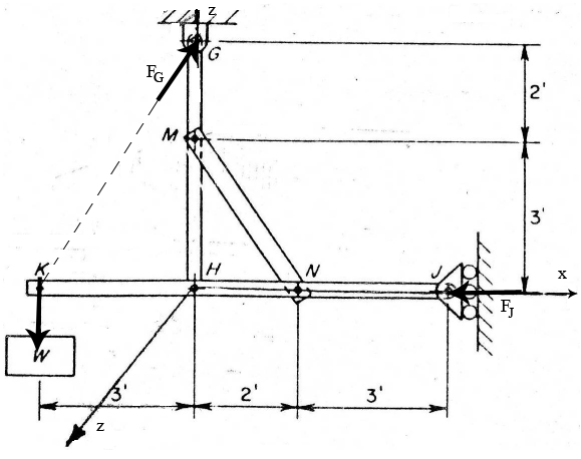
$0.8Q = 400 - 1.6(100) = 240 \quad Q = 300 \quad lb$



$$cy = 120 - 120 + 500$$
$$cy = 500$$
$$Fy = 420 - 20 + 500$$
$$Fy = 900$$
$$V_D = 0.2(100) - 0.4(300) + 300$$
$$V_D = 20 - 120 + 300$$
$$V_D = 200$$
$$V_E = 0.2(100) - 0.4(300) - 200$$
$$V_D = 20 - 120 - 200$$
$$V_E = -300$$
$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{5}{x_1} = \frac{5}{3}$$
$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$$

حل مسئله ۴

سه نیروی F_j و F_G و ۳۰۰ ، متقاربند.



$$\sum F_y = 0$$
$$-300 + F_G(\frac{5}{\sqrt{34}}) = 0$$
$$F_G = 350 \ \ lb$$
$$\begin{cases} G_x = 180 \ \ lb \\ G_y = 300 \ lb \end{cases}$$
$$\sum F_x = 0$$
$$-F_j + F_G(\frac{3}{\sqrt{34}}) = 0$$
$$F_j = 350(\frac{3}{\sqrt{34}}) = 180$$

طبق قانون دو نیرو F_M,F_Nدر یک راستا هستند

$F.B.D \ \ GH$

$From \ \ F.B.D \ \ GH \Rightarrow \sum M_H = 0 \curvearrowleft^+$

$$5(350)(\frac{3}{\sqrt{34}}) - F_M(\frac{2}{\sqrt{13}})(3) = 0$$

$$F_M = 541\ lb$$

$$\begin{cases} M_x = 300\ lb-in \leftarrow \\ M_y = 450\ lb-in \uparrow \end{cases}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_H Sin\alpha + F_M(\frac{3}{\sqrt{13}}) + F_G(\frac{5}{\sqrt{34}}) = 0$$

$$F_H Sin\alpha = -541(\frac{3}{\sqrt{13}}) + 350(\frac{5}{\sqrt{34}})$$

$$F_H Sin\alpha = -450 - 300 = -750$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_H Cos\alpha + F_M(\frac{2}{\sqrt{13}}) + F_G(\frac{3}{\sqrt{34}}) = 0$$

$$F_H Cos\alpha = -541(\frac{2}{\sqrt{13}}) - 350(\frac{3}{\sqrt{34}}) = 0$$

$$F_H Cos\alpha = -300 + 180 = -120$$

$$\tan\alpha = \frac{-750}{-120} = 6.25$$

$$\alpha = 80.9^\circ$$

$$F_H Cos80.9 = -120$$

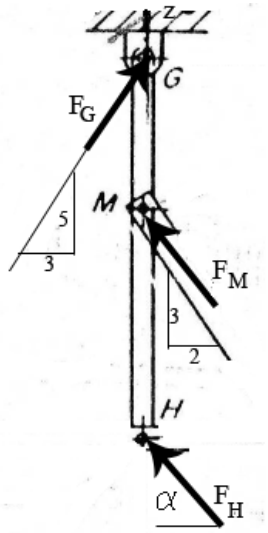
$$F_H = -760\ lb$$

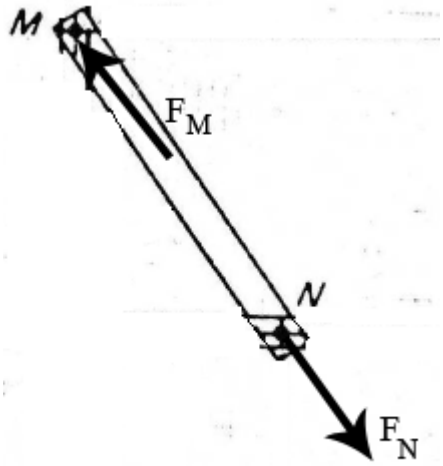
$$F_H = 760 \quad As \quad Shown \quad \alpha = 80.9$$

$$H_x = 760 Cos80.9$$

$$H_x = 120 \rightarrow$$

$$H_y = 760 Sin(80.9) = 750\ lb \downarrow$$





حل مسئله ۵

$$B(0,12,9) \quad D(0,12,0) \quad A(20,0,0) \quad C(10,6,4.5)$$

$$F_B = F_1 i$$

$$W = -12\,j$$

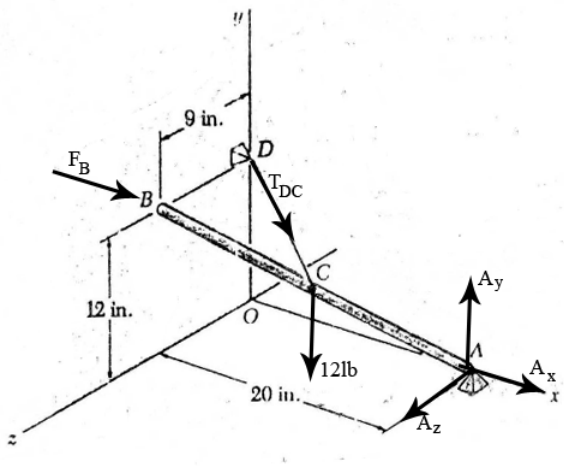
T_{DC} فرض کششی است

$$BA = 20i - 12\,j - 9k \quad CA = 10i - 6\,j - 4.5k$$

$$DC = 10i - 6\,j + 4.5k$$

$$T_{DC} = T_1(\frac{10i - 6\,j + 4.5k}{\sqrt{100 + 36 + 20.25}}) = T_1(\frac{10i - 6\,j + 4.5k}{12.5})$$

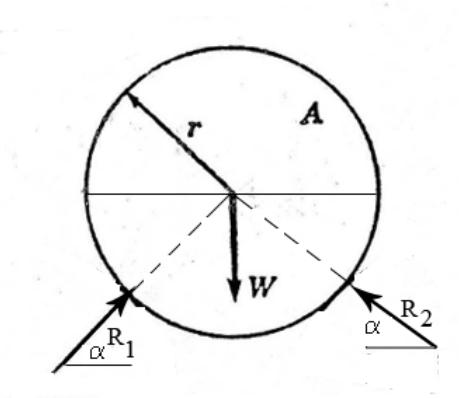
$$T_{DC} = T_1(0.8i - 0.48\,j + 0.36k)$$



$$\sum M_A = 0$$
$$\sum M_A = r_{BA} \times F_B + r_{CA} \times T_{DC} + r_{CA} \times W$$
$$r_{BA} \times F_1 = (20i - 12j - 9k) \times F_1 i$$
$$r_B \times F_1 = -12F_1(-k) - 9F_1(j) = 12F_1 k - 9F_1 j$$
$$r_{CA} \times T_{DC} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 10 & -6 & -4.5 & 10 & -6 \\ 0.8 & -0.48 & 0.36 & 0.8 & -0.48 \end{vmatrix}_{T_1}$$
$$r_{CA} \times T_{DC} = T_1(-2.16i - 3.6j - 4.8k + 4.8k - 2.16i - 3.6j) = T_1(-4.32i - 7.2j)$$
$$r_{CA} \times -w_j = (10i - 6j - 4.5k) \times (-12j) = -120k - 54i$$
$$M_A = 12F_1 k - 9F_1 j + T_1(-4.32i - 7.2j) - 120k - 54i = 0$$
$$k: 12F_1 - 120 = 0 \qquad F_1 = 10 \ lb$$
$$j: -9F_1 - 7.2T_1 = 0$$
$$i: -4.32T_1 - 54 = 0 \qquad T_1 = -12.5 \ lb$$
$$F_B = 10i \qquad 1b$$
$$T_{DC} = 12.5 \qquad 1b$$ در راستای C به D

یا $$T_{DC} = 12.5(-10i + 6j - 4.5k)$$
$$\sum F_y = 0$$
$$Ay - 12 - T_1(0.48) = 0$$
$$Ay - 12 + 12.5(0.48) = 0$$
$$Ay - 12 + 6 = 0 \qquad Ay = 6 \qquad 1b$$
$$\sum F_X = 0 \qquad A_x + F_1 + T_1(0.8) = 0$$
$$A_x + 10 - 12.5(0.8) = 0$$
$$A_x + 10 - 10 = 0 \qquad A_x = 0$$
$$\sum F_z = 0$$
$$A_z + 0.36T_1 = 0$$
$$A_z + 0.36(-12.5) = 0$$
$$A_z = -4.5 \ lb$$
$$A_z = 6j - 4.5k$$

حل مسئله ۶



سیلندر A

$$\sum F_x = 0$$

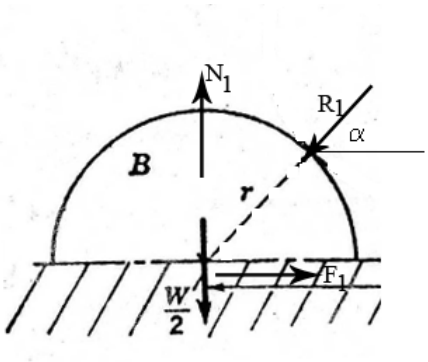
$$R_1 Cos\alpha = R_2 Cos\alpha$$

$$R_1 = R_2 = R$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_1 Sin\alpha + R_1 Sin\alpha - W = 0$$

$$2RSin\alpha = W$$



سیلندر B

$$\sum F_x = 0$$

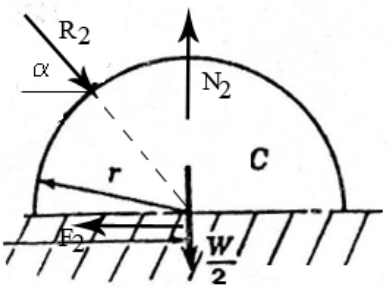
$$RCos\alpha = F_1$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -\frac{W}{2} + N_1 - RSin\alpha = 0$$

$$-\frac{W}{2} + N_1 - \frac{W}{2} = 0 \qquad N_1 = W$$

$$RCos\alpha = \mu_s N_1 = \mu_s W$$

$$\frac{W}{2Sin\alpha} Cos\alpha = \mu_s W$$



سیلندر C

$$CH = \sqrt{4r^2 - \frac{d^2}{4}}$$

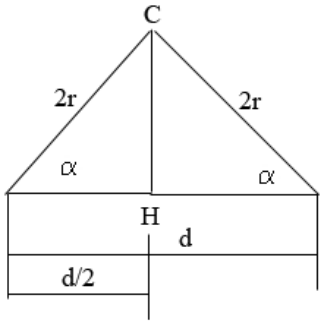
$$\tan\alpha = \frac{CH}{\frac{d}{2}} = \frac{\sqrt{4r^2 - \frac{d^2}{4}}}{\frac{d}{2}} = \frac{1}{2\mu_S}$$

$$4r^2 - \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{4} \times \frac{1}{4u^2 s}$$

$$64r^2u^2s - 4d^2u^2s = d^2$$

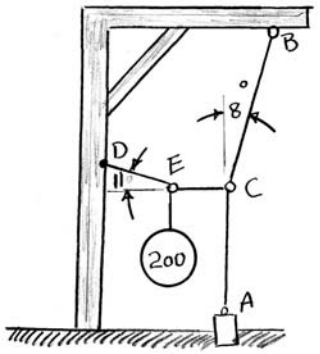
$$64r^2u^2s = d^2(1 + 4u^2 s)$$

$$\boxed{d = \frac{8r\mu_s}{\sqrt{1 + 4\mu^2 s}}}$$



درس: استاتیک
بسم تعالی
تاریخ ۹۵/۱/۲۱
نام و نام خانوادگی:
QUIZ #1
«گروه 1»
مدت: 10 MIN

مطلوبست کشش کابل AC .



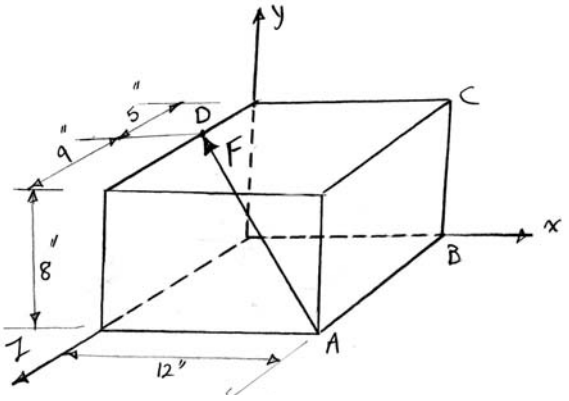
زاویه $\hat{C}=8^\circ$ ، $\hat{E}=11^\circ$

$W=200\,Kg$ و

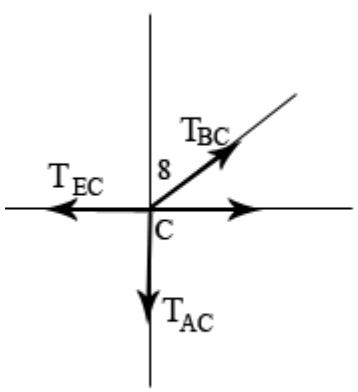
QUIZ #1
تاریخ: ۹۵/۱/۲۲
مدت: 10 MIN

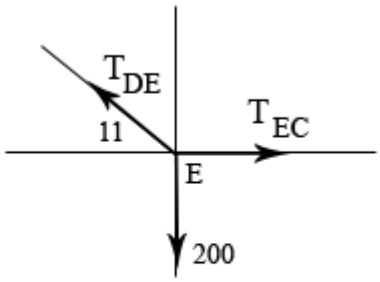
« بسم تعالی »
نام و نام خانوادگی
«گروه ۲»

مطلوبست ممان نیروی $F=510\,lb$ نسبت به نقطه B و خط BC .



حلQuiz صفحه (۴۶۶) شماره ۱ بالایی





$\sum F$

$$T_{EC} = T_{DE} Cos11^{\circ}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad T_{DE} Sin11^{\circ} = 200$$

$$T_{EC} = \frac{200}{Sin11} Cos11 = 200 Cot11^{\circ}$$

گره C

$$\sum F_x = 0 \qquad T_{EC} = T_{BC} Sin8$$

$$\sum F_y = 0 \qquad T_{AC} = T_{BC} Cos8$$

$$\frac{T_{EC}}{T_{AC}} = \tan 8$$

$$T_{AC} = T_{EC} Cot8$$

$$T_{AC} = 200 Cot11 Cot8$$

$$\boxed{T_{AC} = 732.1 kg}$$

حلQuizصفحه(۴۶۶) شماره ۱ پائینی

$F = 510\ \ lb\ \ B(12,0,0)\ \ A(12,0,14)\ \ D(0,8,5)$

$AD = -12i + 8j - 9k$

$\lambda = \dfrac{AD}{\overline{AD}} = \dfrac{-12i + 8j - 9k}{\sqrt{144 + 64 + 81}}$

$\vec{F} = \lambda F = \dfrac{510}{17}(-12i + 8j - 9k)$

$F = -360i + 240j - 270k$

$\overrightarrow{BA} = 14k$

$\vec{M}_B = \vec{r}_{BA} \times \vec{F} = 14k \times (-360 + 240j - 270k)$

$M_B = -5040(j) + 3360(-i) = -5040j - 3360i$

$M_B = -3360i - 5040j$

$\overline{M_B} = 6057\ \ lb$

$\tan\theta = \dfrac{5040}{3360} \qquad \theta = 56.3^\circ$

$\overline{M}_{BC} = \vec{M}_B . \vec{\lambda}_{BC} \qquad \lambda_{BC} = j$

$\overline{M}_{BC} = (-3360i - 5040j).j = -5040 \quad 1b - 1n$

$\overrightarrow{M}_{BC} = -5040j \qquad 1b - 1n$

« بسمه تعالی »

QUIZ #2

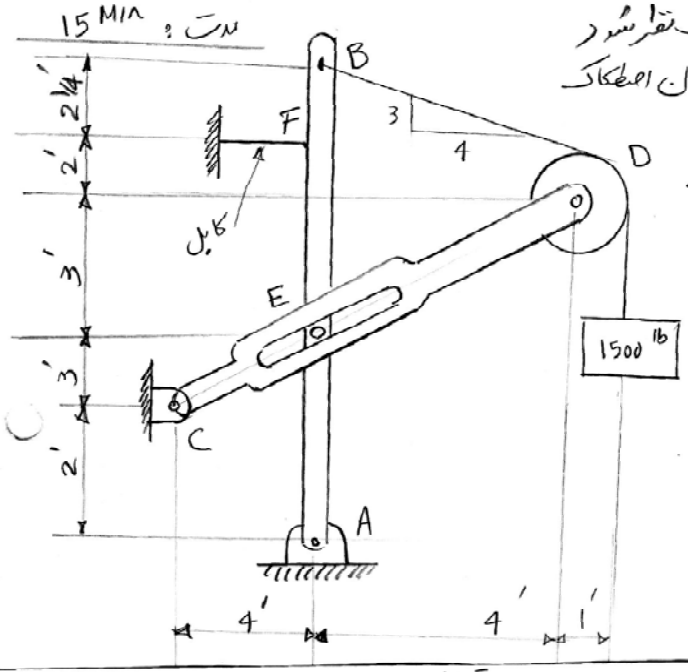
تاریخ : ۸۵/۲/۴

گروه ۱ ، استاتیک

مدت : 15 MIN

نام و نام خانوادگی :

از وزن تمام عضوها صرف نظر شود و محل تماس تمام اعضاء بدون اصطکاک است و اتصال E از نوع پین در شکاف صیقلی است . مطلوبست نیروی عکس العمل در نقطه A .



« بسمه تعالی »

QUIZ #2

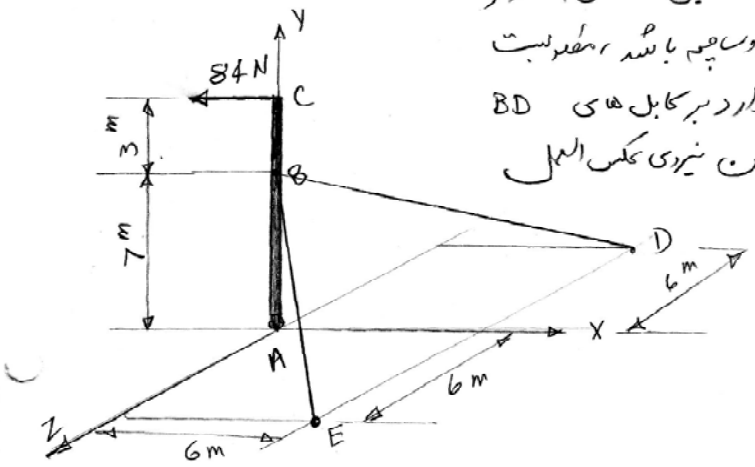
تاریخ : ۸۵/۲/۵

گروه ۲ ، استاتیک

مدت : 15 MIN

نام و نام خانوادگی :

درصورتیکه وزن سازه قابل اغماض باشد و اتصال A از نوع کاسه و ساچمه باشد ، مطلوبست محاسبه نیروی کششی وارد بر کابل های BD و BE و در ضمن تعیین نیروی عکس العمل در نقطه A .



حلQuiz صفحه (۴۶۹)شماره ۲ بالایی

F.B.Dقرقره $T_B = 1500$

$\sum F_x = 0$

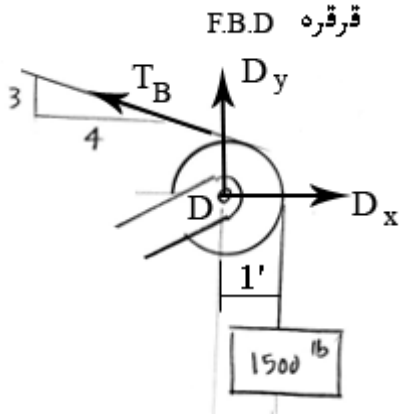
$-T_B(\frac{4}{5}) + D_x = 0$

$D_x = 1500(\frac{4}{5}) = 1200\ lb \rightarrow$

$\sum F_y = 0$

$-1500 + D_y + T_B(\frac{3}{5}) = 0$

$-1500 + D_y + 1500(\frac{3}{5}) = 0 \qquad D_y = 600\ lb \uparrow$



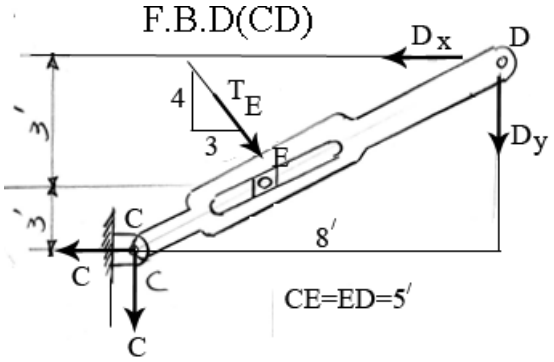
F.B.D(CD) شیبCD برابر۳/۴ است و چون نیروی T_Eعمود برCD است،پس شیب آن۴/۳ میشود.

CD $\sum M_C = 0$

$5T_E + 8(D_y) - 6D_x = 0$

$5T_E + 8(+600) - 6(1200) = 0$

$T_E = 480\ lb$



F.B.D(AB)

$\sum F_y = 0$

$A_y + \frac{4}{5}T_E - \frac{3}{5}T_B = 0$

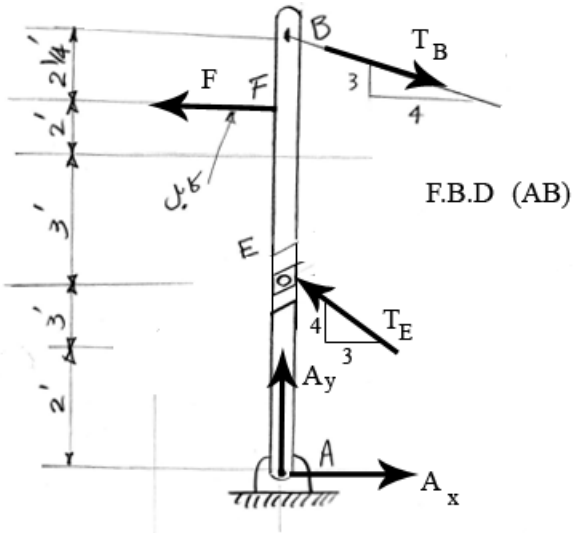
$A_y + \frac{4}{5}(480) - \frac{3}{5}(1500) = 0$

$\sum F = 0$

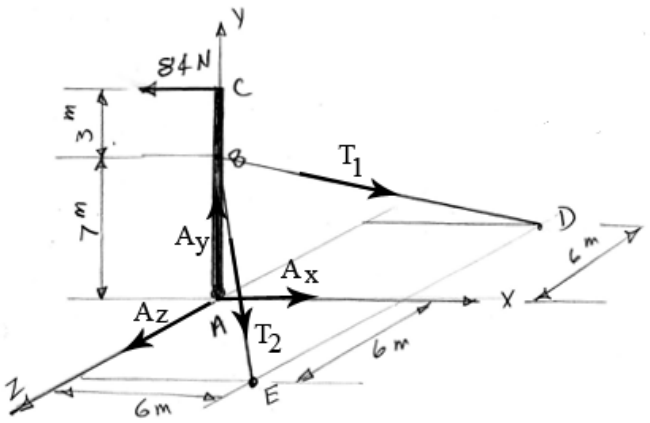
$-(A_x)(10) + 5T_E(\frac{3}{5}) + T_B(\frac{4}{5})(2.25) = 0$

$A_y = 516\ lb \uparrow$

$10A_x = 5 \times 480(\frac{3}{5}) + 1500(2.25)(\frac{4}{5})$



حلQuiz صفحه(۴۶۹)شماره ۲ پائینی



$B(0,7,0)$

$D(6,0,-6)$

$E(6,0,6)$

$BD = 6i - 7j - 6k$

$BD = \frac{T_1}{11}(6i - 7j - 6k)$

$BE = 6i - 7j + 6k$

$BE = \frac{T_1}{11}(6i - 7j + 6k)$

$\sum M_A = 0$

$$10j \times -84i + 7j \times \frac{T_1}{11}(6i - 7j - 6k) + 7j \times \frac{T_2}{11}(6i - 7j + 6k) = 0$$

$$-840(-k) + \frac{42}{11}T_1(-k) - \frac{42}{11}T_1(+i) + \frac{42}{11}T_2(-k) + \frac{42}{11}T_2(+i) = 0$$

i: $-\frac{42}{11}T_1 + \frac{42}{11}T_2 = 0 \qquad T_1 = T_2$

k: $840 - \frac{42}{11}T_1 - \frac{42}{11}T_2 = 0 \qquad 840 = \frac{2 \times 42}{11}T_1 \qquad T_1 = T_2 = 110N$

$\sum F_x = 0 \qquad Ax + \frac{T_1}{11}6 + \frac{6}{11}T_2 - 84 = 0$

$Ax + 120 - 84 = 0 \qquad A_x = -36N \quad \Rightarrow \quad A_x = 36N \leftarrow$

$\sum F_y = 0 \qquad Ay - \frac{7}{11}T_1 - \frac{7}{11}T_2 = 0$

$Ay = \frac{2 \times 7}{11} \times 110 = 140 \quad N \uparrow$

$\sum F_z = 0 \qquad Az + \frac{6}{11}T_1 - \frac{6}{11}T_2 = 0$

$Az = 0$

بسمه تعالی

QUIZ #3

استاتیک

نام و نام خانوادگی

تاریخ ۷۸/۳/۱

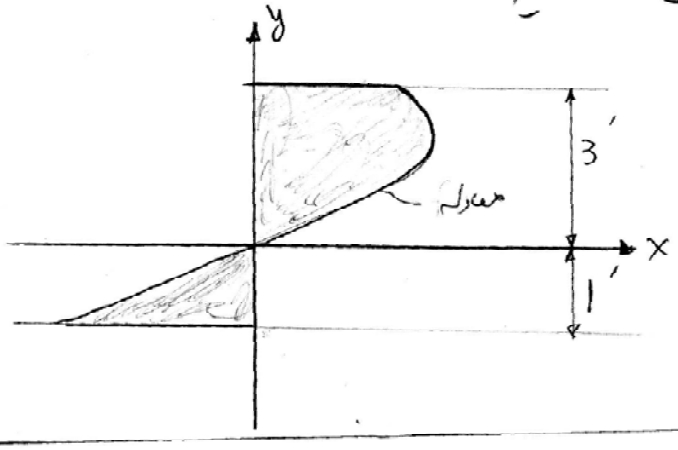
مدت : 15 MIN

گروه : ۱

مطلوبست طول مرکز ثقل شکل زیر:

$\bar{x} = ?$

معادله : $x = 4y - y^2$



بسمه تعالی

QUIZ #4 استاتیک

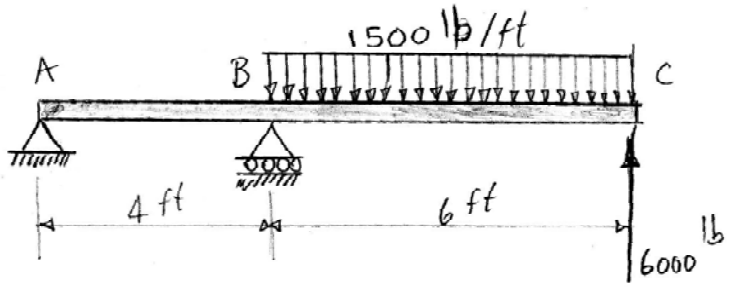
نام و نام خانوادگی :

تاریخ ۷۸/۳/۱۶

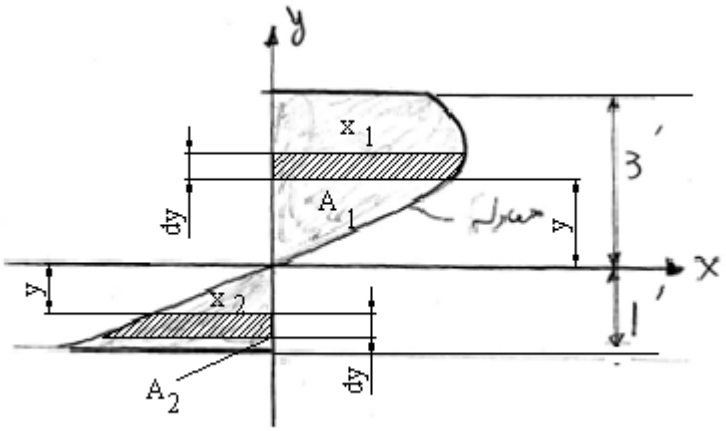
مدت : 15 MIN

گروه 1&2

مطلوبست رسم دیاگرام نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر شکل زیر.



حلQuizصفحه(۴۷۲) شماره ۳



$$x_1 el = \frac{x_1}{2}$$

$$x_2 el = \frac{x_2}{2} \qquad x = 4y - y^2$$

$$dA = dA_1 + |dA_2|$$

$$dA = \int x_1 dy + \left|\int x_2 dy\right|$$

$$A = \int_0^3 (4y - y^2)dy + \left|\int_{-1}^0 (4y - y^2)dy\right|$$

$$A = \left[2y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^3 + \left|\left[2y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^0\right|$$

$$A = 18 - 9 + \left|\left[0 - 2 + \frac{1}{3}(-3)\right]\right|$$

$$A = 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3}\ ft^2$$

$$\bar{x}.A = \int X_1 el dA_1 - \int X_2 el dA_2$$

$$\bar{x}.A = \int_0^3 \frac{x}{2} x dy - \int_{-1}^0 \frac{x}{2} x dy$$

$$\bar{x}(\frac{34}{3}) = \frac{1}{2}\int_0^3 (16y^2 + y^4 - 8y^3) - \frac{1}{2}\int_{-1}^0 (16y^2 + y^4 - 8y^3)dy$$

$$\bar{x}.(\frac{34}{3}) = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - 2y^4\right]_0^3 - \frac{1}{2}\left[\frac{16}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - 2y^4\right]_{-1}^0$$

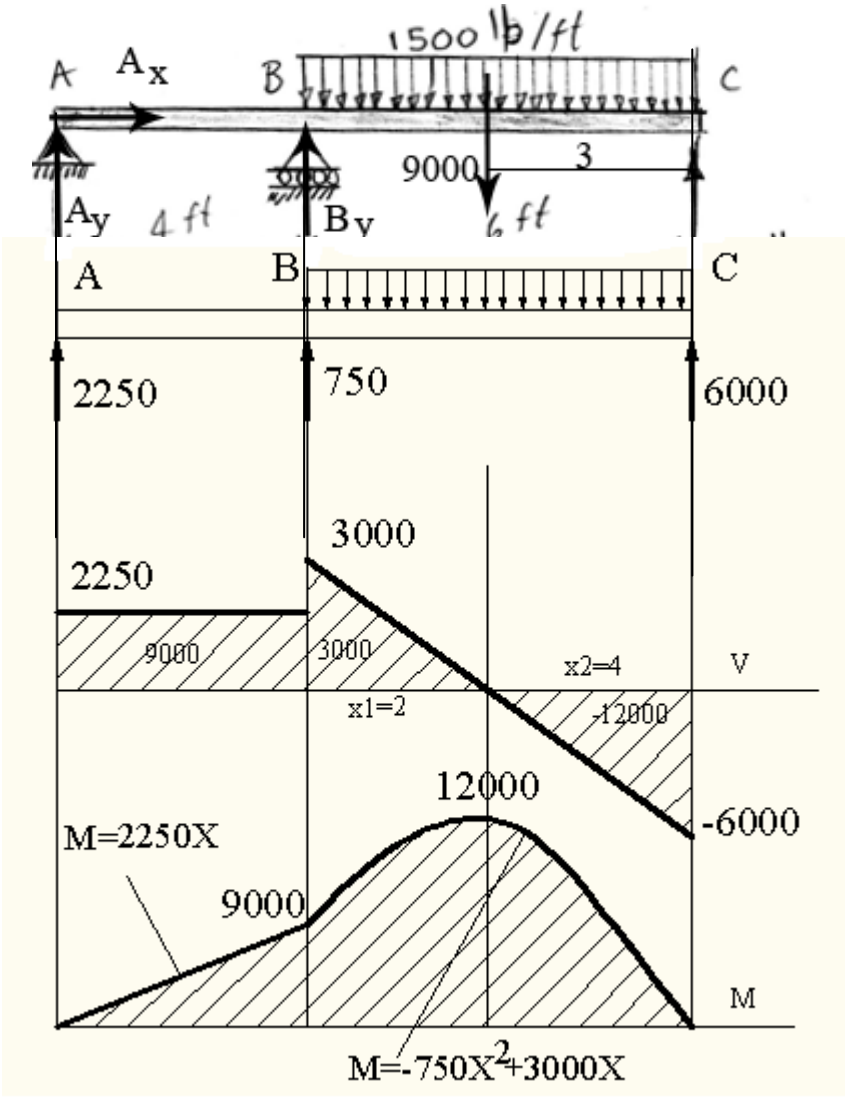
$$\bar{x}.(\frac{34}{3}) = \frac{1}{2}[144 + 48.6 - 162] - \frac{1}{2}\left\{0 - \left[-\frac{16}{3} - \frac{1}{5} - 2\right]\right\}$$

$$\bar{x}.(\frac{34}{3}) = \frac{1}{2}[30.6] - \frac{1}{2}[+7.53] = 15.3 - 3.76$$

$$\bar{x} = \frac{3}{34}(11.54) = 1.018\ ft$$

حلQuiz صفحه(۴۷۲)شماره ۴

$$\sum M_A = 0$$
$$-6000(10)+9000(7)$$
$$-By(4)=0$$
$$4By = 63000-60000$$
$$By = 750$$
$$Ay+By+6000-9000=0$$
$$Ay = 2250$$
$$Ax = 0$$
$$0<x<4$$
$$V_B - V_A = 0$$
$$V_A = 2250$$
$$x = 4$$
$$V_B = 2250+750 = 3000$$
$$4<x<10$$
$$V_c - V_B = -9000$$
$$V_C = -6000+6000$$
$$V_C = 0$$
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{3000}{6000} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{6}{x_2} = \frac{3}{2}$$
$$x_2 = 4 \qquad x_1 = 2$$
$$V = -1500x+3000$$
$$M = -750x^2+3000x$$



بسمه تعالی

QUIZ #3

استاتیک

نام و نام خانوادگی :

تاریخ ۷۵/۴/۲

مدت : 15 MIN

گروه : ۲

مطلوبست طول مرکز ثقل شکل زیر :

$\bar{x}=?$

معادله : $y=x^2-2x$

« به نام خدا »

QUIZ #1

گروه یک

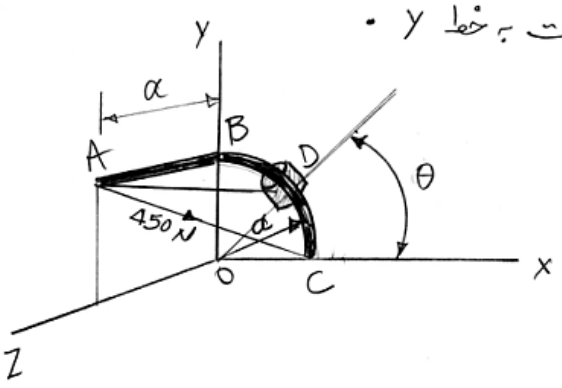
استاتیک

۷۵/۸/۸

مدت : 15MIN

نام و نام خانوادگی :

میله ABC از دو قطعه راست AB و خمیده BC تشکیل یافته ، میدانیم که $\theta=45^\circ$ و کشش سیم AC ، 450 N است ، معین کنید اولاً زاویه ایکه سیمهای AC و AD تشکیل می دهند و ثانیاً گشتاور نیروی AC نسبت به خط y .



شعاع قوس BC برابر α

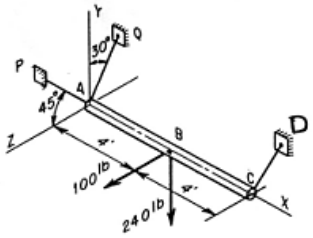
QUIZ #1
گروه دو

« به نام خدا »
استاتیک

۷۵/۸/۹
مدت 20 Min

نام و نام خانوادگی:

میله AC مشکل زیر بوسیله سه کابل AP و AQ و CD نگهداری می شوند ، نقاط P و Q و A در صفحه XZ هستند ، نیروی 100 lb موازی محور Z ها است ، اگر از وزن میله صرف نظر کنیم مطلوبست تعیین جهت و مقدار نیرو در کابل CD .



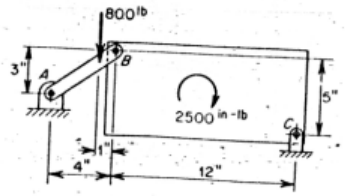
QUIZ #2
گروه یک

« به نام خدا »
استاتیک

۷۵/۸/۲۹
مدت 20 Min

نام و نام خانوادگی:

مطلوبست نیروی افقی و عمودی وارد بر پین B روی عضو BC . از وزن تمام عضوها صرف نظر کنید .

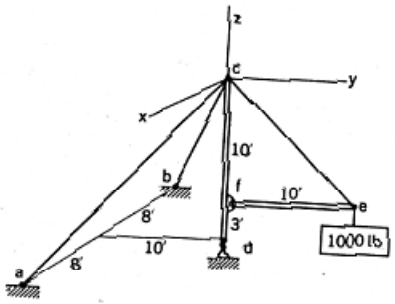


QUIZ #2 | «به نام خدا» | ۷۸/۸/۳۰

گروه دو | استاتیک | مدت: 30 Min

نام و نام خانوادگی:

تیر عمودی cd که روی کاسه دو ساچمه (d) قرار گرفته بوسیله ۳ کابل ac و bc و ce مطابق شکل در حالت تعادل می باشد، مطلوبست کشش در کابل ac و bc و ce و نیز مطلوبست عکس العمل نیروها در نقطه d

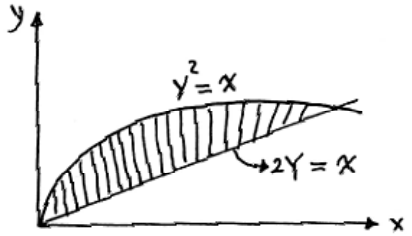


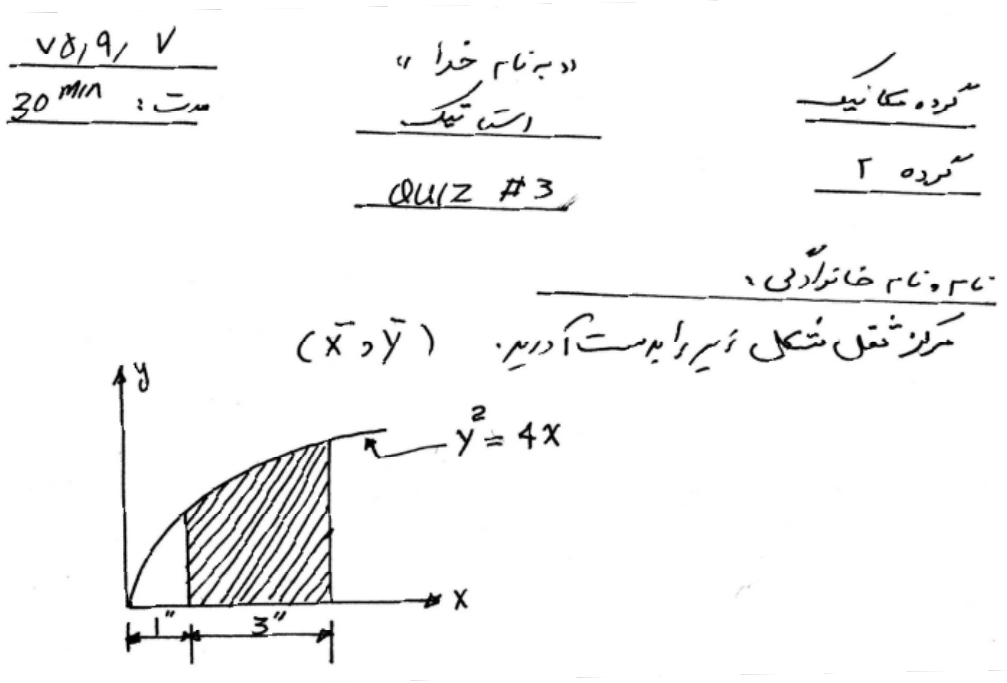
گروه مکانیک ۱ | «به نام خدا» | ۷۵/۹/۶

QUIZ #3 | استاتیک | مدت: 20 Min

نام و نام خانوادگی:

مرکز ثقل شکل زیر را بدست آورید. ($\bar{x}$ و $\bar{y}$)





حل Quiz صفحه(۴۷۵) شماره ۳، تاریخ(۷۵/۳/۲)

$$y = x^2 - 2x$$

$$dA = |dA_1| + dA_2$$

$$X_{el} = x$$

$$A = \left|\int_0^2 y dx\right| + \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)dx$$

$$A = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^2\right| + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0}$$

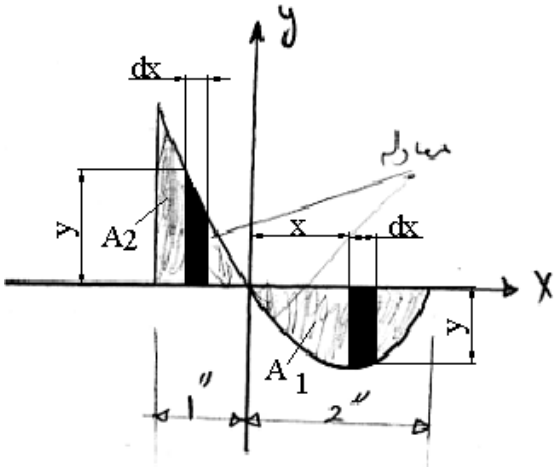
$$A = \left|\frac{8}{3} - 4\right| + \left[0 - (-\frac{1}{3} - 1)\right]$$

$$A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\bar{x}.A = \int x_1 dA_1 - \int x_2 dA_2$$

$$\bar{x}.(\frac{8}{3}) = \int_0^2 (x^3 - 2x^2)dx - \int_{-1}^{0} (x^3 - 2x^2)dx$$

$$\bar{x}.(\frac{8}{3}) = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$$



$$\bar{x}.(\frac{8}{3}) = (4-\frac{16}{3}) - \left[0-(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}(-1))\right]$$
$$\bar{x}.(\frac{8}{3}) = \frac{-4}{3}+\frac{11}{12} = \frac{-16+11}{12} = \frac{-5}{12}$$
$$\bar{x} = -\frac{5}{12}\times\frac{3}{8} = -0.156$$
$$\boxed{\bar{x} = -0.156}$$

حل Quiz صفحه(۴۷۵) شماره ۱، تاریخ(۷۵/۸/۸)

$$C(0,0,0) \quad , A(0,a,a) \quad , D(a\cos 45, a\sin 45, 0)$$
$$\overrightarrow{AC} = ai - aj - ak$$
$$\overrightarrow{AD} = a\cos 45 i + (a\sin 45 - a) - ak$$
$$\overline{AC} = \sqrt{3a^2} \quad , \overline{AD} = \sqrt{a^2\cos^2 45 + a^2\sin^2 45 + a^2 - 2a^2\sin^2 45 + a^2}$$
$$\overline{AD} = \sqrt{3a^2 - 2a^2\sin 45}$$
$$\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AC} = \overline{AD} \bullet \overline{AC}\cos\theta$$
$$a^2\cos^2 45 - a^2\sin^2 45 + a^2 + a^2 = (\sqrt{3a^2})(\sqrt{3a^2 - 2a^2\sin 45})\cos\theta$$
$$2a^2 = a\sqrt{3}.a\sqrt{3-\sqrt{2}}\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{3-\sqrt{2}}}$$
$$\theta = 23.5^\circ$$

$$\vec{F} = \overrightarrow{\lambda_{AC}}\overline{F} = \frac{450a(i-j-k)}{a\sqrt{3}} = 260(i-j-k)$$
$$\overrightarrow{r_{OC}} = ai$$
$$\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{r_{OC}} X \vec{F}$$
$$\overrightarrow{M}_C = \vec{r}_{OC} x \vec{F} = 260\begin{vmatrix} i & j & k & j & j \\ a & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (ak + aj)(260)$$

$$\overrightarrow{M_Y} = \lambda_J \bullet M_C = J \bullet (ak + aj) = 260a$$

حل Quiz صفحه(۴۷۶) شماره ۱، تاریخ(۷۵/۸/۹)

$C(8,0,0)$ $D(x,y,z)$

$i(x-8)=0 \Rightarrow x=8$

$CD \rightarrow$ جهت فرضی مثبت

$CD = yi + z\vec{k}$

$F_{CD} = \lambda_{CD} T = T.\dfrac{yj+zk}{\sqrt{y^2+z^2}}$

$\sum M_A = 0$

$(100)(4)(-j) + 240(4)(-k) + \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_{CD} = 0$

$\vec{r}_{AC} \times F_{CD} = 8i \times (\dfrac{yj+zk}{\sqrt{y^2+z^2}})T = 8i \times (Tyj + Tzk)$

$(100)(4)(-j) + 240(4)(-k) + \dfrac{8Ty}{\sqrt{y^2+z^2}}k + \dfrac{8Tz}{\sqrt{y^2+z^2}}(-j) = 0$

$J \rightarrow -400 - 8T_z \dfrac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} = 0$ $\quad -\dfrac{z}{y} = \dfrac{400}{4(240)}$

$K \rightarrow -240(4) + 8T_y \dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} = 0$ $\quad \dfrac{z}{y} = -\dfrac{5}{12}$

$-400 = 8T \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{y^2}{z^2}}} = 8T \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{124}{25}}}$

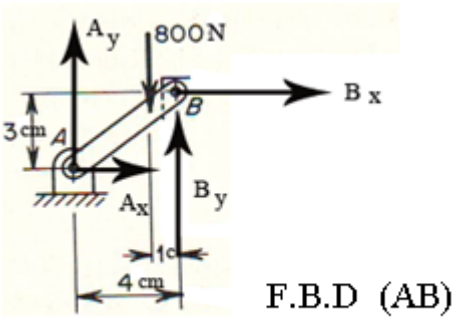
$-400 = 8T \dfrac{5}{13}$ $\quad T = -130$ $\quad 1b$

$F_{CD} = -130.\dfrac{j+\dfrac{z}{y}k}{\sqrt{1+\dfrac{y^2}{z^2}}} = -130.\dfrac{j+\dfrac{5}{12}k}{\sqrt{1+\dfrac{25}{144}}}$

$F_{CD} = -130.\dfrac{j+\dfrac{5}{12}k}{\dfrac{13}{12}} = -10(12j-5k)$

$\boxed{F_{CD} = -120J + 50k}$

حل Quiz صفحه(۴۷۶)شماره ۲، تاریخ(۷۵/۸/۲۹)

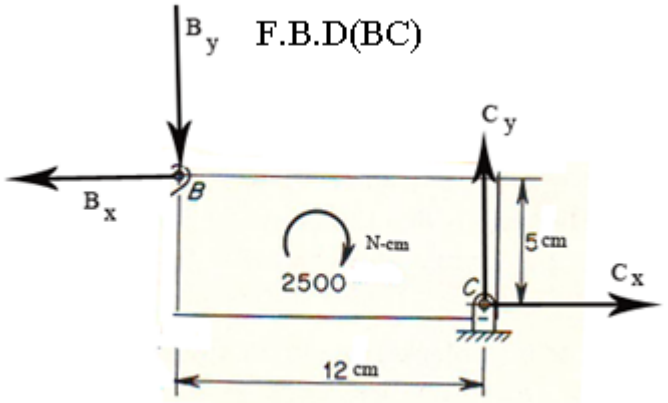


AB $\sum M_A = 0$

$$-4By + 3(Bx) + 3(800) = 0$$
$$-3Bx + 4By = 2400$$

BC $\sum M_c = 0$

$$-12By - 5(Bx) + 2500 = 0$$
$$48y - 3Bx = 2400$$
$$12By + 5Bx = 2500$$
$$-12By + 9Bx = -3(2400)$$
$$14Bx = 2500 - 7200 = -4700$$
$$Bx = -336 \quad lb$$
$$4By = 2400 + 3(-336) = 1392$$
$$By = 384 \quad lb$$
$$B = 336i - 348j$$



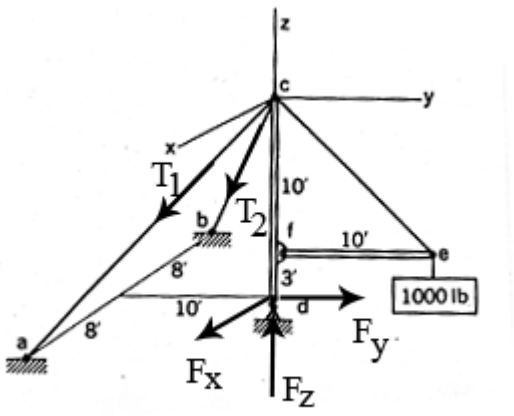
حل Quiz صفحه۴۷۷)شماره ۲، تاریخ(۷۵/۸/۳۰)

$c(0,0,0)$ $d(0,0,-13)$

$e(0,10,-10)$ $a(8,-10,-13)$

$b(-8,-10,-13)$

$$cb = -8i - 10j - 13k$$
$$ce = 10j - 10k$$
$$T_{ca} = \frac{T_1}{\sqrt{333}}(8i - 10j - 13k)$$
$$T_{cb} = \frac{T_2}{\sqrt{333}}(-8i - 10j - 13k)$$
$$T_{ce} = \frac{T_3}{\sqrt{333}}(10j - 10k)$$



$$\sum M_d = 0$$

$$r_1 \times T_1 + r_2 \times T_2 + (10)(1000)(-i) = 0$$

$$-13k \times (\frac{T_1}{\sqrt{333}})(8i - 10j - 13k) - 13k \times (\frac{T_2}{\sqrt{333}})(-8i - 10j - 13k) + 10(1000)(-i) = 0$$

$$\frac{(13)(8)(T_1)}{\sqrt{333}} j - \frac{(13)(10)(T_1)}{\sqrt{333}}(-i) + \frac{(13)(-8)(T_2)}{\sqrt{333}}(j) - \frac{(10)(13)(T_2)}{\sqrt{333}}(-i) - 10000i = 0$$

i $$\frac{130T_1}{\sqrt{333}} + \frac{130T_2}{\sqrt{333}} - 10000 = 0$$

j $$T_1 = T_2$$

$$T_1 + T_2 = \frac{(10000)(\sqrt{333})}{130}$$

$$2T_2 = 2T_1 \frac{(10000)(\sqrt{333})}{130}$$

$$\boxed{T_1 = 701.85\ lb}$$

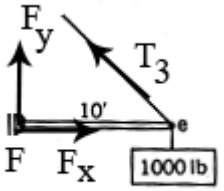
$$\boxed{T_2 = 701.85\ lb}$$

$$\sum M_F = 0$$

$$10j \times \frac{T_3}{\sqrt{200}}(10j - 10k) + 10j \times (-1000k) = 0$$

$$\frac{-100T_3}{\sqrt{200}} i + 10000i = 0$$

$$\boxed{T_3 = 1414.2\ lb}$$



$$\sum F_x = 0$$

$$F_x + \frac{8T_1}{\sqrt{333}} - \frac{8T_2}{\sqrt{333}} = 0$$

$$F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_y - \frac{10T_1}{\sqrt{333}} - \frac{10T_2}{\sqrt{333}} = 0$$

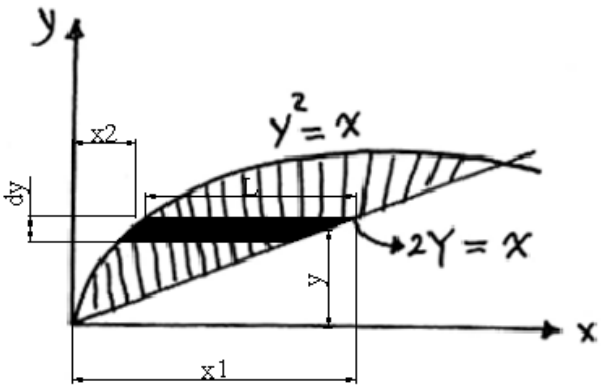
$$F_y = 769.2\ lb$$

$$\sum F_z = 0$$

$$F_z - \frac{13T_1}{\sqrt{333}} - \frac{13T_2}{\sqrt{333}} - 1000 = 0$$

$$F_z = 1000 + \frac{(13)(2)(701.85)}{\sqrt{333}} \qquad F_Z = 2000\ lb \qquad \boxed{F = 769.2j + 2000k}$$

حل Quiz صفحه(۴۷۷)شماره ۳، تاریخ(۷۵/۹/۶)



$y^2 = 2y \qquad y = 2$

$x = 4$

$Yel = y$

$dA = Ldy \qquad L = x_1 - x_2$

$$X_{el} = x_2 + \frac{L}{2} = x_2 + \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$A = \int dA = \int Ldy = \int (x_1 - x_2)dy$$

$$A = \int_0^2 (2y - y^2)dy = \left[y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^2$$

$$A = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\bar{x}A = \int X_{el}dA = \int \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)dy$$

$$\bar{x}A = \int_0^2 \frac{1}{2}(4y^2 - y^4)dy = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 \right]_0^2$$

$$\bar{x}A = \frac{1}{2}\left[\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right] = \frac{1}{2}\left[\frac{160 - 96}{15} \right]$$

$$\bar{x}(\frac{4}{3}) = \frac{1}{2}(\frac{64}{15}) = \frac{32}{15}$$

$$\bar{x} = \frac{32}{15} \times \frac{3}{4} = \frac{8}{5} \qquad \boxed{\bar{x} = \frac{8}{5}}$$

$$\bar{y}A = \int YeldA = \int yLdy$$

$$\bar{y}A = \int_0^2 y(2y - y^2)dy = \int_0^2 (2y^2 - y^3)dy$$

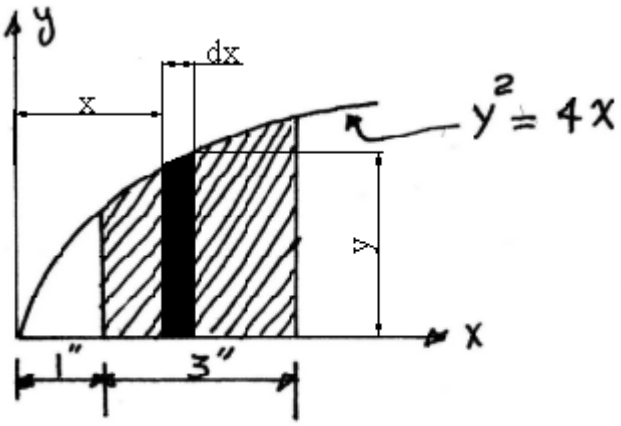
$$\bar{y}A = \int_0^2 (2y^2 - y^3)dy = \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 \right]_0^2$$

$$\bar{y}A = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

$$\bar{y}(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3} \qquad \boxed{\bar{y} = 1}$$

حل Quiz صفحه(۴۷۸)شماره ۲، تاریخ(۷۵/۹/۷)

$$dA = ydx$$
$$Xel = x$$
$$Yel = \frac{y}{2}$$
$$A = \int ydx = \int_1^4 (4x)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$A = \int_1^4 2x^{\frac{1}{2}} dx = 2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$A = \frac{4}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{4}{3}(8-1) = \frac{28}{3}$$
$$\bar{Ax} = \int XeldA = \int_1^4 (x)(ydx)$$
$$\bar{Ax} = 2\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^4 = \frac{4}{5}\left[4^{\frac{5}{2}} - 1\right]$$
$$\bar{Ax} = \frac{4}{5}(32-1) = \frac{124}{5}$$
$$\bar{x} = \frac{124}{5} \times \frac{3}{28} = 2.65 \qquad \boxed{\bar{x} = 2.65"}$$
$$\bar{yA} = \int XeldA = \int_1^4 \frac{y}{2} ydx = \frac{1}{2}\int_1^4 y^2 dx$$
$$\bar{yA} = \frac{1}{2}\int_1^4 [4xdx] = 4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^4$$
$$\bar{yA} = 16 - 1 = 15$$
$$\bar{y} = 15 \times \frac{3}{28} = \frac{45}{28} \qquad \boxed{\bar{y} = 1.6"}$$



گروه مهندسی صنایع (به نام خدا)

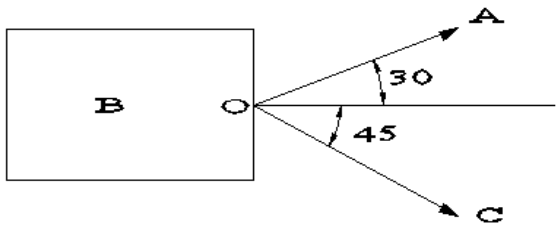
تاریخ : ۸۶/۲/۳

نام ونام خانوادگی..... مدت : ۴ ساعت

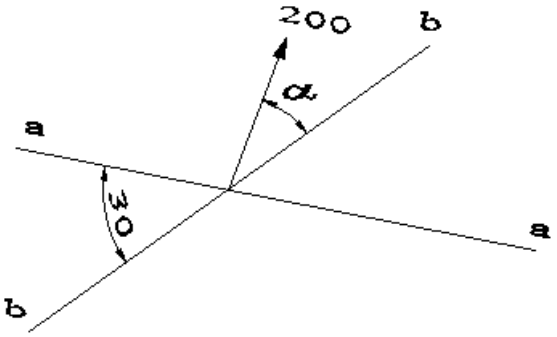
امتحان قوه ای استاتیک

دانشگاه مهر آستان

۱-قایق بزرگ B بوسیله دو قایق کوچک A,C مطابق شکل کشیده می شوند.کشش در کابل OA برابر ۴۰۰۰ پوند و برایند نیروهای وارد در نقطه O در امتداد محور قایق بزرگ قرار دارد، بروش مثلثاتی معین کنید ، (a) :کشش وارد بر کابل OC و(b): مقدار برایند وارد از طرف این دو نیروبر نقطهO را.

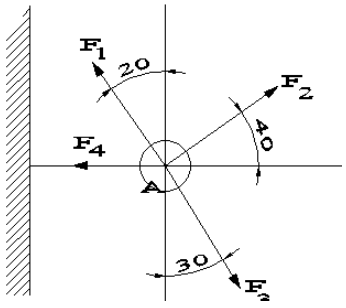


۲-نیروی F به مقدار 200N را به دو مولفه در امتداد محورهای a-a و b-b تجزیه کنید. زاویه α را محاسبه کنید. می دا نیم مولفه F در امتداد a-a برابر 50N است.

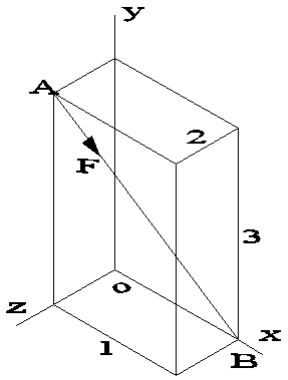


۳-مطلوبست برایند نیروهای وارد بر گیره A وجهت آن.

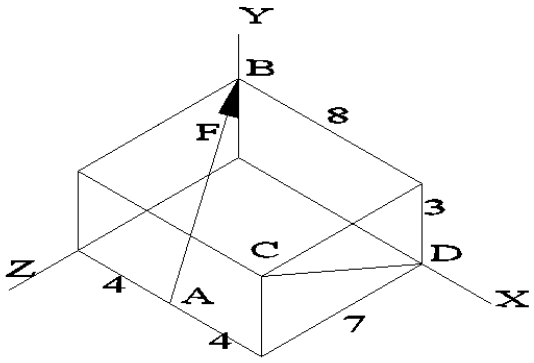
F_1=400 N F_2=100 N F_3=500 N F_4=250 N



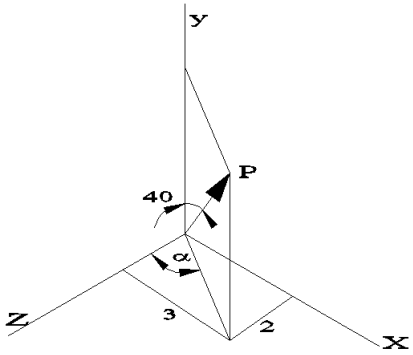
۴-نیروی F=10KNدر امتداد قطرAB مکعب مستطیل شکل زیر وارد می شود.مطلوبست بیان بردارF بر حسب I,j,k



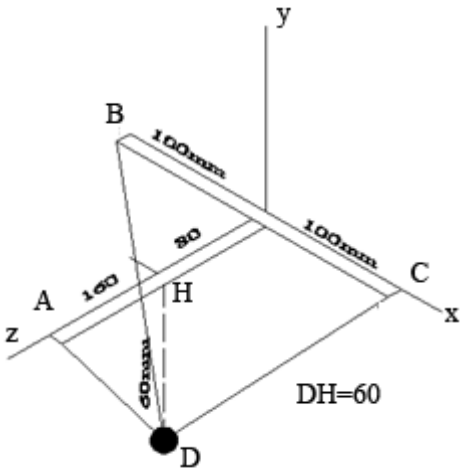
۵- اگر مقدار نیروی F برابر با10KN باشد تصویر بردارF برروی CD را تعین کنید.



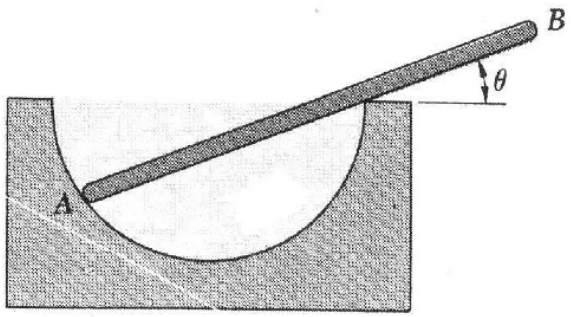
۶-در صورتیکه بردار نیروی P=60N با محورy زاویه 40درجه بسازدو مختصات تصویر نقطه انتهایی بردار بر روی صفحه xzبرابر ۳ در جهتx و ۲ در جهتz باشد ،مولفه های بردار P را در امتداد x,y,z حساب کنید. و زاویه بردارP را با محورz,x حساب کنید



۷-وزنه D به وزن15Kg بوسیله سه سیم,AD,BD,DC مطابق شکل نگاهداری می شود معین کنید کشش در هر سیم را.هم چنین زاویه BDCرا بدست بیآورید.

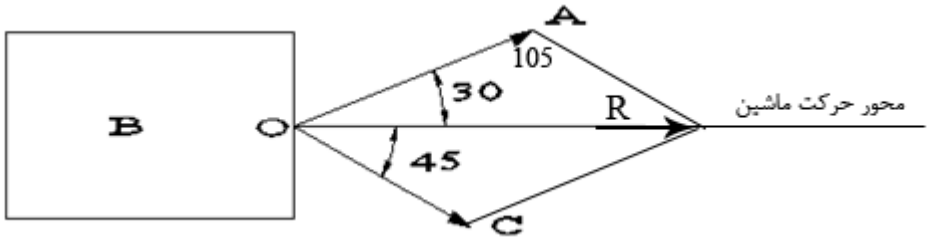


۸- میله متجانس AB طول ۳R در داخل طشت. نیمکره‌ای بشعاع R مطابق شکل قرار گرفته. از اصطکاک صرف نظر می‌شود. معین کنید زاویه θ نظیر حالت تعادل را.



موق باشید.
محمد جواد تسکینی

حل مسئله ۱



$T_{OA} = 4000\ lb$

$T_{OC} = ?$

$R = ?$

$A = 180 - 45 - 30 = 105$

$$\frac{R}{\sin 105} = \frac{T_{OC}}{\sin 30} = \frac{T_{OA}}{\sin 45}$$

$$T_{OC} = Sin30 \times \frac{4000}{Sin45}$$

$$T_{OC} = 2828.4 \quad lb$$

$$R = Sin105 \times \frac{T_{OC}}{Sin30}$$

$$R = Sin105 \times \frac{2828.4}{Sin30} = 5464.0$$

$$R = 5464 \ \ lb$$

می توان از قضیه متوازی الاضلاع، R را چک کرد

$$R^2 = 2828.4^2 + 4000^2 + 2(4000)(2828.4)Cos75\,.$$

$$R^2 = 29856196.86$$

$$R = 5464 \ \ lb$$

حل مسئله ۲

$$Sin\alpha = \frac{25}{200}$$

$$\alpha = 7.2^{\circ}$$

$$\frac{F_{bb}}{Sin(150 - 7.2)} = \frac{200}{Sin30}$$

$$F_{bb} = 400Sin(142.8) = 242 \quad lb$$

$F_{aa} = 50\ N$

$B_1 = 180 - 30 - \alpha = 150 - \alpha$

$$\frac{F_{bb}}{Sin(150 - \alpha)} = \frac{F_{aa}}{Sin\alpha} = \frac{R}{Sin30}$$

$$\frac{200}{0.5} = \frac{50}{Sin\alpha}$$

حل مسئله ۳

$F_1 = 400N \quad F_2 = 100N \quad F_3 = 500N \quad F_4 = 250N$

نیرو	مقدار	F_x	F_y
F_1	$400N$	$-400Sin20$ -136.8	$+400Cos20$ $+375.9$
F_2	$100N$	$100Cos40$ $+76.6$	$100Sin40$ $+64.3$
F_3	$500N$	$500Sin30$ $+250$	$-500Cos30$ -433
F_4	$250N$	-250	0
		$R_x = \sum F_x$ $R_x = -60.2$	$R_y = \sum F_y$ $R_y = -7.2$

$\vec{R} = R_{xi} + R_{yj}$

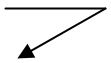
$\vec{R} = -60.2i - 7.2j$

$\tan\theta = \dfrac{-7.2}{-60.2} = 0.119$

$\theta = 6.82^\circ$

$R = \dfrac{7.2}{Sin6.82} = 60.6$

$\boxed{R = 60.6N}$



حل مسئله ۴

$F = 10KN$

$A(0,3,2)$

$B(1,0,0)$

$\overrightarrow{AB} = i - 3j - 2k$

$\lambda_{AB} = \dfrac{i-3j-2k}{\sqrt{1+9+4}} = \dfrac{i-3j-2k}{3.74}$

$F_{AB} = (10)\lambda_{AB} = \dfrac{10}{3.74}(i-3j-2k)$

$F_{AB} = 2.67i - 8.0j - 5.3k(KN)$

حل مسئله ۵

$A(4,0,7) \quad B(0,3,0) \quad C(8,3,7) \quad D(8,0,0) \quad F = 10KN$

$\overrightarrow{AB} = -4i + 3j - 7k$

$\lambda_{AB} = \dfrac{-4i+3j-7k}{\sqrt{16+9+49}} = \dfrac{-4i+3j-7k}{8.60}$

$\overrightarrow{F_{AB}} = \overrightarrow{\lambda_{AB}} \bullet \overrightarrow{AB} = \dfrac{10}{8.6}(-4i+3j-7k)$

$\overrightarrow{F_{AB}} = -4.65i + 3.49j - 8.14k$

$CD = -3j - 7k$

$\lambda_{CD} = \dfrac{-3j-7k}{\sqrt{9+49}} = \dfrac{-3j-7k}{7.61}$

$CD = -0.394j - 0.919k$

$\vec{F}.\overrightarrow{CD} = (-4.65i + 3.49j - 8.14).(-0.394j - 0.919k)$

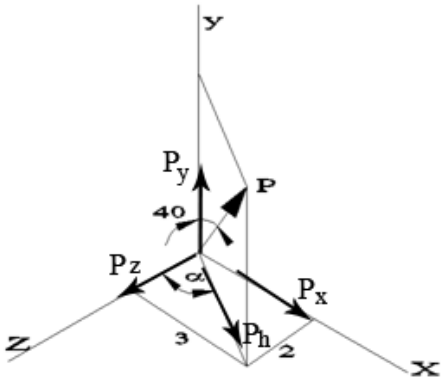
$\vec{F}.\overrightarrow{CD} = (-4.65)(0) + (3.49)(-0.394) + (-8.14)(-0.919)$

$\vec{F}.\overrightarrow{CD} = -1.375 + 7.48 = 6.1$

$\vec{F}_{CD} = (\vec{\lambda}_{CD}).(\vec{F}.\vec{CD}) = (6.1)(-0.394j - 0.919k)$ تصویر F روی محور CD

$\boxed{\vec{F}_{CD} = -2.4i - 5.6k}$

حل مسئله ۶



$P = 60N$

$P_y = (60)Cos40 = 45.96N$

$\tan\alpha = \dfrac{3}{2}$ $\alpha = 56.3^\circ$

$P_h = PSin40 = (60)(Sin40) = 38.56N$

$P_x = P_h Sin\alpha$

$P_x = PSin40Sin\alpha$

$Sin\alpha = \dfrac{P_x}{P_h}$ $P_x = (38.56)Sin56.3$

$P_x = 32.1N$

$Cos\alpha = \dfrac{P_z}{P_h}$ $P_z = (38.56)(Cos56.3)$

$P_z = 21.4N$

$\vec{P} = P_{xi} + P_{yj} + P_{zk}$

$P = 32.1i + 45.96j + 21.4k$

$Cos\theta x = \dfrac{P_x}{P} = \dfrac{32.1}{60}$

$\theta x = 57.6$

$Cos\theta z = \dfrac{P_z}{P} = \dfrac{21.4}{60}$

$\theta z = 69.1^\circ$

حل مسئله ۷

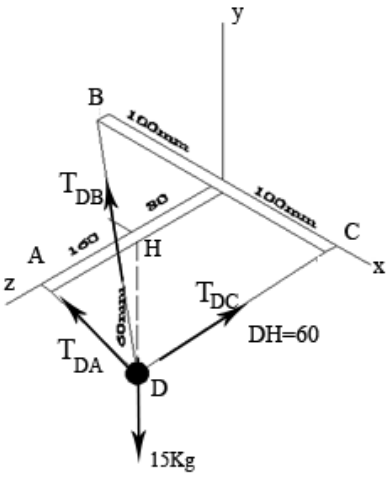
$W_D = 15kg$

$B(-100,0,0)$ $\quad B\hat{D}C = ?$

$C(100,0,0)$

$A(0,0,240)$

$D(0,-60,80)$



$\overrightarrow{DC} = 100i + 60j - 80k$

$\overrightarrow{\lambda_{DC}} = \dfrac{100i + 60j - 80k}{141.42}$

$\vec{T}_{DC} = T_{DC}(0.707i + 0.424j - 0.565k)$

$\overrightarrow{DB} = -100i + 60j - 80k$

$\lambda_{DB} = \dfrac{-100i + 60j - 80k}{141.42}$

$\vec{T}_{DB} = T_{DB}(-0.707i + 0.424j - 0.565k)$

$\overrightarrow{DA} = 60j + 160k$

$\lambda_{DA} = \dfrac{60j + 160k}{170.88} = 0.35j + 0.936k$

$\overrightarrow{T_{DA}} = \overrightarrow{T_{DA}}(0.35j + 0.936k)$

$W_D = -15kg = -15j$

$i = 0 \qquad 0.707T_{DC} - 0.707T_{DB} = 0$

$j = 0 \qquad T_{DC}(0.424) + T_{DB}(0.424) + T_{DA}(0.35) - 15 = 0$

$k = 0 \qquad T_{DC}(-0.565) + T_{DB}(-0.565) + T_{DA}(0.936) = 0$

$i = 0$

$T_{DC} = T_{DB}$

$T_{DC}(0.424) + T_{DC}(0.424) + T_{DA}(0.35) = 15$

$0.848T_{DC} + T_{DA}(0.35) = 15$

$-0.565T_{DC} + T_{DC}(-0.565) + T_{DA}(0.936) = 0$

$2 \times 0.565T_{DC} = T_{DA}(0.936)$

$T_{DC} = 0.828T_{DA}$

$0.848T_{DC} + \dfrac{T_{DC}}{0.828}(0.35) = 15$

$0.848T_{DC} + 0.423T_{DC} = 15$

$1.271T_{DC} = 15$

$T_{DC} = 11.8kg$

$T_{DB} = 11.8kg$

$T_{DA} = \frac{T_{DC}}{0.828} = \frac{11.8}{0.828}$

$T_{DA} = 14.3kg$

$\overrightarrow{T_{DB}} = 11.8(-0.707i + 0.424j - 0.565k)$

$\overrightarrow{T_{DC}} = 11.8(0.707i + 0.424j - 0.565k)$

$T_{DB}.T_{DC} = T_{DC}.T_{DB}.Cos\theta$

$(-0.707i + 0.424j - 0.565k).(0.707i + 0.424j - 0.565k) = 1 \times 1 \times Cos\theta$

$-0.5 + 0.18 + 0.32 = 1 \times 1 \times Cos\theta \qquad Cos\theta = 0 \qquad \theta = 90$

حل مسئله ۸

۱- سه نیرو RA و RB و W متقاربند

$AB = 3R$

$\theta = ?$

$AD\ Cos2\theta = AH$

$AG\ Cos\theta = AH$

$2R\ Cos2\theta = \frac{3R}{2}\ Cos\theta$

$Cos2\theta = \frac{3}{4}\ Cos\theta$

$4\ (2Cos^2\ \theta - 1) = 3\ Cos\theta$

$8\ Cos^2\ \theta - 4 = 3\ Cos\theta$

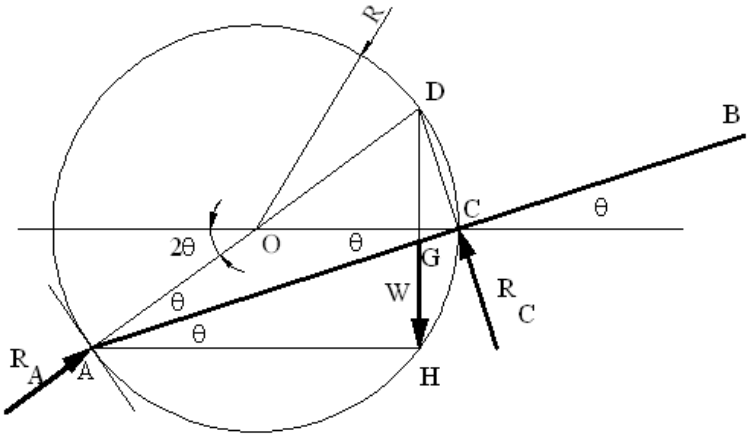
$8\ Cos^2\ \theta - 3\ Cos\theta - 4 = 0$

$Cos\theta = \frac{3 \mp \sqrt{9 + 128}}{16} = \frac{3 \mp 11.7}{16}$

$Cos\theta = -0.544 \qquad Cos\theta = +0.91875$

$\theta = 123$ غیر قابل قبول

$\boxed{\theta = 23.2^\circ}$



گروه مهندسی صنایع (به نام خدا)

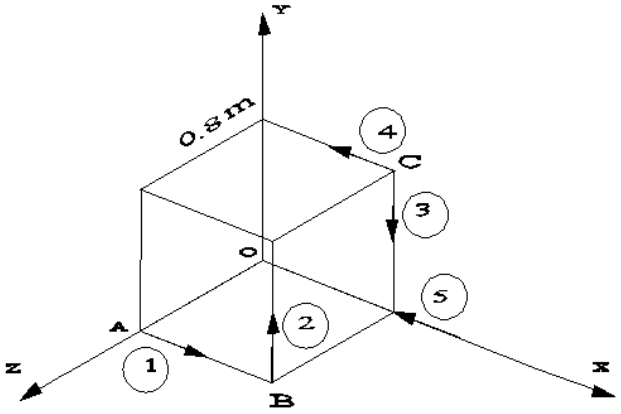
تاریخ : ۸۶/۳/۳

نام ونام خانوادگی..... مدت : ۲ ساعت

امتحان میان ترم استاتیک

دانشگاه مهر آستان

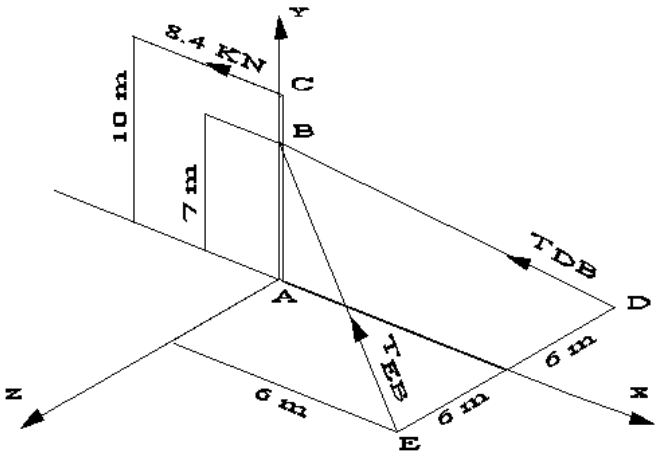
۱-در مکعب به ضلع $0.8\ m$ شکل زیر، مطلوبست،اولاً تعین سیستم معادل در نقطه (O) ، ثانیاً ،این سیستم معادل را به پیچ گوشتی وار تبدیل کنید وپای پیچ را محاسبه کنید.ثالثاً ،مختصات نقطه اثر برآیند پیچ گوشتی وار را پیدا کنید. پیچ آیا مثبت است یا منفی. نیروها بشرح زیر است.



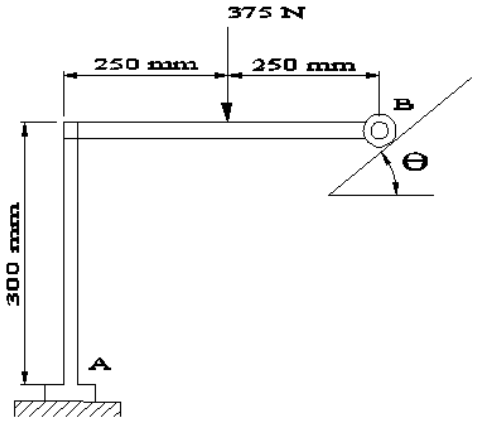
$F_1 = 700\ N \qquad F_2 = 500\ N$

$F_3 = 200\ N \qquad F_4 = 300\ N \qquad F_5 = 400\ N$

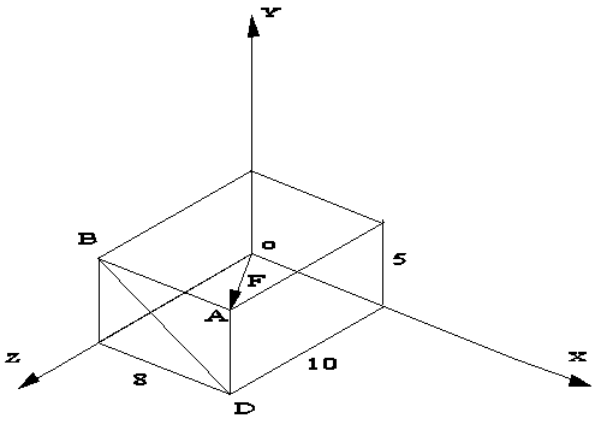
۲-در صورتیکه وزن AC قابل اغماض باشد و اتصال A به صورت کاسه و ساچمه باشد ،مطلوبست محاسبه نیـروی کششـی وارد بر کابل های DB,EB که در اثر اعمال نیروی $8.4\ KN$ به C وارد می شود.

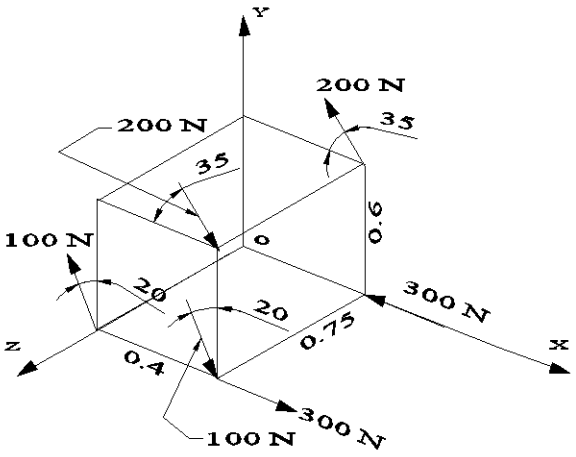


۳-در شکل زیر مطلوبست محاسبه مقدار عکس العمل های نیرو در تکیه گا ه B , A در صورتیکه $\theta = 60^0$ باشد.تکیه گاه B غلطک و اتصال A پین صیقلی می باشد.



۴- F=100 N در راستای OA عمل می کند ، اولاً مطلوبست تصویر نیروی F روی محور AD ، ثانیاً لنگر نیروی F نسبت به محور BD . اندازه ها بر اساس متر هستند.





۵-جفت نیرو های شکل زیر را به سیستم نیروی معادل تبدیل کنید.
توضیح اینکه جفت نیروی200N با محور X ها در صفحه YOX مطابق شکل زاویه ۳۵درجه می سازد.
توضیح اینکه جفت نیروی100N با محور Y ها در صفحه YOZ مطابق شکل زاویه ۲۰درجه می سازد.
اندازه ها بر اساس متر هستند.

موفق باشید.
جواد تسکینی

حل مسئله ۱
پای پیچ، تبدیل به یک رنچ شود

$$a = 0.8m \qquad F_1 = 700i \qquad F_2 = 600j \qquad F_3 = -600j \qquad F_4 = -500i$$
$$R = \sum F = 700i + 600j - 600j - 500i$$
$$R = 200i$$
$$M_o = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4$$
$$M_o = (0.8k) \times (700i) + (0.8i + 0.8k) \times 600j$$
$$+ (0.8i + 0.8j) \times -600j + (0.8i + 0.8j) \times (-500i)$$
$$M_o = 0.8(700)j + 0.8(600)(k) + 0.8(600)(-i)$$
$$+ 0.8(-600)k + 0.8(-500)(-k)$$
$$M_o = 560j + 480k - 480i - 480k + 400k$$
$$M_o = -480i + 560j + 400k$$
$$M_1 = \frac{\vec{R}.(\vec{M}_O.\vec{R})}{\vec{R}^2} = \frac{200i.\left[(-480i + 560j + 400k).200i\right]}{(200)^2}$$
$$M_1 = \frac{200i.(-480i \times 200)}{(200)^2}$$
$$M_1 = -480i$$
$$M_2 = M_o - M_1 = 560j + 400k$$
$$M_2 = \bar{r} \times \vec{R}$$

$M_2 = (\bar{x}i + yj + zk).(200i)$

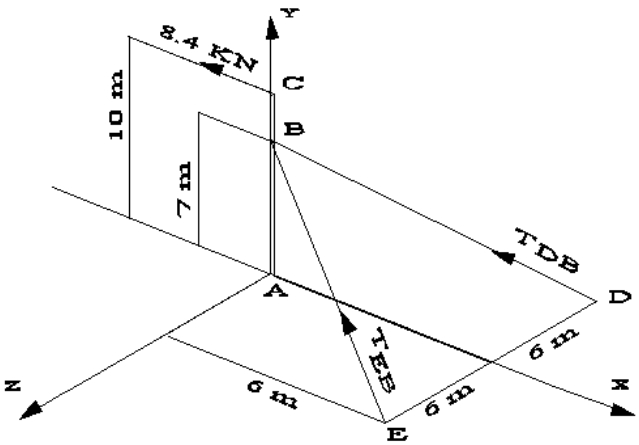
$560\,j + 400k = 200\,y(-k) + 200z(\,j)$

$560 = 200z$

$400 = -200\,y$

پای پیچ $= \dfrac{\overline{M}}{\overline{R}} = \dfrac{-480}{200} = -2.4m$

حل مسئله 2



$T_{EB} = ?\quad T_{DB} = ?\quad D(6,0,-6)\quad E(6,0,6)$

$B(0,7,0)\quad C(0,10,0)$

$\vec{T}_{DB} = \dfrac{T_{DB}}{11}(-6i + 7\,j + 6k)$

$\vec{T}_{EB} = \dfrac{T_{EB}}{11}(-6i + 7\,j - 6k)$

$\sum M_A = 0 = \vec{r}_{AE} \times \vec{T}_{EB} + \vec{r}_{AD} \times \vec{T}_{DB} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$

$\vec{r}_{AE} = 6i + 6k \quad \vec{r}_1 = 10\,j \;\; \vec{F}_1 = -8.4i$

$\vec{r}_{AD} = 6i - 6k$

$$M_A = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ -6 & 7 & -6 & -6 & 7 \end{vmatrix}_{\frac{T_{BE}}{11}} + \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ -6 & 7 & -6 & -6 & 7 \end{vmatrix}_{\frac{T_{BE}}{11}} + 10\,j \times -8.4i$$

$M_A = \dfrac{T_{BE}}{11}(-36\,j) + \dfrac{T_{BE}}{11}(42k) + \dfrac{T_{BE}}{11}(-42i)$

$+ \dfrac{T_{BE}}{11}(+36\,j) + \dfrac{T_{DB}}{11}(+36\,j) + \dfrac{T_{DB}}{11}(42k) + \dfrac{T_{DB}}{11}(42i) + \dfrac{T_{DB}}{11}(-36\,j) + 84k$

$i \rightarrow \qquad \dfrac{T_{BE}}{11}(-42) + \dfrac{T_{DB}}{11}(42) = 0$

$j = 0$

$k \rightarrow \qquad 84 + \dfrac{T_{BE}}{11}(42) + \dfrac{T_{DB}}{11}(42) = 0$

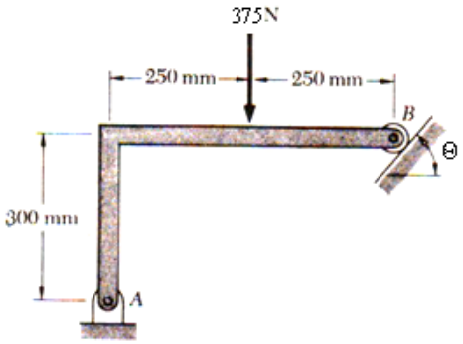
$T_{BE} = T_{DB}$

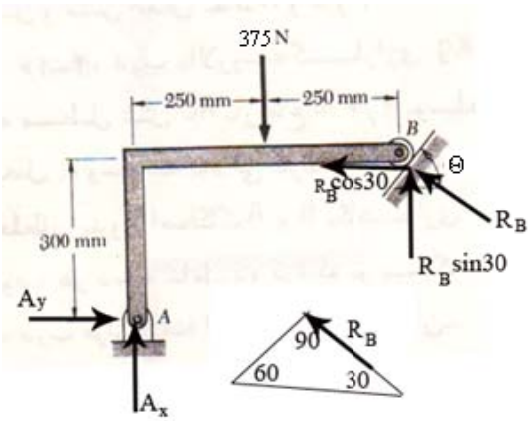
$84 + \dfrac{2}{11}(42)T_{BE} = 0$

$T_{BE} = -11KN$

$\boxed{T_{BE} = 11KN}$ جهت از B به E است

حل مسئله 3





$\theta = 60^\circ$

$\sum M_A = o \quad \curvearrowleft^+ \qquad (375)(0.25) - R_B Sin30(0.5) - R_B \cos 30(0.3) = 0$

$375(0.25) = R_B(0.25) + 0.26 \;\; R_B$

$R_B = 184 \;\; N$

$\rightarrow \sum Fx = 0 \qquad Ax - R_B \; Cos30 = 0$

$Ax = 184 \;\; Cos30 = 159 \;\; N \rightarrow$

$\uparrow \sum Fy = 0 \qquad Ay - 375 + R_B \; Sin30 = 0$

$$Ay = 375 - \frac{184}{2} = 375 - 92$$

$Ay = 283 \quad N \;\uparrow$

$$\tan\alpha = \frac{A_Y}{A_X} = \frac{283}{159} \qquad \alpha = 60.7^\circ$$

$$F_A = \frac{A_X}{\cos 60.7} = \frac{159}{\cos 60.7}$$

$F_A = 325 \quad N$

حل مسئله 4

$A(8,5,10) \qquad B(0,5,10) \qquad D(8,0,10) \qquad F = 100N$

$\vec{D}_O = -8i - 10k$

$\overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{r_{OD}} x \vec{F}$

$$\overrightarrow{\lambda_{OA}} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overline{OA}} = \frac{8i + 5j + 10k}{13.75}$$

$$\vec{F} = F.\vec{\lambda}_{OA} = \frac{100}{13.75}(8i + 5j + 10k)$$

$$F = 58.2i + 36.36j + 72.72k$$

$$\vec{M}_D = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ -8 & 0 & -10 & -8 & 0 \\ 58.2 & 36.36 & 72.72 & 58.2 & 36.36 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_D = -582j - 291k + 363.6i + 582j$$

$$\vec{M}_D = 363.6i - 291k$$

$$\overline{P_L} = \frac{\vec{F}.\overline{AD}}{\overline{AD}}$$

$$AD = 5j$$

$$\overline{P_L} = \frac{(58.2i + 36.36j + 72.72k).(5j)}{5}$$

$$\overline{P_L} = 36.36N$$

$$\vec{\lambda}_{DB} = \frac{DB}{\overline{DB}} = \frac{8i - 5j}{\sqrt{64 + 25}} = \frac{8i - 5j}{9.43}$$

$$\vec{M}_{BD} = (\vec{M}_D.\vec{\lambda}_{DB})\vec{\lambda}_{DB}$$

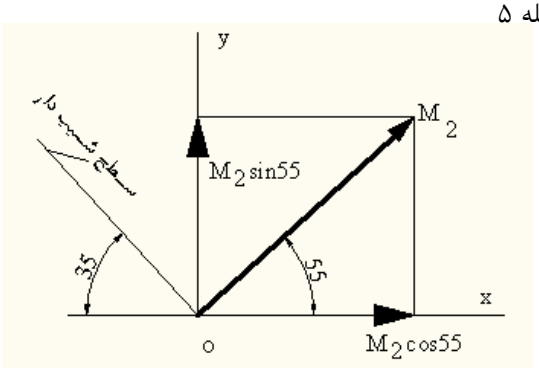
$$\vec{M}_{BD} = (363.6i - 291k).\frac{8i - 5j}{9.43}\lambda_{BD}$$

$$\vec{M}_D = 308.5 \quad N - m$$

$$\vec{M}_{BD} = \frac{8 \times 363.6}{9.43} \times \frac{1}{9.43}(8i - 5j)$$

$$\vec{M}_{BD} = 32.7(8i - 5j)$$

حل مسئله ۵



$$M_1 = (300)(0.75)j = 225j$$

$$M_2 = 200(0.75) = 150$$

$$M_3 = 100(0.4) = 40$$

$$\vec{M}_2 = 150Cos55i + 150Sin55j$$

$$\vec{M}_2 = 86i + 122.9j$$

$$\vec{M}_3 = -40Cos20k + 40Sin20j$$

$$\vec{M}_3 = -37.6k + 13.7j$$

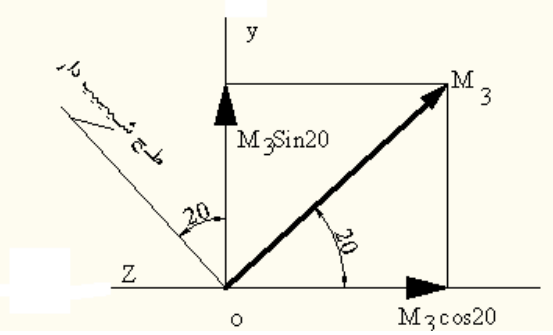
$$\vec{M}_o = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$$

$$\vec{M}_o = 225j + 86i + 122.9j - 37.6k + 13.7j$$

$$M_o = 86i + 361.6j - 37.6k$$

$$M_o = \sqrt{86^2 + 361.6^2 - (37.6)^2}$$

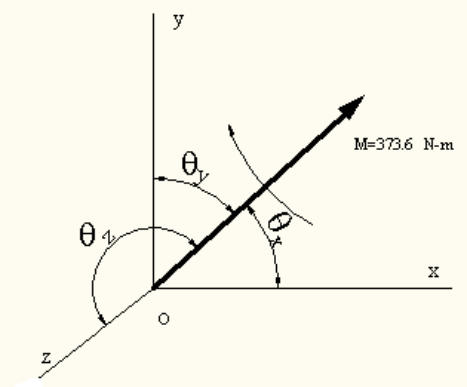
$$M_o = 373.6N - M$$



$$Cos\theta x = \frac{86}{373.6} \Rightarrow \theta x = 76.7^\circ$$

$$Cos\theta y = \frac{361.6}{373.6} \Rightarrow \theta y = 14.6^\circ$$

$$Cos\theta z = -\frac{37.6}{373.6} \Rightarrow \theta z = 95.8^\circ$$



گروه مهندسی صنایع (به نام خدا)

تاریخ : ۸۶/۴/۶

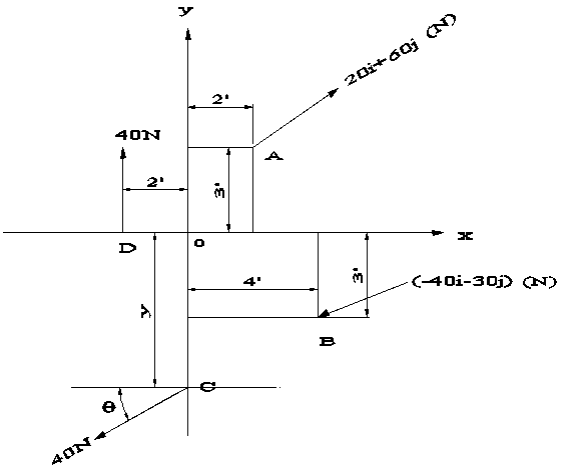
نام ونام خانوادگی..... مدت :۲,۵ ساعت

امتحان نهائی استاتیک

دانشگاه مهر آستان

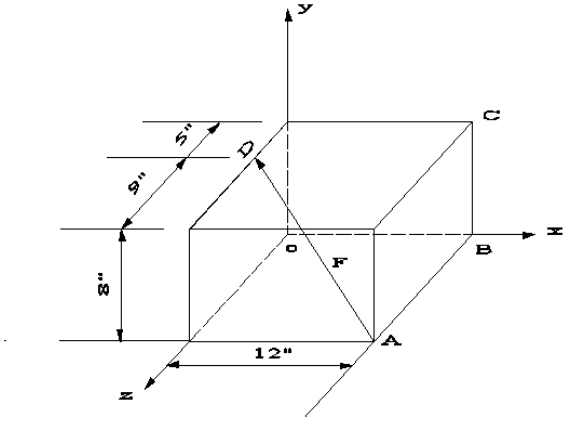
۱-در شکل زیر چهار نیروی متقارب وجود دارد، مطلوبست زاویه θ بطوریکه برآیند تمام نیروها در جهتy باشد.اگر زاویه$\theta=30^0$ باشد مطلوبست مقدارy به شرط اینکه ممان تمام نیروها نسبت به مبدأ مختصات صفر شود. اندازه ها همه برحسب متر هستند.

بارم (۴نمره)



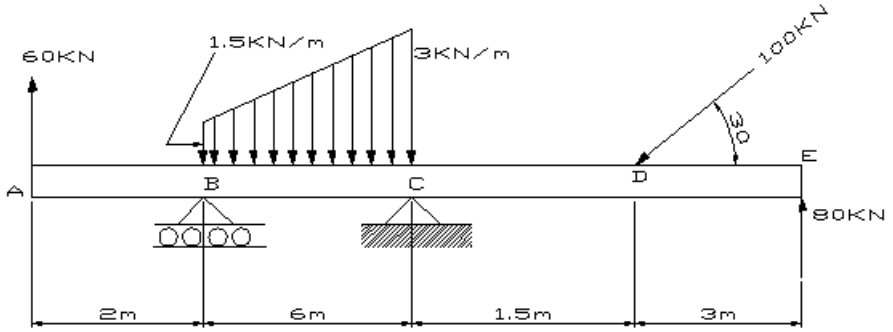
۲-مطلوبست ممان نیروی F=510 lb نسبت به نقطهB و خط BC .

بارم (۳,۵نمره)



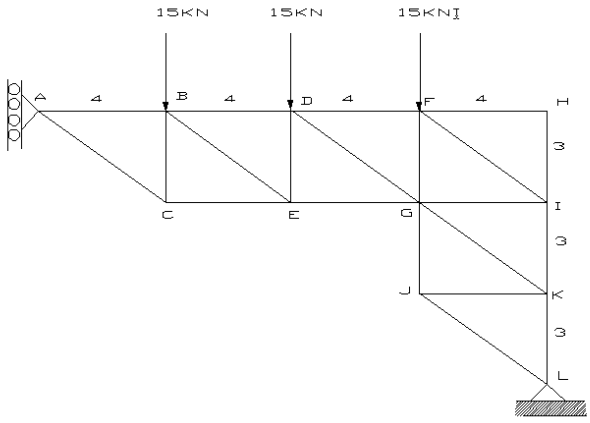
۳- مطلوبست ، نیروهای عکس العمل در تیکه گاهB و C .

بارم (۳,۵نمره)



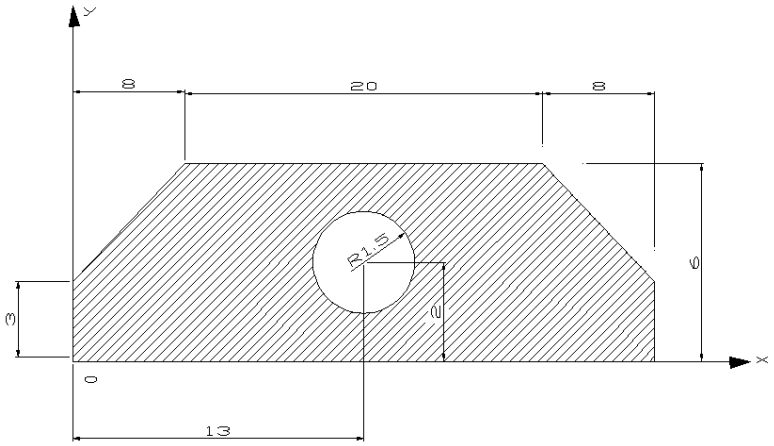
۴-خر پای شکل زیر مفروض است ،مطلوبست تعیین نیروها در بازویGJ و GK و IK .فشاری ویا کششی ویا خنثی بودن این نیروها را ذکر کنید. همه اندازه ها بر حسب متر هستند.

بارم (۵نمره)



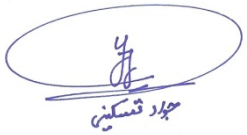
۵-مطلوبست، اولاً تعیین مرکز ثقل شکل هاشور خورده زیر، ثانیاً ،حجم حاصل از دوران این شکل حول محور x ها را بدست آورید.. اندازه ها همه بر حسب متر است.

بارم (۴نمره)



موفق باشید.

جواد تسکینی



حل مسئله 1

$\vec{R} = R_x i + R_y j$

$R_x = 0$

$F_C = -40Cos\theta i - 40SIM\theta J$

$F_B = -40i - 30j$

$F_A = 20i + 60j$

$F_D = 40j$

$i = 0 \qquad R_x = 0 = -40 + 20 - 40Cos\theta = 0$

$Cos\theta = \frac{-20}{40} = -\frac{1}{2}$

$\theta = \mp 60 \qquad$ یا $\qquad \theta = 120^\circ$

$\sum M_O = 0 = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{OB} \times \vec{F}_B + \vec{r}_{OD} \times \vec{F}_D + \vec{r}_{OC} \times \vec{F}_C$

$OA = 2i + 3j \qquad OB = 4i - 3j$

$OC = -yj \qquad OD = -2i$

$$\vec{r}_{OA} \times \vec{F}_A = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 20 & 60 & 0 & 20 & 60 \end{vmatrix} = 120k - 60k = 60k$$

$$\vec{r}_{OB} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 4 & -3 & 0 & 4 & -3 \\ -40 & -30 & 0 & -40 & -30 \end{vmatrix} = -120k - 120k = -240k$$

$\vec{r}_{OC} \times \vec{F}_C = -yj \times (-40Cos\theta i - 40SIM\theta j) = (y)Cos\theta(-k)(40)$

$r_{OD} \times F_D = -2i \times 40j = -80(k)$

$M_O = 60 - 240 - 40yCos\theta - 80 = 0$

$40yCos30 = -260$

$\theta = 30$

$y = \frac{-260}{40Cos30}$

$y = -7.5m$

حل مسئله ۲

$F = 510 \qquad 1b$

$B(12,0,0)$

$A(12,0,14)$

$D(0,8,5)$

$AD = -12i + 8j - 9k$

$\lambda = \frac{AD}{\overline{AD}} = \frac{-12i + 8j - 9k}{\sqrt{144 + 64 + 81}}$

$$\vec{F} = \lambda F = \frac{510}{17}(-12i + 8j - 9k)$$

$$F = -360i + 240j - 270k$$

$$BA = 14k$$

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{BA} \times \vec{F} = 12k \times (-360 + 240j - 270k)$$

$$\overrightarrow{M_B} = -5040(j) + 3360(-i) = -5040j - 3360i$$

$$\overrightarrow{M_B} = -3360i - 5040j$$

$$\boxed{\overline{M_B} = 6057} \quad 1b$$

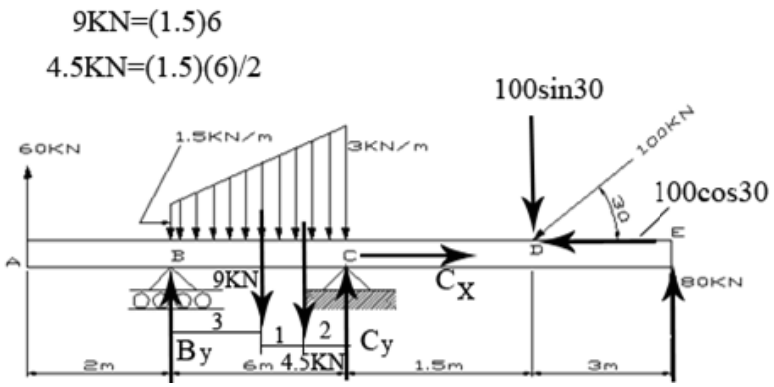
$$\tan\theta = \frac{5040}{3360} \qquad \theta = 56.3^\circ$$

$$\overline{M}_{BC} = \vec{M}_B.\vec{\lambda}_{BC} \qquad \lambda_{BC} = j$$

$$\overline{M}_{BC} = (-3360i - 5040j).j = -5040 \quad 1b - 1n$$

$$\boxed{\overline{M}_{BC} = -5040j} \qquad 1b - 1n$$

حل مسئله ۳



$$\sum M_B = 0 \quad \curvearrowleft^+$$

$$-80(10.5) + 100Sin30(7.5) - 6C_y + 4(4.5) + 9(3) + 60(2) = 0$$

$$6C_y = 375 - 840 + 18 + 27 + 120$$

$$6C_y = -300 \qquad C_y = -50KN$$

$$C_y = 50KN \downarrow$$

$$\sum F_x = 0$$

$$C_x - 100Cos30 = 0$$

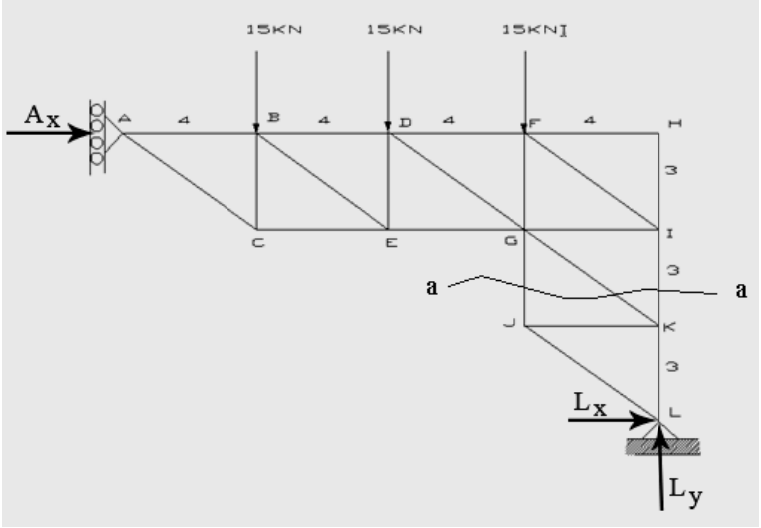
$$C_x = 76.6KN \rightarrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$60 + B_y - 9 - 4.5 + C_y - 100Sin30 + 80 = 0$$

$$\boxed{B_y = -76.5KN} \quad B_y = 76.5KN \downarrow$$

حل مسئله ۴



$$\uparrow^{+} \qquad \sum F_y = 0$$

$$-15-15-15+L_y=0$$

$$L_y = 45KN \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \quad \text{↵}^{+}$$

$$(-L_y)(16)-L_x(+9)+15(12)+15(8)+15(4)=0$$

$$9L_x = -16L_y + 15(12)+15(8)+15(4)$$

$$9L_x = -360 \qquad \boxed{L_x = -40KN}$$

$$\boxed{L_x = 40KN \leftarrow}$$

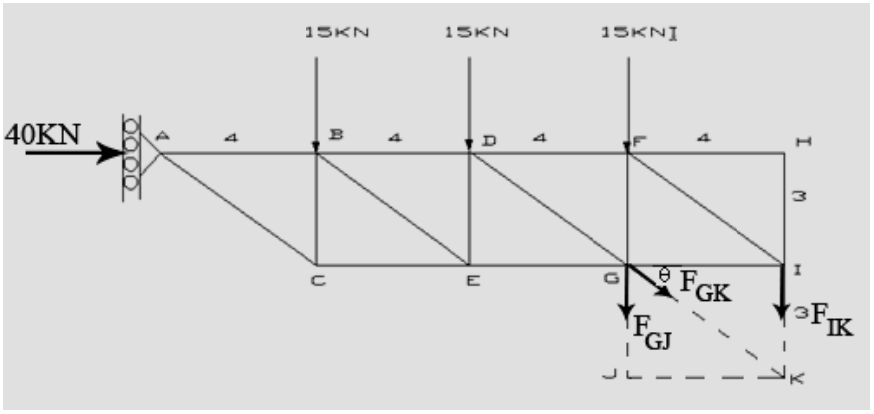
$$\sum F_x = 0$$

$$A_x + L_x = 0 \qquad A_x = -L_x$$

$$A_x = +40KN$$

$$A_x = 40KN \rightarrow$$

برشa-a



$$\tan\theta = \frac{3}{4} \qquad \theta = 36.86$$

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x + F_{GK}Cos36.86 = 0$$

$$\boxed{F_{GK} = -50 \quad KN \quad C}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \text{↵}^{+}$$

$$16(F_{Ik}) + F_{Gj}(12) + F_{Gk}(12)Sin\theta$$

$$-F_{Gk}(3)Cos\theta + 15(12)+15(8)+15(4)=0$$

$$16F_{Ik} + 12F_{Gj} - 360 + 120 + 180 + 120 + 60 = 0$$

$$16F_{Ik} + 12F_{Gj} = -120$$

$$\sum F_y = 0 \uparrow$$

$$-45 - F_{Gj} - F_{Gk}Sin\theta - F_{Ik} = 0$$

$$\begin{cases} F_{Gj} + F_{Ik} = -15 \\ 16F_{Ik} + 12F_{Gj} = -120 \end{cases}$$

$$16F_{Ik} + 12(-15 - F_{Ik}) = -120$$

$$16F_{Ik} - 180 - 12F_{Ik} = -120$$

$$4F_{Ik} = 180 - 120 = 60$$

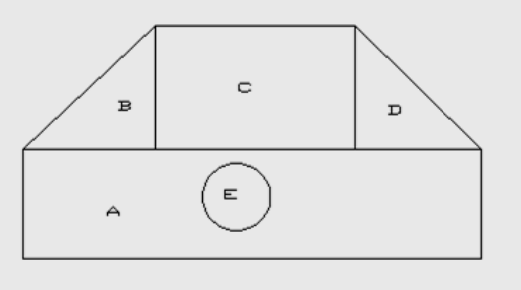
$$\boxed{F_{Ik} = 15KNT \rightarrow}$$

$F_{Gj} = -15 - 15$

$F_{Gj} = -30KN$

$\boxed{F_{Gj} = 30KNC}$

حل مسئله ۵



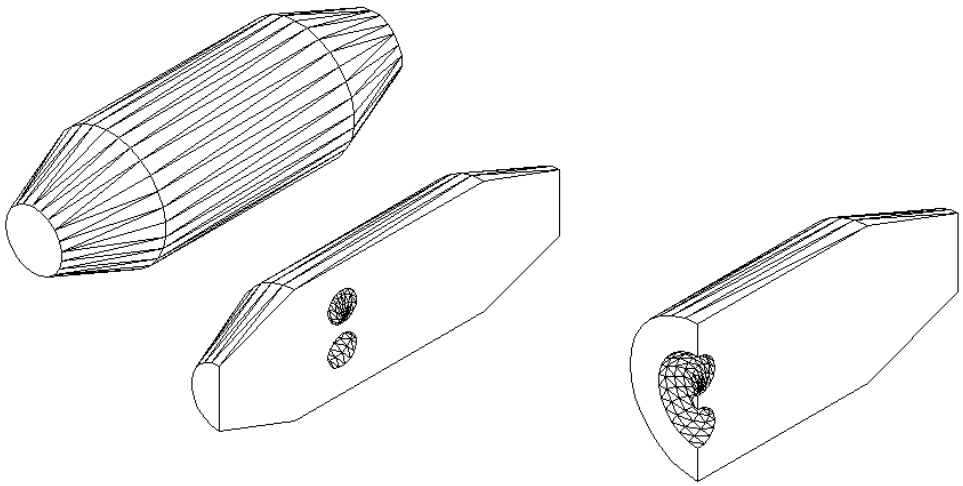
شکل	مساحت	x	Ax	y	Ay
A	108	18	1944	1.5	162
B	12	5.333	64	4	48
C	60	18	1080	4.5	270
D	12	30.666	368	4	48
-E	-7.07	13	-91.91	2	-14.14
total	184.93		3363.97		513.86

$$\bar{x} = \frac{Ax}{A} = \frac{3363.97}{184.93} = 18.2 \ m$$

$$\bar{y} = \frac{Ay}{A} = \frac{513.86}{184.93} = 2.77867 \ m$$

$$V = (2\pi \bar{y})A$$

$$V = (2\pi)(2.77867)(184.93) = 3228.67 \ m^3$$



محاسبه
AutoCAD

```
Select objects:

 ----------------   SOLIDS    ----------------

Mass:                      3228.6954
Volume:                    3228.6954
Bounding box:          X: 0.0000  --  36.0000
                       Y: -6.0000  --  6.0000
                       Z: -6.0000  --  6.0000
Centroid:              X: 18.1376
                       Y: 0.0000
                       Z: 0.0000
Moments of inertia:    X: 52831.5031
                       Y: 1348978.9251
                       Z: 1348978.9251
Products of inertia:  XY: 0.0000
                      YZ: 0.0000
                      ZX: 0.0000
Radii of gyration:     X: 4.0451
                       Y: 20.4404
                       Z: 20.4404
Principal moments and X-Y-Z directions about centroid:
                       I: 52831.5031 along [1.0000 0.0000 0.0000]
                       J: 286831.7617 along [0.0000 1.0000 0.0000]
                       K: 286831.7617 along [0.0000 0.0000 1.0000]
```

گروه مهندسی صنایع (به نام خدا) تاریخ : ۸۶/۱۰/۶

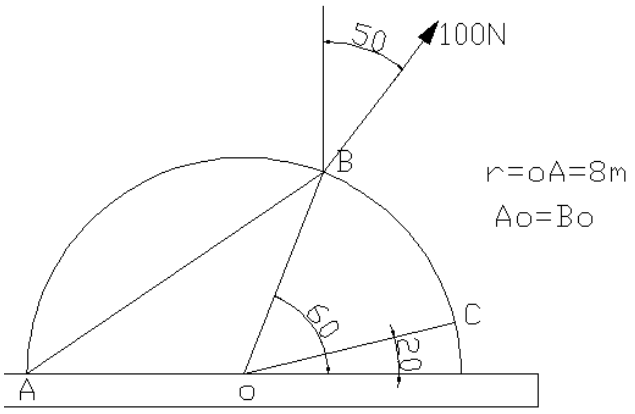
نام ونام خانوادگی..... مدت : ۲ ساعت

امتحان میان ترم استاتیک

دانشگاه مهر آستان

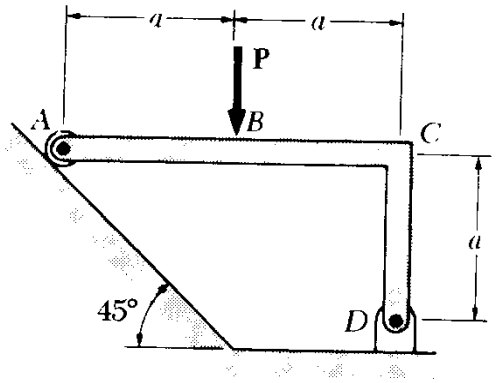
۱- گشت آور نیروی ۱۰۰ نیوتن را حول نقطه A بدست آورید. الف: با استفاده از تعریف گشت آور یک نیرو(از راه برداری) . ب: به وسیله تجزیه نیرو در امتدادAB و عمود بر AB . ثانیاً ، معین کنید گشت آور نیروی ۱۰۰ نیوتن را حول نقطه C.

۶ نمره

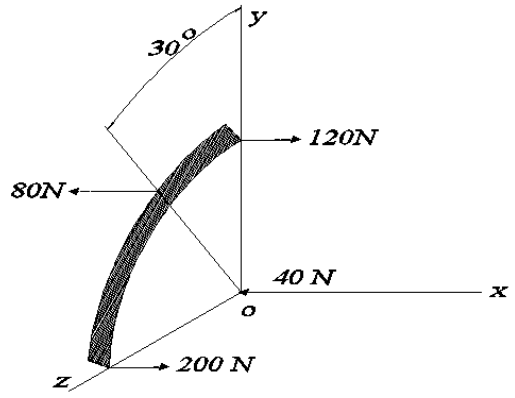


۲- مطلوبست عکس العمل نیروهائی که بر پین هایA و D وارد می شود.این نیروها را بر حسب P حساب کنید و جهت آنرا بدست بیاورید.

۴ نمره

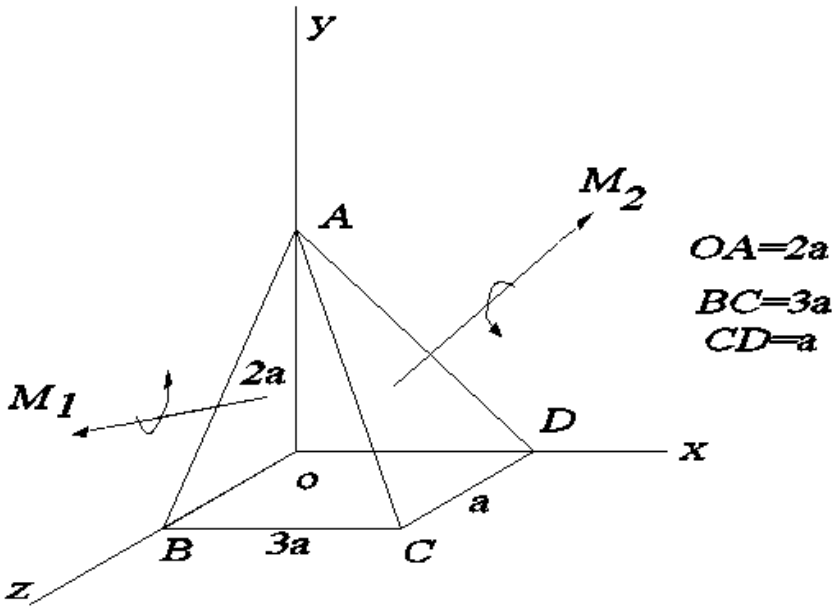


۳-چها ر نیروی افقی بر روی یک صفحه ربع دایره بطور قائم وارد می شود.شعاع صفحه 250 mm می باشد. معین کنید مقدار و نقطه اثر برآیند چهار نیروی وارد بر صفحه را.

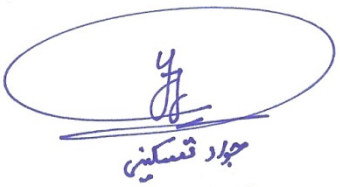


۴ نمره

۴- بردارهای کوپل M_2وM_1 نشان دهنده کوپلهائی است که در صفحات ACDو ABC می باشد . فرض می شود $M_2=M_1=M$.
وکوپل منفرد L معادل این دو کوپل را بر حسب M حساب کرده و زوایای این کوپل L را با محور xوy و z بدست آورید.



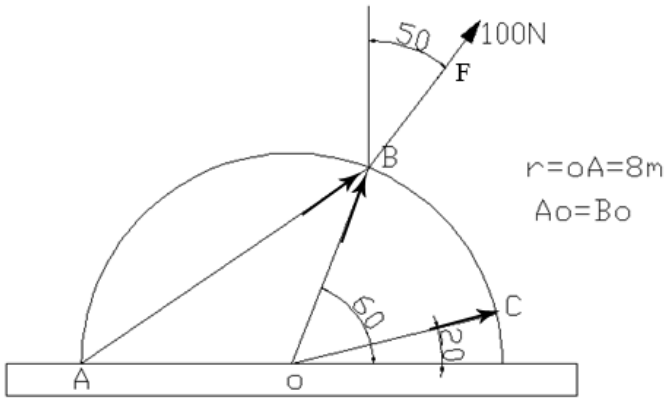
۶ نمره



موفق باشید.
جواد تسکینی

حل مسئله ۱

الف:



$$M_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$

$$\vec{F} = FCos50\,j + FSin50i$$

$$F = 100Cos50\,j + 100Sin50i = 76.6i + 64.3\,j$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{Ao} + \vec{r}_{OB} = 8i + 8Cos60i + 8Sin60\,j$$

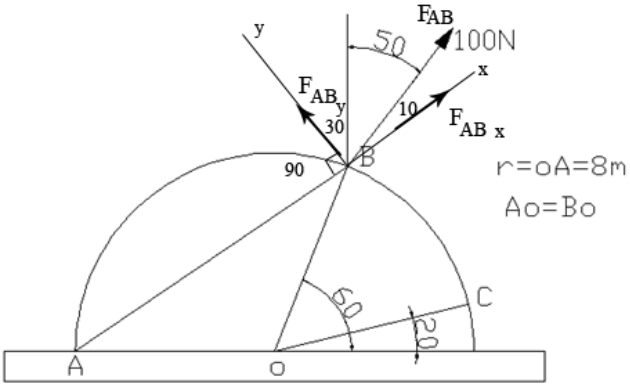
$$\vec{r}_{AB} = 12i + 6.93\,j$$

$$MA = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 12 & 6.93 & 0 & 12 & 6.93 \\ 76.6 & 64.3 & 0 & 76.6 & 64.3 \end{vmatrix}$$

$$MA = (12)(64.3)(k) - (76.6)(6.93)k$$

$$MA = 240.8 \quad N-M \quad \curvearrowleft^{+}$$

ب : ممان F_{ABX} چون از A می گذرد صفر است، پس



$$MA = AB.F_{ABy}$$

$$F_{ABy} = FCos(30+50)$$

$$F_{ABy} = 100Cos80$$

$$\frac{Sin120}{AB} = \frac{Sin30}{8} \qquad AB = \frac{8Sin120}{Sin30}$$

$$MA = AB.F_{ABy} = \frac{8Sin120}{Sin30}.100Cos80 = 240.8 \quad N-M$$

ثانیاً:

$$M_C = \vec{r}_{CB} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{CB} + \vec{r}_{OC} = \vec{r}_{OB}$$

$$\vec{r}_{CB} = \vec{r}_{OB} - \vec{r}_{OC} = 8Cos60i + 8Sin60\,j - (8Cos20i + 8Sin20\,j)$$

$$\vec{r}_{CB} = \vec{r}_{OB} - \vec{r}_{OC} = 8Cos60i + 8Sin60\,j - (8Cos20i + 8Sin20\,j)$$

$$\vec{r}_{CB} = 4i + 6.93\,j - 7.5i - 2.74\,j$$

$$\vec{r}_{CB} = -3.5i + 4.2\,j$$

$$M_C = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ -3.5 & 4.2 & 0 & -3.5 & 4.2 \\ 76.6 & 64.3 & 0 & 76.6 & 64.3 \end{vmatrix}$$

$$M_C = -3.5(64.3)k - (26.6)(4.2)(k)$$

$$M_C = -225k - 321.7k$$

$$M_C = -546.7k$$

$$M_C = 546.7 \quad N-M$$

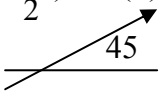
حل مسئله ۲

$$\sum M_D = 0$$

$$R_A Sin45(2a) + R_A Cos45(a) - P(a) = 0$$

$$(R_A)(a)(\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = P(a)$$

$$R_A = 0.471P$$



$$\sum F_x = 0$$

$$R_A Cos45 + D_x = 0$$

$$D_x = -R_A Cos45 = -\frac{2P}{3\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{P}{3}$$

$$\sum F_y = 0$$

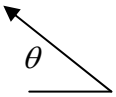
$$D_y - P + R_A Sin45 = 0$$

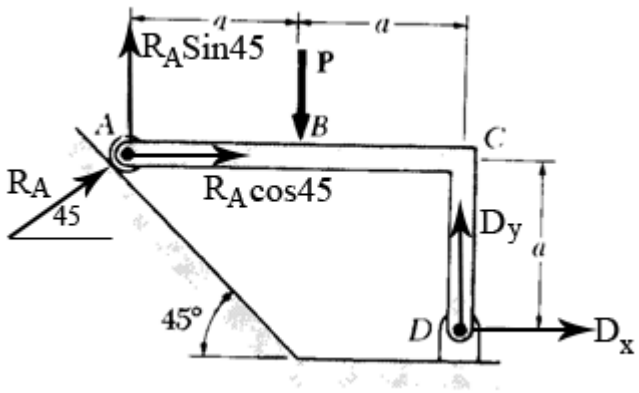
$$D_y = P - R_A Sin45 = P - \frac{2P}{3\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D_y = P - \frac{P}{3} = \frac{2P}{3}$$

$$R_D = -\frac{1}{3}Pi + \frac{2}{3}Pj \qquad \tan\theta = \frac{2p/3}{p/3} = 2 \qquad \theta = 63.4^\circ$$

$$R_D = \sqrt{(\frac{2}{3}P)^2 + (\frac{1}{3}P)^2} = 0.745P$$





حل مسئله ۳

$$R_x = \sum F_x$$

$$R_x = -80i + 120i - 40i - 200i$$

$$R_x = 200i$$

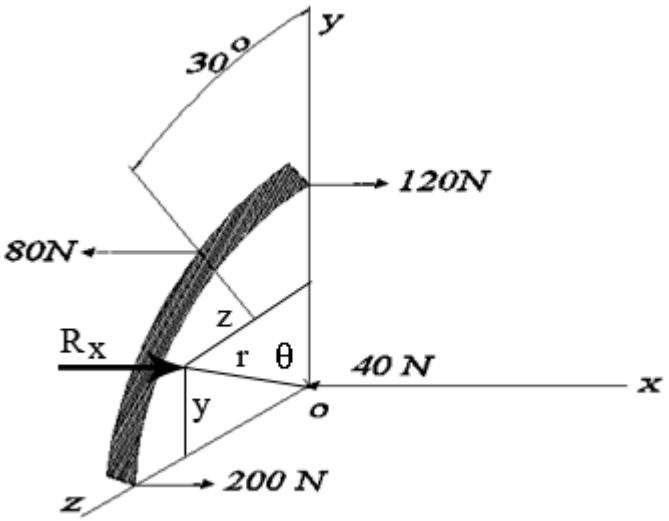
$$A(0,\ 0.25Cos30,\ 0.25Sin30)$$

$$\sum M_O = (120)(0.25)(-k) + 200(0.25)\,j$$

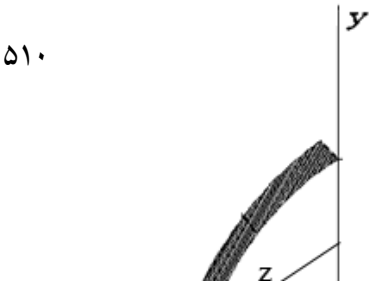
$$+ (0.25Cos30\,j + 0.25Sin30k)\times -80i$$

$$\sum M_O = -30k + 50\,j(-17.3)(-k) - 10(j)$$

$$M_O = 40\,j - 12.7k$$



$$40\,j - 12.7k = 200\,y(-k) + 200z(j)$$



$$40\,j - 12.7k = -200\,yk + 200\,zj$$

$$40 = 200z \qquad z = 0.2m = 200 \quad mm$$

$$-12.7 = -200\,y \qquad y = 0.0635\,m = 63.5\ mm$$

$$\tan\theta = \frac{z}{y} = \frac{0.2}{0.0635}$$

$$\theta = 72.4^{\circ}$$

حل مسئله ۴

$$M_1 = M_2 = M$$

$$L = ?$$

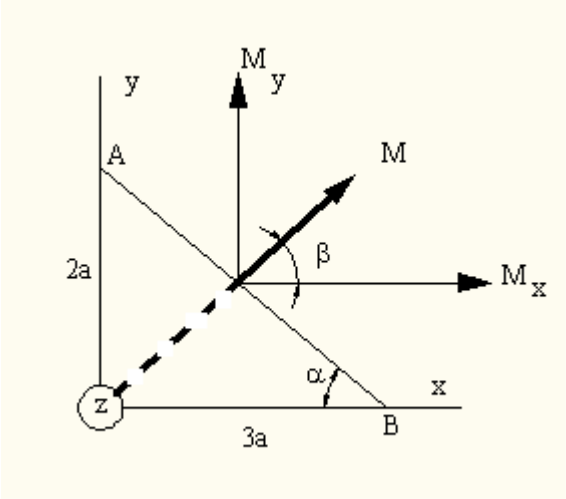
$$\beta = 90 - \alpha$$

$$\tan\theta = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = 33.7^{\circ}$$

$$M_x = M_2 Cos\beta = MSin\alpha$$

$$M_y = M_2 Sin\beta = MCos\,\alpha$$



$$\tan\gamma = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\gamma = 63.4^{\circ}$$

$$M_y = M_1 Sin\varphi = M_1 Cos\gamma$$

$$M_y = MCos\gamma$$

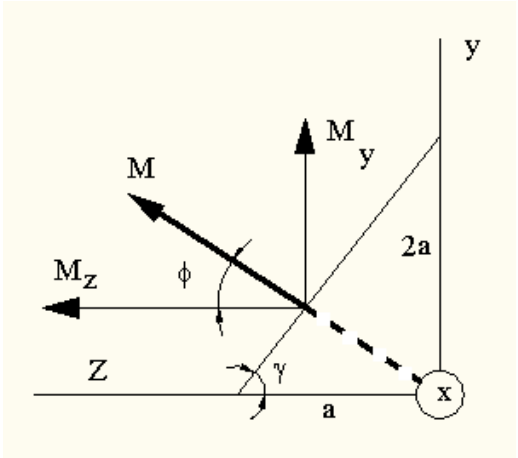
$$M_1 z = +M_1 Cos\varphi = +MSin\gamma$$

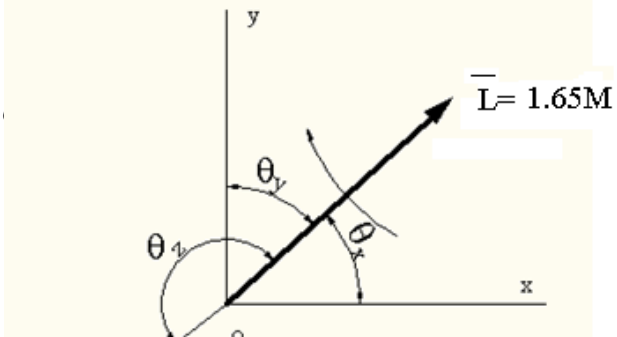
$$\vec{L} = MSin\alpha i + MCos\alpha j + MCos\gamma j + MSin\gamma k$$

$$\vec{L} = MSin33.6i + MCos33.6\,j + MCos63.4\,j + MSin63.4k$$

$$\vec{L} = M(0.554)i + M(1.28)\,j + M(0.894)k$$

$$\vec{L} = M\sqrt{(0.554)^2 + (1.28)^2 + (0.891)^2}$$





$$\vec{L} = 1.65M$$

$$Cos\theta x = \frac{Mx}{M} = \frac{M(0.554)}{1.65M} \Rightarrow \theta x = 70.4^{\circ}$$

$$Cos\theta y = \frac{My}{M} = \frac{1.28M}{1.65M} \Rightarrow \theta y = 39.2^{\circ}$$

$$Cos\theta z = \frac{Mz}{M} = \frac{0.891M}{1.65M} \Rightarrow \theta z = 57.3^{\circ}$$

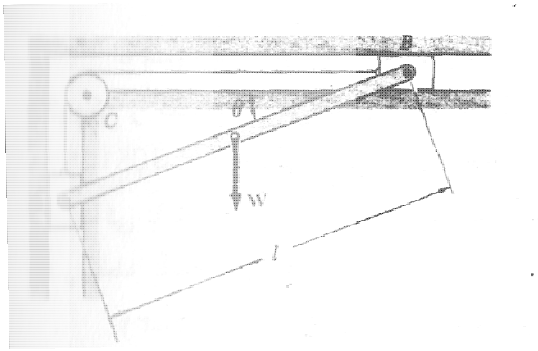
گروه : مهندسی صنایع (به نام خدا) تاریخ : ۸۶/۱۰/۲۲

نام ونام خانوادگی..... مدت :۲,۵ ساعت

امتحان نهائی استاتیک

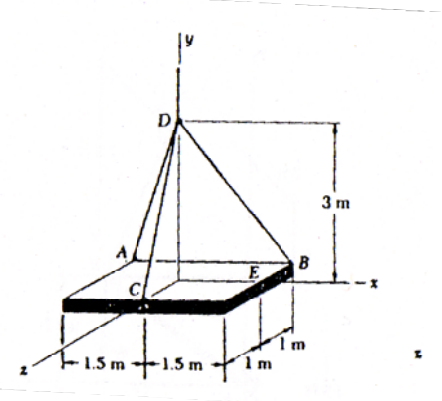
دانشگاه مهر آستان

۱- میله AB بوزن W از دو طرف به قطعات A به وزن (2W) و B به وزن (W)متصل و می توانند آزادانه در ناودانک مطابق شکل زیر حرکت نمایند وزنه ها بواسطه طناب قابل کششی که از روی قر قره C عبور نموده بیکدیگر وصل شده است. کشش طناب را بر حسب W,θبدست آورید.ثانیاً مقدار زاویهθ را برای حالتی که کشش در طناب برابر5W باشد معین کنید.

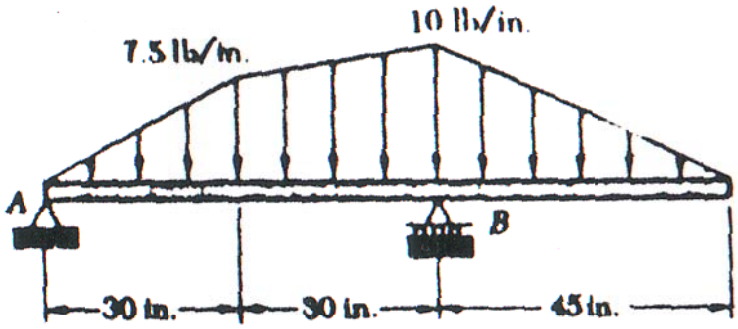


بارم (۴نمره)

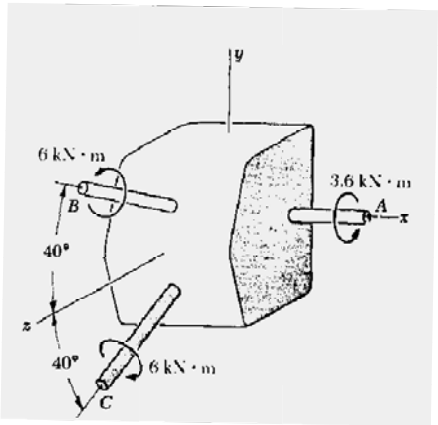
۲- صفحه ای به ابعاد ۳x۲ متر و بجرم ۶۰۰ کیلو گرم را بوسیله سه کابل که در نقطه D با لای مرکز صفحه قرار گرفته و به یکدیگر متصل شده بالا می برند. معین کنید کشش در هر کابل را بر حسب کیلو نیوتن. بارم (۳نمره)



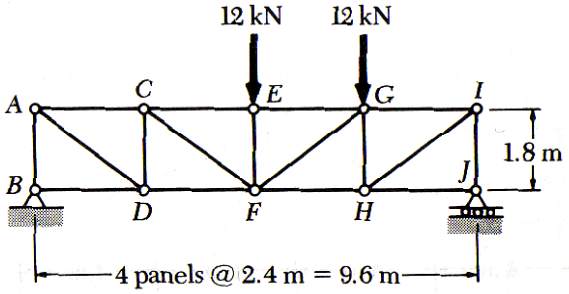
۳- معین کنید عکس العملهای نقاط A وB را. بارم (۳نمره)



۴- سه محور به جعبه دنده مطابق شکل وصل شده است. محور A افقی و محورهای B وC در صفحه قائم yz قرار دارند. معین کنید مولفه های کوپل برآیند وارد بر جعبه دنده را. ثانیاً ، مقدار عددی کوپل برآیند را بدست آورده و زوایای آنرا نسبت به محور مختصات بدست آورید. بارم (۲نمره)

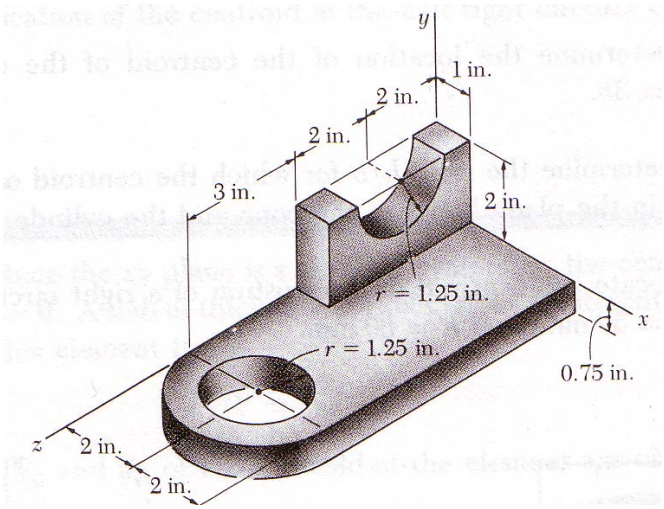


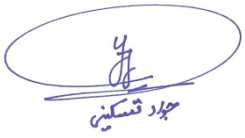
۵- مطلوبست نیروهای FG و FH در خر پای شکل زیر. بارم (۴نمره)



۶- یک قطعه مکانیکی به شکل زیر تراشکاری شده است ، مطلوبست محاسبه مرکز ثقل آن. بارم (۴نمره)

موفق باشید جواد تسکینی





حل مسئله ۱

$AB = L$

$W_B = W$

$W_A = 2W$

$\sum M_D = 0 \quad \curvearrowleft^+$

$(T - 2W)lCos\theta - w(\frac{l}{2}Cos\theta) - TlSin\theta = 0$

$TCos\theta - 2wCos\theta - 0.5wCos\theta - TSin\theta = 0$

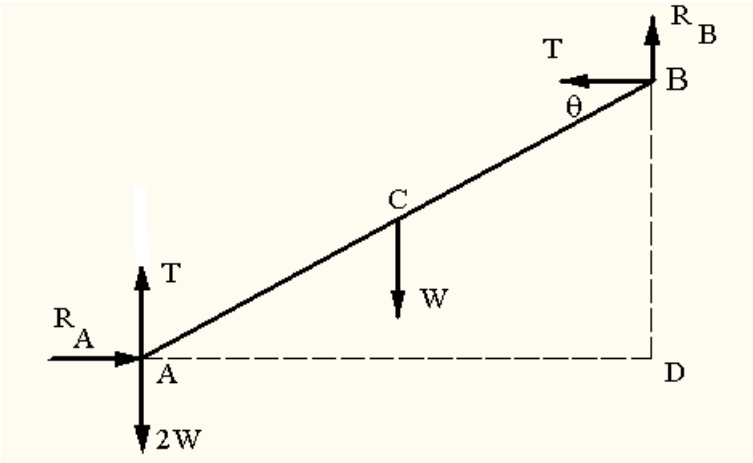
$T = \frac{2.5wCos\theta}{Cos\theta - Sin\theta} = \frac{2.5w}{1 - \tan\theta}$

$T = 5w$

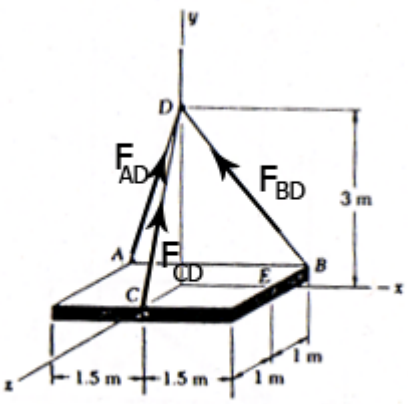
$5w = \frac{0.5w}{1 - \tan\theta}$

$1 - \tan\theta = \frac{1}{2} \qquad \tan\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 26.6^\circ$



حل مسئله ۲



$W = 600Kg$

$W = 600 \times 9.81$

$W = 5886N$

$C(0,0,1)$

$B(1.5,0,-1) \qquad A(-1.5,0,-1) \qquad D(0,3,0)$

$BD = -1.5i + 3j + k$

$CD = 3j - 1k$

$AD = 1.5i + 3j + k$

$$\vec{F}_{AD} = \frac{\overline{F_{AD}}}{\lambda_{AD}} = \overline{F_{AD}}\left(\frac{1.5i + 3j + k}{3.5}\right)$$

$$\vec{F}_{CD} = \frac{\overline{F_{CD}}}{\lambda_{CD}} = \overline{F_{CD}}\left(\frac{3j - k}{3.16}\right)$$

$$\vec{F}_{BD} = \frac{\overline{F_{BD}}}{\lambda_{BD}} = \overline{F_{BD}}\left(\frac{-1.5i + 3j + k}{3.5}\right)$$

$$i \Rightarrow \quad \frac{1.5}{3.5}\overline{F_{AD}} - \frac{1.5}{3.5}\overline{F_{BD}} = 0$$

$$j \quad \frac{3}{3.5}F_{AD} - \frac{1.5}{3.5}F_{CD} + \frac{3}{3.5}F_{BD} - 5886 = 0$$

$$k \quad \frac{1}{3.5}F_{AD} - \frac{1}{3.16}F_{CD} + \frac{1}{3.5}F_{BD} = 0$$

$$i \Rightarrow \quad F_{AD} = F_{BD}$$

$$k \Rightarrow \quad 2 \times F_{AD} \times \frac{1}{3.5} = \frac{1}{3.16}F_{CD}$$

$$\Rightarrow F_{AD} = 0.554F_{CD}$$

$$j \Rightarrow \quad F_{AD}(0.857 + 1.714 + 0.857) = 5886$$

$$\boxed{F_{AD} = 1.717 \quad KN}$$

$$F_{CD} = \frac{1717}{0.554}$$

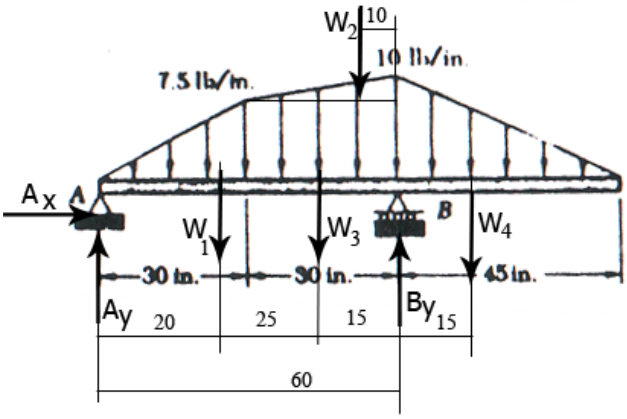
$$\boxed{F_{CD} = 3.1 \quad KN}$$

حل مسئله ۳

$$W_1 = \frac{30 \times 7.5}{2} = 112.5 \ lb \quad W_2 = 30 \times \frac{2.5}{2} = 37.5 \ lb$$

$$W_3 = 30 \times 7.5 = 225 \quad lb$$

$$W_4 = \frac{10 \times 45}{2} = 225 \ lb$$



$$\sum M_A = 0 \circlearrowleft^+$$

$$(W_4)(75) - B_y(60) + W_2(50) + W_3(45) + W_1(20) = 0$$

$$(225)(75) - B_y(60) + 37.5(50) + 225(45) + 112.5(20) = 0$$

$$60B_y = 16875 + 1875 + 10125 + 2250$$

$$60B_y = 31125 \qquad B_y = 519 \qquad 1b \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 \qquad A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad Ay - 112.5 - 225 - 37.5 + 517 - 225 = 0$$

$$A_y = 81.3 \qquad 1b \uparrow$$

حل مسئله ۴

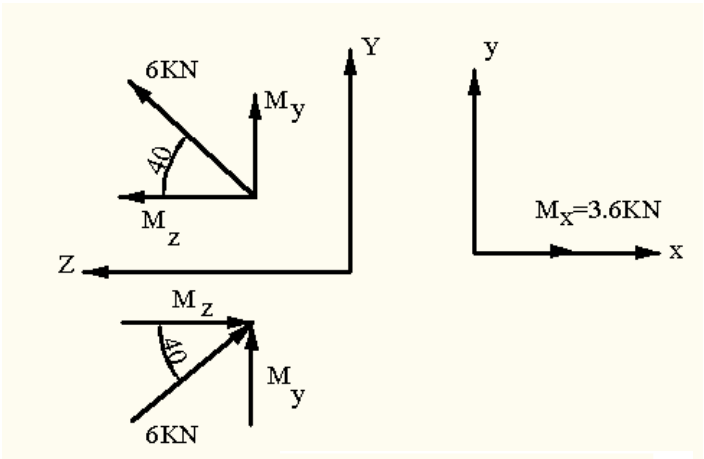
$$M = M_x i + M_y j + M_z k$$

$$M = 3.6i + (6Sin40 + 6Sin40)\, j + (6Cos40 - 6Cos40)k$$

$$M = 3.6i + 7.71\, j$$

$$M = \sqrt{3.6^2 + 7.71^2} = 8.5KN$$

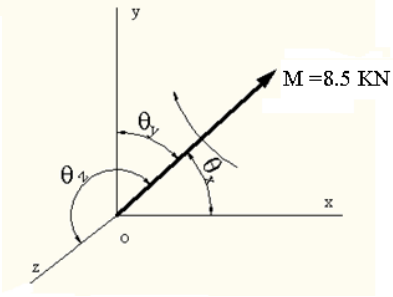
$$\tan\theta = \frac{7.71}{3.6}$$



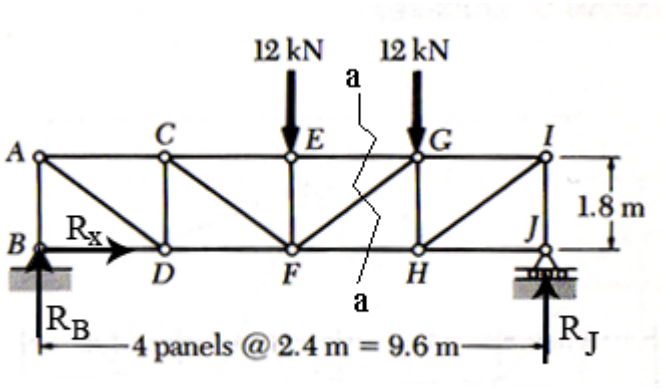
$$Cos\theta_x = \frac{3.6}{8.5} \qquad \theta_x = 65$$

$$Cos\theta_y = \frac{7.71}{8.5} \qquad \theta_y = 25^\circ$$

$$Cos\theta_z = \frac{0}{8.5} = 0 \qquad \theta_z = 90$$



حل مسئله ۵



$\sum M_B = 0 \quad \curvearrowleft^+$

$-9.6(R_j) + 12(3)(2.4) + 12(2)(2.4) = 0$

$9.6R_j = 86.4 + 57.6 = 144$

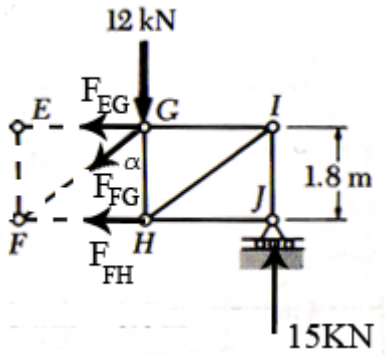
$R_j = 15KN$

برشa-a

$\tan\alpha = \frac{2.4}{1.8}$

$\alpha = 53.13^\circ$

$Cos\alpha = 0.6 \qquad Sin\alpha = 0.8$



$\sum M_G = 0 \quad \curvearrowleft^+$

$-15(2.4) + F_{FH}(1.8) = 0$

$36 = 1.8F_{FH}$

$F_{FH} = 20 \quad KN \quad T$

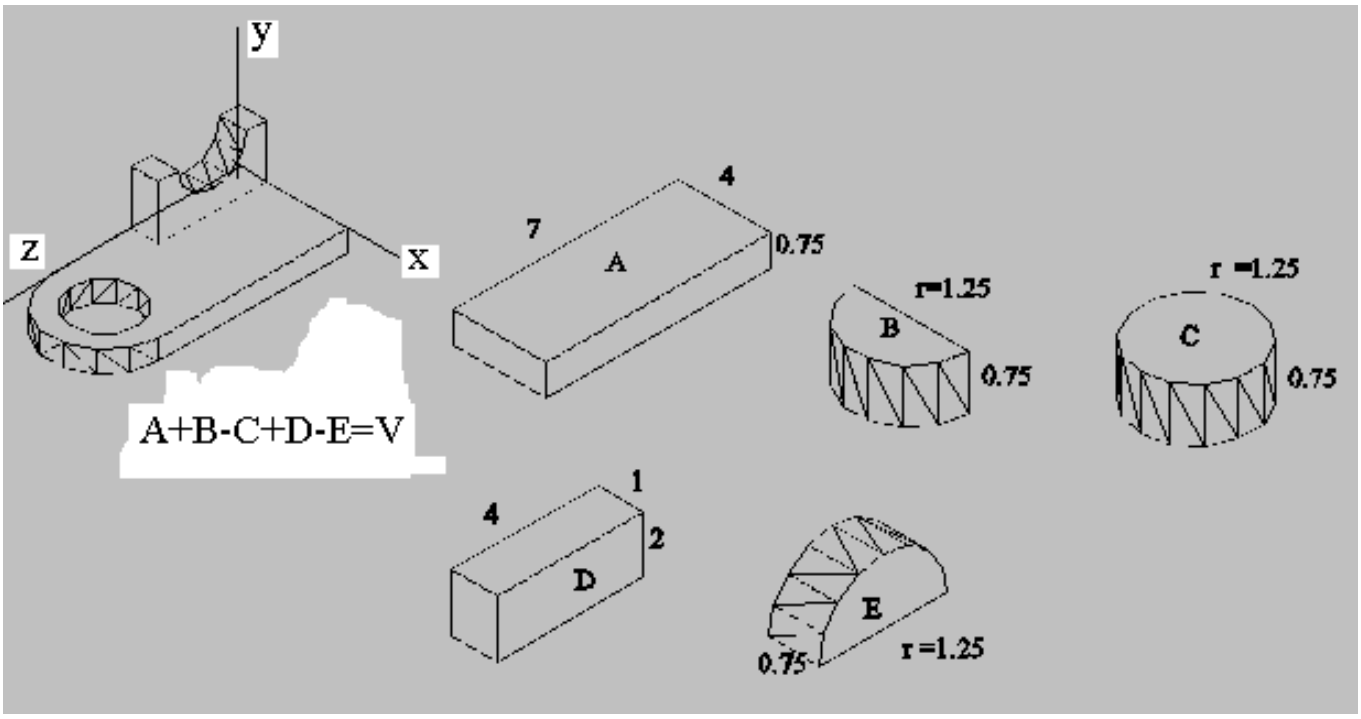
$\sum F_y = 0$

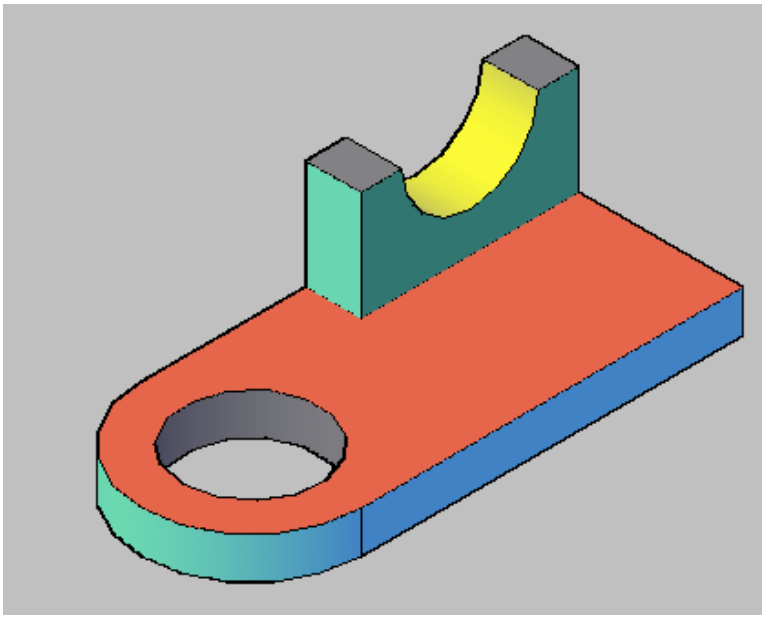
$R_j - 12 - F_{FG}Cos\alpha = 0$

$15 - 12 = F_{FG}Cos\alpha$

$\boxed{F_{FG} = 5 \quad KN \quad T}$

مسئله ۶

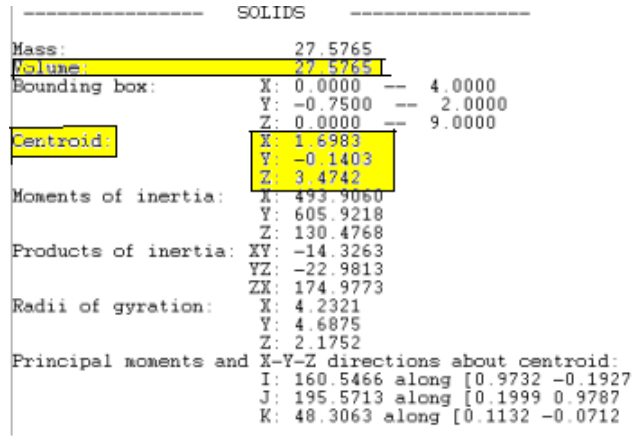




شکل	V in^3	X in	V (x) in^3	Y in	V (y) in^3	Z in	V(Z) in^3
A	7x4x0.75=21	۲	۴۲	$-\frac{0.75}{2} = 0.375$	-7.875	۳,۵	۷۳,۵
B	$\frac{\pi r^2}{2}$x0.75 $= 4.71$	۲	۹,۴۲	"	-1.766	۷,۸۴۸	۳۶,۹۶
-C	πr^2x0.75 $= -3.68$	۲	-۷,۳۶	"	۱,۳۸	۷,۰	-۲۵,۷۶
D	4x2x1=8	۰,۵	۴	۱	۸	۲	۱۶
-E	$\frac{\pi r^2}{2}$x1 $= -2.45$	۰,۵	-۱,۲۲۷	$2 - \frac{4r}{3\pi} = 1.469$	-۳,۶	۲	-۴,۹
مجموع	۲۷,۵۸		۴۶,۸۳۳		-۳,۸		۹۵,۸

$$\bar{x} = \frac{V(x)}{V} = \frac{46.833}{27.56} = 1.698 \ \ in \qquad \bar{Y} = \frac{V(y)}{V} = \frac{-3.86}{27.56} = -0.14 \ \ in \qquad \bar{Z} = \frac{V(z)}{V} = \frac{95.8}{27.56} = 3.47 \ \ in$$

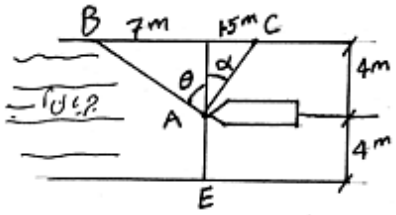
ثقل جسم بوسیله AutoCADمحاسبه شده ملاحظه می شود



"به نام خدا"

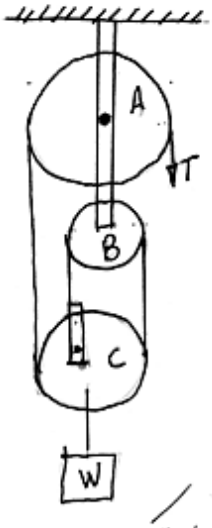
دانشکده فنی فرزانگان پردیس دانشگاه تهران

H.W 1 & H.W 2 برای تحویل دهید.



قایقی مطابق شکل بر سیله سه کابل AB و AC و AE به سه طرف لنگرگاه وصل نشده است، اگر کشش کابل در AE و AB به ترتیب برابر 60N و 40N باشد، مطلوبست نیروی وارد بر قایق را که بوسیله جریان آب لنگرگاه بوجود می آید، همچنین کشش کابل در AC

مطلوبست محاسبه نیروی T برحسب وزن W در قرقره مرکب ذیل.



مسائل کتاب

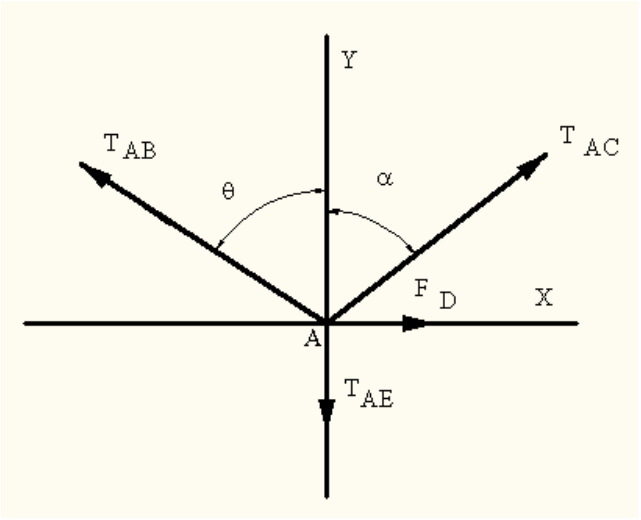
2-2
2-26
2-28
2-40
2-42
2-56
2-66
2-72

صفحه P-237 مشد؛ لاتی

موفق باشید. متحد جواد کشتی

حل مسئله ۱

$T_{AB} = 40N \qquad T_{AE} = 60N \quad F_D \ ? \quad T_{AC} \ ?$



$$\tan\theta = \frac{7}{4} \Rightarrow \theta = 60.25$$

$$\tan\alpha = \frac{1.5}{4} \Rightarrow \alpha = 20.55$$

$$\sum Fy = 0$$

$$1 \rightarrow \quad T_{AC}\cos\alpha + T_{AB}\cos\theta - T_{AE} = 0$$

$$\sum Fx = 0$$

$$2 \rightarrow \quad F_D + T_{AC}\sin\alpha - T_{AB}Sin\theta = 0$$

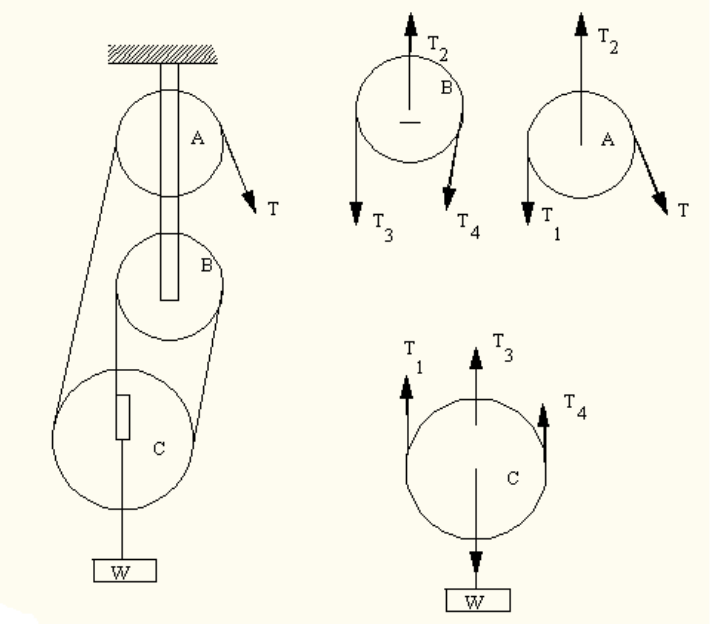
$$-60 + T_{AC}\cos 20.55 + 40\cos 60.25 = 0$$

$$T_{AC} = \frac{60 - 40\cos 60.25}{\cos 20.55} = 42.9N$$

$$F_D = 40\sin 60.25 - 42.9\sin 20.55$$

$$F_D = 19.66N$$

مسئله ۲



قرقرهA

$$T_1 = T$$

$$\sum Fy = 0$$

$$T_2 = 2T_1 = 2T$$

قرقرهB

$$T_3 = T_4$$

$$\sum Fy = 0$$

$$-T_2 - T_4 - T_3 = 0$$

$$T2 = -2T_3 = -2T_4$$

قرقرهC

$$T_1 = T_4$$

$$\sum Fy = 0$$

$$T_1 + T_3 + T_4 = W \qquad \Rightarrow\Rightarrow$$

$$T_4 + T_3 + T_4 = W$$

$$T_4 + T_4 + T_4 = W$$

$$T_1 + T_1 + T_1 = W$$

$$T + T + T = W$$

$$T = \frac{1}{3}W$$

(به نام خدا) تاریخ ۸۹/۲/۸

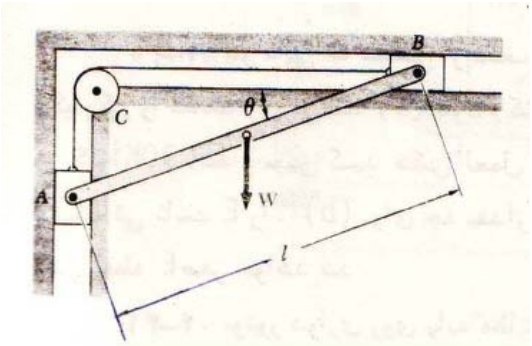
نام ونام خانوادگی:---------- مدت :۲ ساعت

گروه :---------- امتحان میان ترم استاتیک

دانشکده فنی فومن

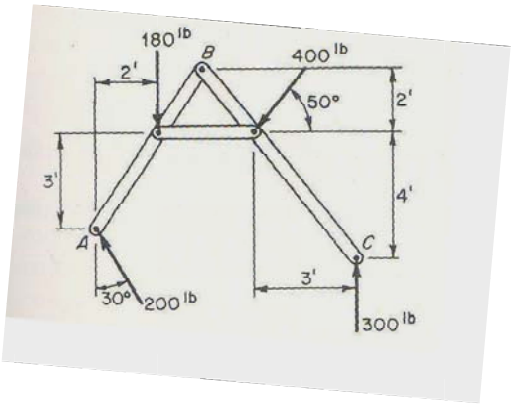
توجه :ترسیم وتوضیح شکل و رسمFBD ،در هر مسئله ای در خور اهمیت است و از هر گونه علامت غیر اصولی و غیر استاندارد خود داری فرمائید و توجه کنید که رعایت اصول نوشتاری استاتیک در خور اهمیت است.

۱- میله AB بوزن W از دو طرف به قطعات A به وزن (2W) و B به وزن (W)متصل و می توانند آزادانه در ناودانک مطابق شکل زیر حرکت نمایند وزنه ها بواسطه طناب قابل کششی که از روی قر قره C عبور نموده بیکدیگر وصل شده است. کشش طناب را بر حسب W,θبدست آورید.ثانیاً مقدار زاویهθ را برای حالتی که کشش در طناب برابر5W باشد معین کنید.



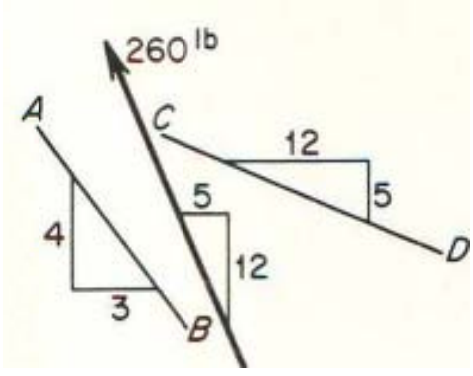
بارم (۴نمره)

۲- مطلوبست برآیند نیروهای شکل زیر . فاصله نیروی معادل از نقطهA را پیدا کنید ونیروی معادل با کدام بازویBC,AB بر خورد می کند،مختصات نقطه بر خورد را حساب کنید.



بارم (۶نمره)

۳- نیروی260lb را به دو نیرو، در راستایAB وCD تجزیه کنید.

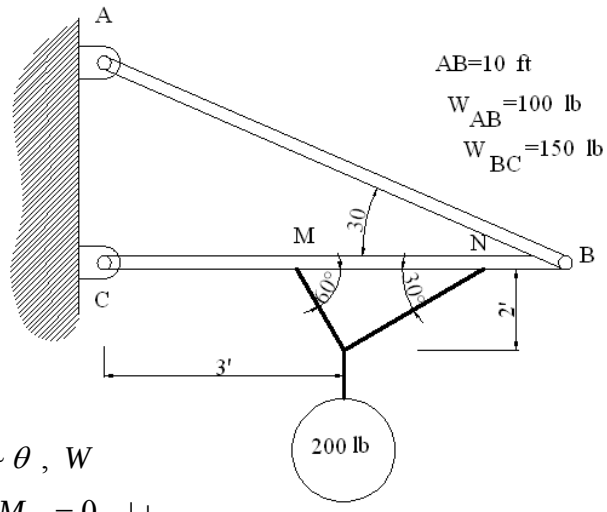


بارم (۴ نمره)

۴- مطلوبست نیروهای عکس العمل در نقاط A,C شکل زیر،وزن بازویBC,AB به ترتیب ۱۰۰و۱۵۰ پوند هستند.طول بـازوی AB ۱۰ فوت است.

A, C پین هستند

بارم (۶نمره)



موفق باشید.

جواد تسکینی

حل مسئله ۱

$T \sim \theta \ , \ W$

$\sum M_O = 0 \ \curvearrowleft +$

$RA\ (\frac{1}{2} Sin\theta) - T\ \frac{1}{2} Cos\theta$

$+ RB(\frac{1}{2})\ Cos\theta + T(\frac{1}{2} Sin\theta) = 0$

$R_A\ Sin\theta - T\ Cos\theta + R_B\ Cos\theta + T\ Sin\theta = 0$

$\sum F_x = 0$

$-T + R_A = 0 \qquad R_A = T$

$\sum F_y = 0$

$T - W + R_B = 0 \qquad R_B = W - T$

$T\ Sin\theta - T\ Cos\theta + (W - T)\ Cos\theta + T\ Sin\theta = 0$

$T\ Sin\ \theta - T\ Cos\ \theta + W\ Cos\ \theta - TCos\ \theta + T\ Sin\ \theta = 0$

$2T\ Sin\theta - T\ Cos\theta + W\ Cos\theta - T\ Cos\theta + T\ Sin\theta = 0$

$2T\ Sin\theta - 2T\ Cos\theta = -W\ Cos\theta$

$2T\ (\tan\theta - 1) = -w$

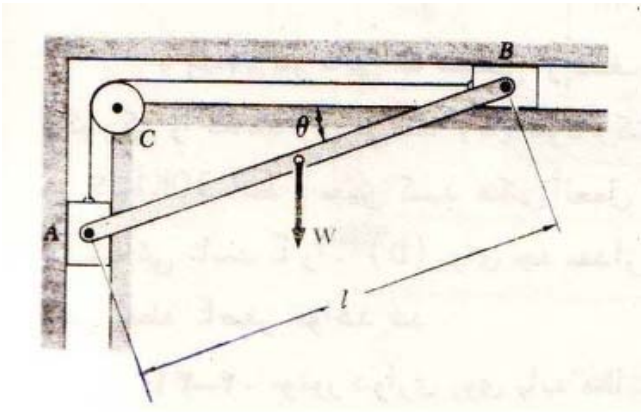
$T = \frac{W}{2}\ (\frac{1}{1 - \tan\theta})$

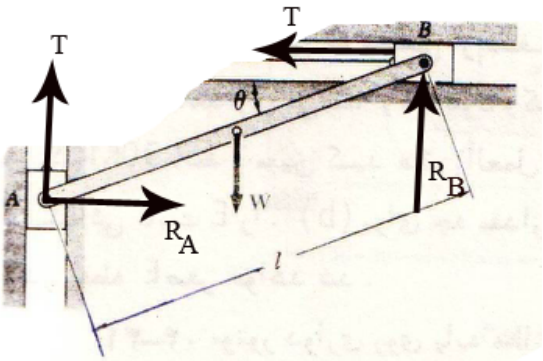
b) $T = 2w$

$4w = w\ \frac{1}{1 - \tan\theta}$

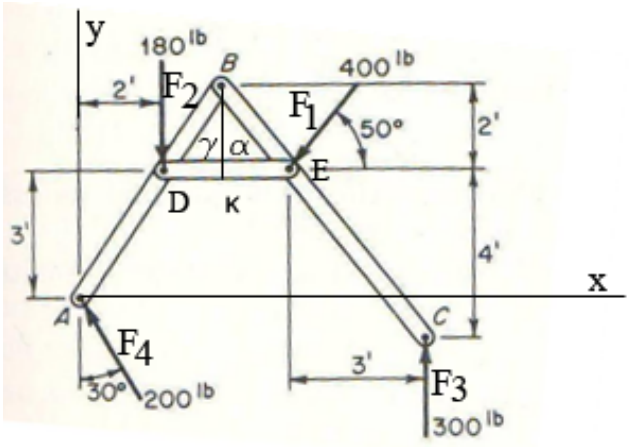
$1 - \tan\theta = \frac{1}{4} \qquad \tan\theta = 1 - \frac{1}{4}$

$\tan\theta = \frac{3}{4} \qquad \theta = 36.9^\circ$





حل مسئله ۲



$\tan \propto = {}^{4}/_{3} = \dfrac{2}{KE}$

$KE = 1.5$

$\tan \gamma = {}^{3}/_{2} = \dfrac{2}{Dk}$

$DK = 1.33$

$DE = 1.5 + 1.33 = 2.83$

E(4.83,3) , C(7.83,-1) , D(2,3) , B(3.33,5)

$\breve{F_1} = -400 \cos 50 i - 400 \ sim \ 50 \ j$

$\breve{F_1} = -257.1 \ i - 306.4 \ j$

$\breve{F_2} = -180 \ j \qquad \breve{F_3} = +300 \ j$

$\breve{F_4} = -200 \ sim 30 \ i + 200 \cos 30 \ j = -100i + 173.$

$\breve{R} = \breve{F_1} + \breve{F_2} + \breve{F_3} + \breve{F_4}$

$\breve{R} = -257.1 \ i - 306.4 \ j - 180 \ j + 300 \ j - 100I + 173.2 \ j$

$\breve{R} = -357.1 \ i - 13.2 \ j$

$\tan \theta = \dfrac{Ry}{Rx}$

$tan\theta = \dfrac{13.2}{357.1} \qquad \theta = 2.11^0$

$\tan \theta = {}^{1}/_{27} = 0.037$

$\bar{R} = \sqrt{(537.1)^2 + (13.2)^2} = 357.4 \ lb$

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{r_{AD}} \times \overrightarrow{F2} + \overrightarrow{r_{AE}} x \overrightarrow{F1} + \overrightarrow{(r)_{AC}} \times \breve{F3}$

$\overrightarrow{M_A} = (2i + 3i) \times (-180 \ j) + (4.38 \ i + 3j) \times (-257.1 \ i - 366.4 \ j)$

$+(7.83 \ i - j) \times 300 \ j$

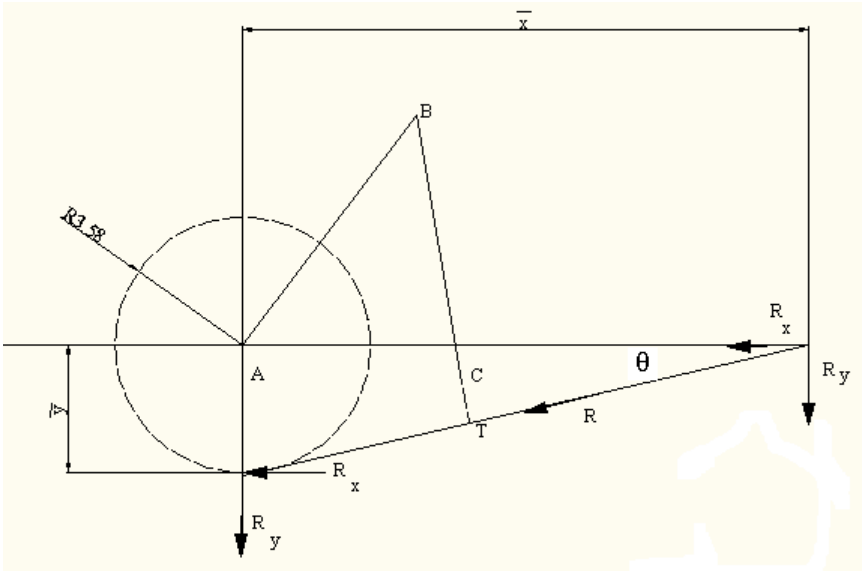
$\overrightarrow{M_A} = -360 \ K - 1480 \ K + 771.3 \ K + 2349 \ K$

$\overrightarrow{M_A} = 1280.3 \ K \qquad \overline{MA} = 1280.3 \qquad ft - lb$

$r = d = \dfrac{\overline{MA}}{R} = \dfrac{1280.3}{357.4} = 3.58 \ ft$

$\bar{X} = \dfrac{M}{Ry} = \dfrac{1280.3}{13.2}$

$\bar{X} = 97 \quad ft$



$$\bar{Y} = \frac{M}{Rx} = \frac{1280.3}{357.1}$$

$$\bar{y} = 3.58 \qquad ft$$

نیروی R بازوی BC را در امتداد آن قطع می‌کند. (خارج از هر دو بازو است) چون برخورد معادله R , BC مختصات آن را نشان می‌دهد.

معادله BC

$$y - 4.83 = \frac{1 + 3.33}{5 - 7.83}(x - 3.33)$$

$$\begin{cases} y = -1.53\,x + 9.95 \\ y = 0.037x - 3.58 \end{cases}$$

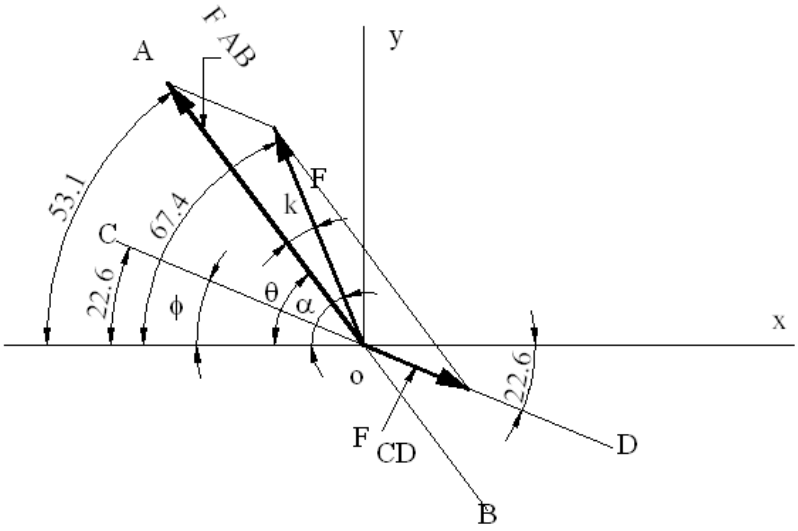
$$1.53x + 0.037\,x = 13.53$$

$$1.567x = 13.53 \qquad X = 8.63 \quad ft$$

$$y = (0.037)(8.63) - 3.58 = -3.3\,ft$$

مختصات برخورد (که خارج از BC است) $T\ (8.63\ ,\ -3.3)$

حا . مسئله ۳



$\tan\theta = \frac{4}{3}$ $\theta = 53.1^\circ$

$\tan\phi = \frac{5}{12}$ $\phi = 22.6^\circ$

$\tan\alpha = \frac{12}{5}$ $\alpha = 67.4$

$\hat{M} = 22.6 + 90 + 22.6$

$\hat{K} = \gamma - 53.1$

$\hat{K} = 67.4 - 53.1 = 14.3^\circ$

$\hat{K} + \hat{M} + \hat{N} = 180^\circ$ در مثلث KON

$14.3 + 135.2 + \hat{N} = 180^\circ$ $\hat{N} = 30.5^\circ$

قانون سینوس ها

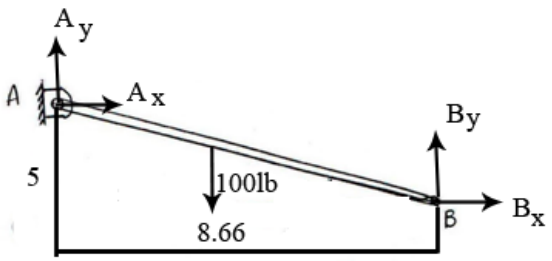
$$\frac{260}{\sin N} = \frac{F_{AB}}{\sin M} = \frac{F_{CD}}{\sin K}$$

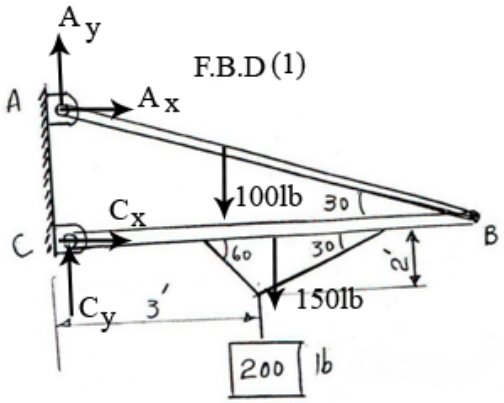
$$\frac{260}{\sin 30.5} = \frac{F_{AB}}{\sin 135.2} = \frac{F_{CD}}{\sin 14.3}$$

$$F_{AB} = \frac{260}{\sin 30.5} \times \sin 135.2 = 361 \ \ N \ \ As \ \ shown$$

$$F_{CD} = \frac{260}{\sin 30.5} \times \sin 14.3 = 126.5 \ \ N \ \ As \ \ shown$$

حل مسئله ۴





$$AB = 10 \quad ft$$
$$BC = 10\cos 30$$
$$BC = 8.66$$
$$AC = {}^{10}/_{2} = 5$$
$$\sum M_C = 0 \qquad \curvearrowright^{+} \text{F.B.D(1)}$$
$$5(AX) + 100\left(\frac{8.66}{2}\right) + 150\left(\frac{8.66}{2}\right) + 200\,(3) = 0$$
$$A_X = -336.5 \qquad 1b$$

F.B.D بازوی AB

$$\curvearrowright^{+} \sum M_B = 0 \qquad 5(AX) + 8.66\,(Ay) - 100\left(\frac{8.66}{2}\right) = 0$$
$$5(-336.5) + 8.66\,Ay - 100\,(4.33) = 0$$
$$Ay = 244 \qquad Ib \quad \uparrow$$
$$\sum FX = 0 \qquad Ax + Cx = 0 \qquad Cx = 336.5 \qquad Ib \quad \rightarrow$$
$$\sum Fy = 0 \qquad 244 - 100 - 150 + Cy - 200 = 0$$
$$Cy = 206 \quad Ib \quad \uparrow$$
$$\vec{C} = 336.5\,i + 2.6\,j$$
$$\vec{A} = -336.5\,i + 244\,j$$

گروه :---------- (به نام خدا) تاریخ ۸۹/۲/۲۹

نام ونام خانوادگی:---------- مدت :۲ ساعت

امتحان آزمایشی استاتیک

دانشکده فنی فومن

توجه : ترسیم وتوضیح شکل و رسمFBD ،در هر مسئله ای در خور اهمیت است و از هر گونه علامت غیر اصولی و غیر استاندارد خود داری فرمائید و توجه کنید که رعایت اصول نوشتنی استاتیک در خور اهمیت است.

همه مسائل از کتاب استخراج شده است

۱- چهار نیروی افقی بر روی یک صفحه ربع دایره بطور قائم وارد می شود.شعاع صفحه ۲۵۰ میلی متر می باشد.معین کنید مقدار ونقطه اثر برایند

جهار نیروی وارد را هرگاه p=40 N باشد.

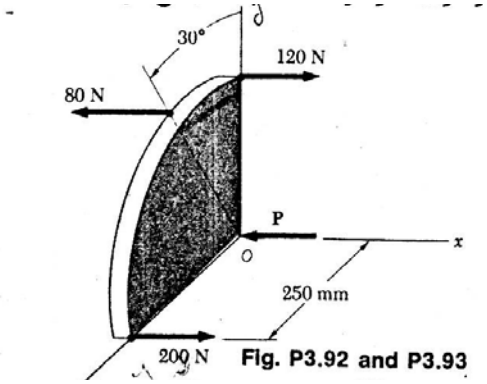
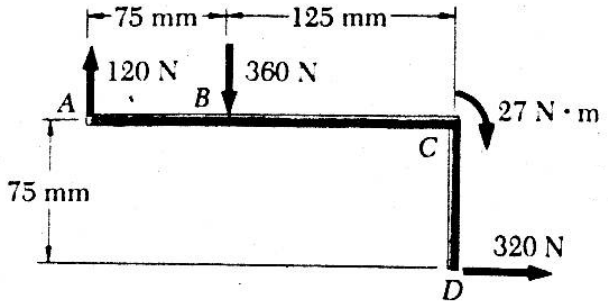


Fig. P3.92 and P3.93

۲- مطلوبست برآیند سیستم نیروها مطابق شکل و نقطه تقاطع برآیند با خطوط ACوCD



۳- مطلوبست عکس العمل های نقاطA و B را

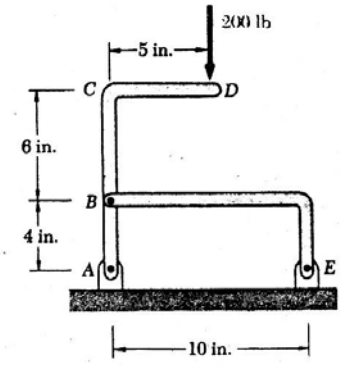
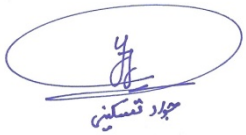


Fig. P4.52

موفق باشید.

محمد جواد تسکینی



جواب مسئله ۱ در مسئله۹۲-۳ صفحه(۱۶۷)این کتاب آمده است
جواب مسئله ۲ در مسئله۸۲-۳صفحه(۱۶۳) این کتاب آمده است
جواب مسئله ۳ در مسئله۵۲-۴صفحه(۱۹۵) این کتاب آمده است

(به نام خدا) تاریخ ۸۹/۳/۲۲

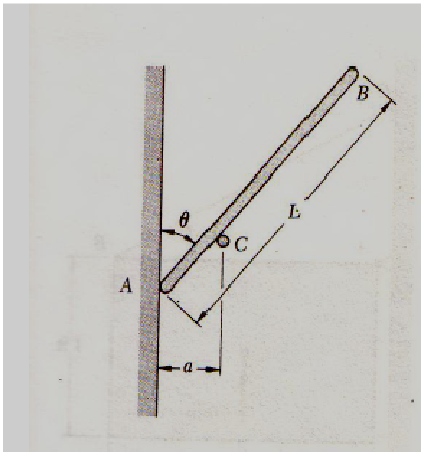
نام ونام خانوادگی:---------- مدت :۲/۵ ساعت

گروه:..... امتحان نهائی استاتیک

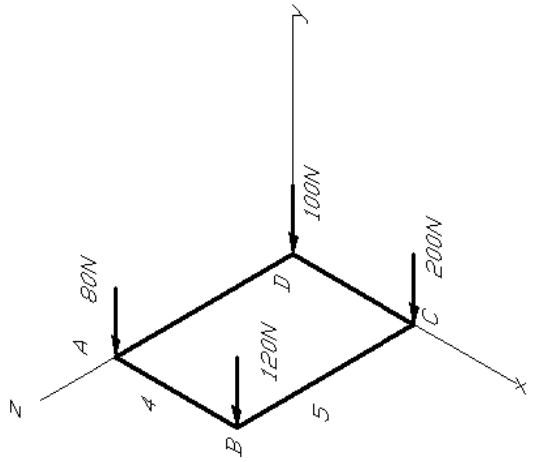
دانشکده فنی فومن

توجه : ترسیم وتوضیح شکل و رسمFBD ،در هر مسئله ای در خور اهمیت است و از هر گونه علامت غیر اصولی و غیر استاندارد خود داری فرمائید و توجه کنید که رعایت اصول نوشتنی استاتیک در خور اهمیت است.

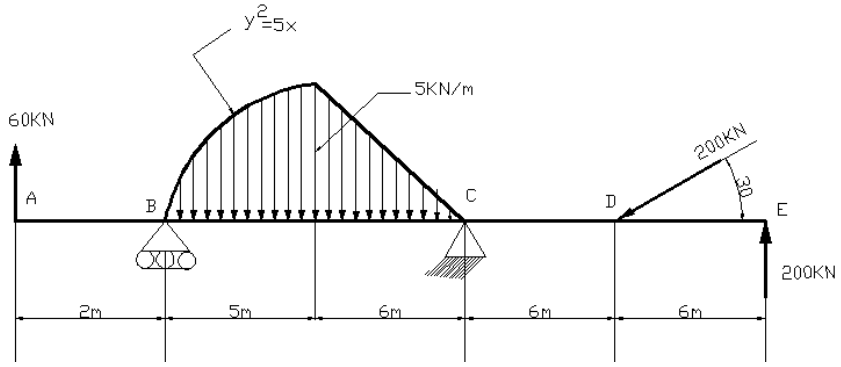
۱- میله نازک به طول L و وزن W بین دیوار و گل میخ C قرار گرفته ،از اصطکاک صرف نظر می شود. معین کنید زاویه Q بین میله و دیوار در حالت تعادل را . (۴ نمره)



۲- پی بتنی مستطیل شکل چهار ستون را مطابق شکل نگهه می دارد، مقدار و نقطه اثر برآیند چهار بار را تعین کنید.ثانیاً نقطه اثر 200Nبار اضافی که باید بر پی وارد کرد تا برآیند پنج بار از مرکز پی بگذرد.(AB=4 mو BC=5 m) . (۴ نمره)

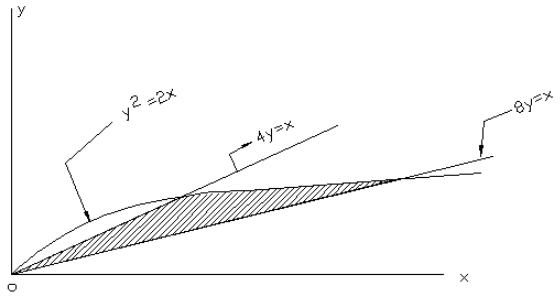


۳- نیروهای عکس العمل R_C وR_B را در نقاط B و C را بدست آورید. (۳ نمره)

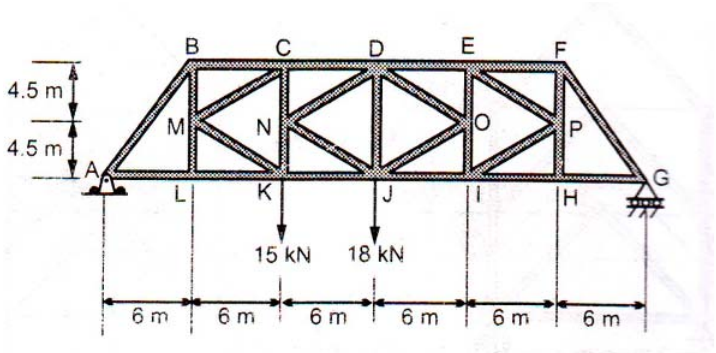


۴- دو معادله خطی ($4y = x$ و $8y = x$) ومعادله غیر خطی ($y^2=2x$) را مطابق شکل زیر قطع می کنند، مطلوبست مرکز ثقل قسمت هاشور خورده را.

ثانیاً حجم حاصل از دوران این شکل (هاشور خورده)حول محور x ها را بدست آورید. (۵ نمره)

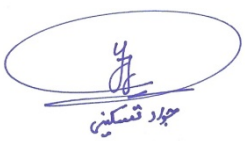


۵- مطلوبست نیروهای موجود در بازوهای DE و JI و DO خرپای مدل K شکل زیر را. (۴ نمره)



موفق باشید.

محمد جواد تسکینی



جواب مسئله ۱ در مسئله۵۶-۴صفحه(۱۹۶) این کتاب آمده است

جواب مسئله ۲

$B(4,0,5) \quad \overrightarrow{DB} = 4i + 5k$

$\sum Fy = 0$

$\vec{R} = -100j - 200j - 120j - 80j = -500j$

$\sum M_D = 0 \curvearrowleft^+$

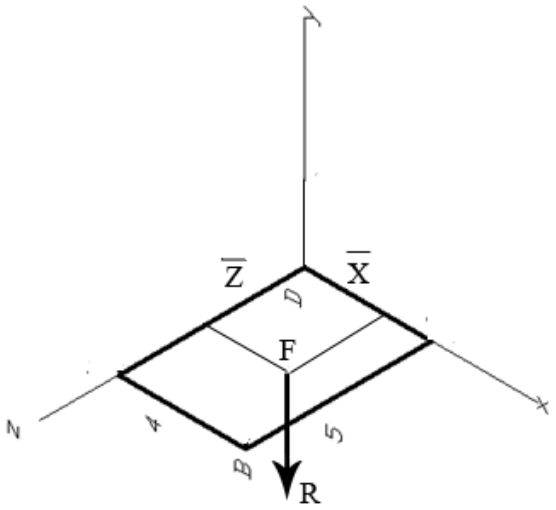
$\sum M_D = \overrightarrow{r_{AD}} x - 80j + \overrightarrow{r_{DB}} x - 120j + \overrightarrow{r_{DC}} x - 200j$

$\sum M_D = (5k)x(-80j) + (4i + 5k)x(-120j) + (4i)x(-200j)$

$\sum M_D = -400(-i) - 480(k) - 600(-i) - 800(k)$

$\sum M_D = -400(-i) - 480(k) - 600(-i) - 800(k)$

$M_D = 1000i - 1280k$



طبق قضیه وارینیون

$M_D = (\overline{X}i + \overline{Z}k)x(-500j)$

$-500\overline{X}k - 500\overline{Z}(-i) = 1000i - 1280k$

$500\overline{Z} = 1000 \qquad \overline{Z} = 2\ m$

$-500\overline{X} = -1280 \qquad \overline{X} = 2.56\ m$

مرکز پیO(2,0,2.5) F(2.56,0,2) E(x,0,z)

طبق قضیه وارینیون

$\overrightarrow{r_{OE}} x(-200j) = \overrightarrow{r_{OF}} x(-500j)$

$\left[(x-2)i + (z-2.5)k\right]x(-200j) = (0.56i - 0.5k)x(-500j)$

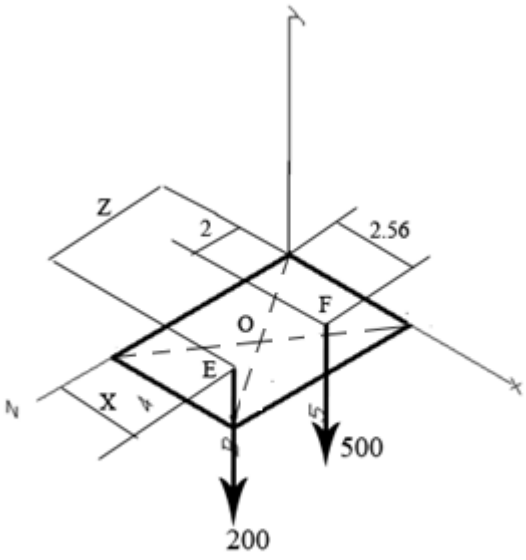
$(x-2)(-200)k + (z-2.5)(-200)(-i) = -280k + 250(-i)$

$i \Rightarrow 200(z-2.5) = -250$

$Z - 2.5 = -1.25 \qquad Z = 1.25\ m$

$k \Rightarrow -200(x-2) = -280$

$x - 2 = 1.4 \quad x = 3.4\ m$



مسئله ۳

$y = 5KN/m$

$25 = 5L \quad L = 5\ m$

$dw = ydx$

$w = \int_0^5 (5x)^{\frac{1}{2}} dx$

$w = \int_0^5 (5)^{\frac{1}{2}} (x)^{\frac{1}{2}} dx = (5)^{\frac{1}{2}} (5)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}$

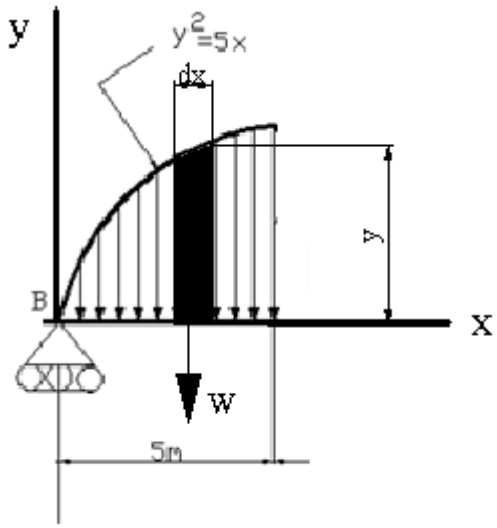
$w = \frac{50}{3} = 16.66KN$

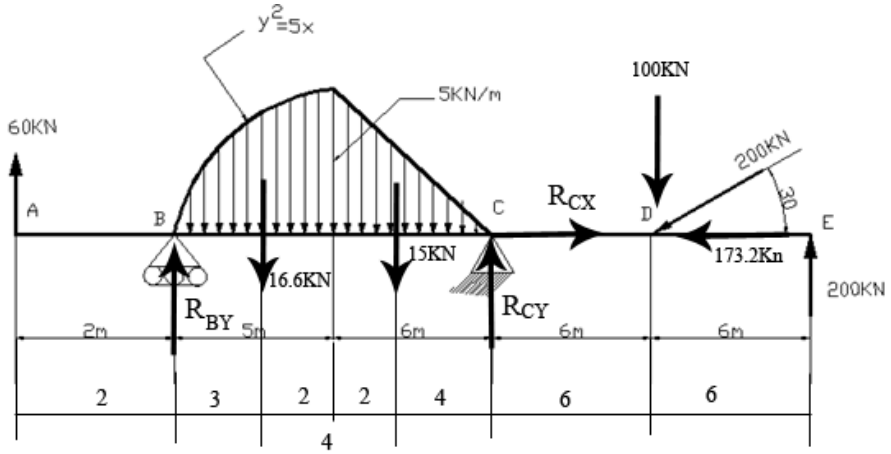
$w\bar{x} = \int x_{el} dw = \int_0^5 x(5x)^{\frac{1}{2}} dx$

$w\bar{x} = \int_0^5 \sqrt{5} x^{\frac{3}{2}} dx = \sqrt{5}(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}) = 125(\frac{2}{5})$

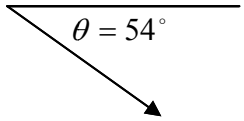
$\bar{x} = 3\ m$

$w_1 = \frac{5x6}{2} = 15\ KN$

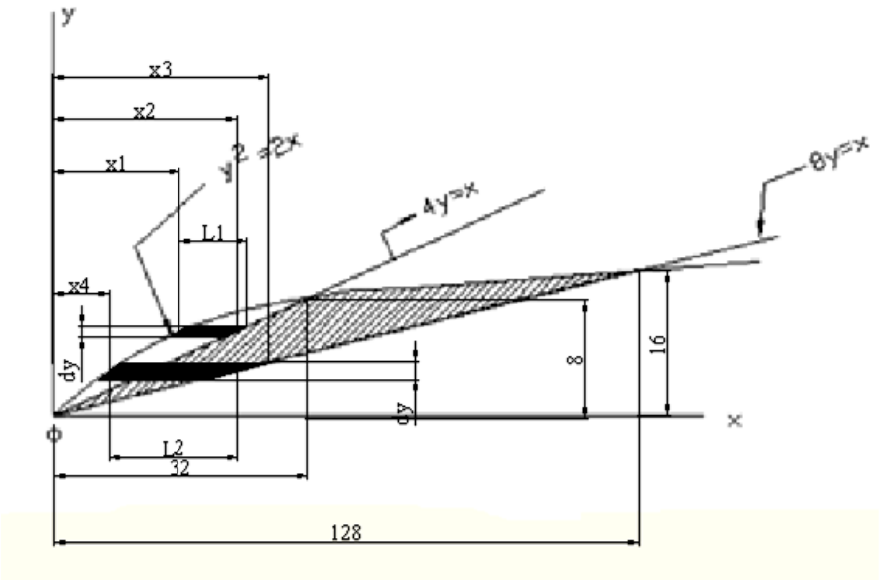




$$\sum Fx = 0$$
$$R_{CX} - 173.2 = 0$$
$$R_{CX} = 173.2 \ \ KN \rightarrow$$
$$\tan\theta = \frac{238.6}{173.2} = 1.377$$
$$\theta = 54^{\circ}$$
$$R_C = \sqrt{(173.2)^2 + (238.6)^2}$$
$$R_C = 294.8 \ \ KN$$



جواب مسئله ۴



$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ 4y = x \end{cases} \Rightarrow y^2 = 2(4y) = 8y \Rightarrow y = 8$$
$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ 8y = x \end{cases} \Rightarrow y^2 = 2(8y) = 16y \Rightarrow y = 16$$

$$\begin{cases} y = 8 \\ x = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 16 \\ x = 128 \end{cases}$$

$$dA_1 = L_1 dy = (X_2 - X_1)dy$$

$$dA_2 = L_2 dy = (X_3 - X_4)dy$$

$$dA = dA_2 - dA_1$$

$$A = \int_0^{16} (8y - \frac{y^2}{2})dy - \int_0^{8} (4y - \frac{y^2}{2})dy$$

$$A = \left[(4y^2 - \frac{1}{6}y^3) \right]_0^{16} - \left[(2y^2 - \frac{1}{6}y^3 \right]_0^{8}$$

$$1\ A = 4(16)^2 - \frac{1}{6}(16)^3 - \left[2(8)^2 - \frac{1}{6}(8)^3 \right]$$

$$A = 298.7 \quad cm^2$$

$$\overline{X}A = \int_0^{16} X_{el} dA_2 - \int_0^{8} X_{el} dA_1$$

$$A_2 \Rightarrow X_{el} \Rightarrow X_1 + \frac{L_1}{2} = X_1 + \frac{X_2 - X_1}{2} = \frac{X_2 + X_1}{2}$$

$$A_1 \Rightarrow X_{el} \Rightarrow X_4 + \frac{L_2}{2} = X_4 + \frac{X_3 - X_4}{2} = \frac{X_4 + X_3}{2}$$

$$\overline{X}A = \int_0^{16} (8y - \frac{y^2}{2})(\frac{8y + \frac{y^2}{2}}{2})dy - \int_0^{8} (4y - \frac{y^2}{2})(\frac{4y + \frac{y^2}{2}}{2})dy$$

$$\overline{X}A = \frac{1}{2} \int_0^{16} [(8y)^2 - (\frac{y^2}{2})^2]dy - \frac{1}{2} \int_0^{8} [(4y)^2 - (\frac{y^2}{2})^2])dy$$

$$\overline{X}A = \frac{1}{2} \left[\frac{64}{3}y^3 - \frac{1}{20}y^5 \right]_0^{16} - \frac{1}{2} \left[\frac{16}{3}y^3 - \frac{1}{20}y^5 \right]_0^{8}$$

$$\overline{X}(298.7) = 43691 - 26214 - 1365 + 819$$

$$\overline{X} = 56.7 \ cm$$

$$\overline{Y}A = \int_0^{16} Y_{el}\,dA_2 - \int_0^{8} Y_{el}\,dA_1$$

$$\overline{Y}A = \int_0^{16} y(8y - \frac{y^2}{2})\,dy - \int_0^{8} y(4y - \frac{y^2}{2})dy$$

$$\overline{Y}A = \int_0^{16} (8y^2 - \frac{y^3}{2})\,dy - \int_0^{8} (4y^2 - \frac{y^3}{2})dy$$

$$\overline{Y}A = \left[\frac{8}{3}y^3 - \frac{1}{8}y^4\right]_0^{16} - \left[\frac{4}{3}y^3 - \frac{1}{8}y^4\right]_0^{8}$$

$$\overline{Y}(298.7) = 10922 - 8192 - 683 + 512$$

$$\overline{Y} = 8.6\ cm$$

طبق قضیه پاپی یوس

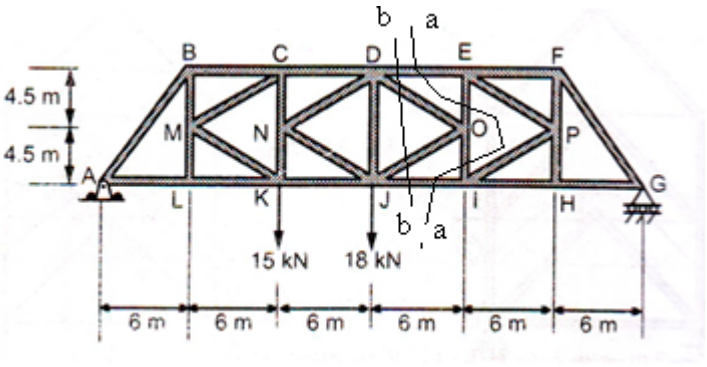
$$\forall = (2\pi\overline{Y})A$$

$$\forall = (2\pi)(8.6)(298.70$$

$$\forall = 16140 \quad cm^3$$

$$\boxed{\forall = 16140 \quad cm^3}$$

جواب مسئله ۵



$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$$

$$Gy(36) - 18(18) - 15(12) = 0$$

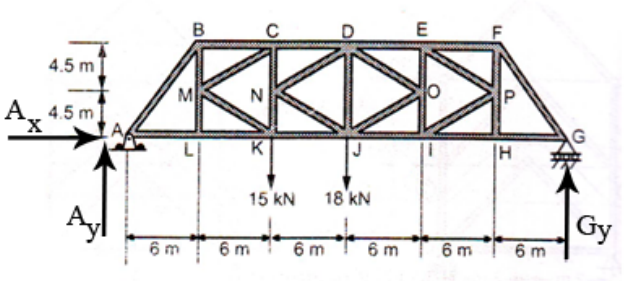
$$Gy = 14KN \uparrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$-15 - 18 + Ay + 14 = 0$$

$$Ay = 19\ \ KN \uparrow$$

$$\sum Fx = 0 \quad \Rightarrow Ax = 0$$



برش a-a

$\sum M_E = 0 \quad \curvearrowleft^{+}$

$-14(12) + F_{IJ}(9) = 0$

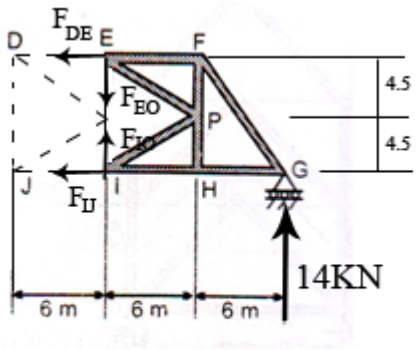
$F_{IJ} = 18.66 \ \ KN \qquad T$

$\sum Fx = 0$

$-F_{DE} - F_{IJ} = 0$

$-F_{De} = 18.66$

$F_{De} = 18.66 \ \ KN \qquad C$



a-a

برش b-b

$\tan\theta = \frac{6}{4.5} \quad \theta = 53.1$

$\sum M_D = 0 \quad \curvearrowleft^{-}$

$14(18) - F_{IJ}(9) - F_{OJ}\cos\theta(6) -$

$(14)(18) - (18.66)(9) - F_{OJ}(3.6)$

$7.2F_{OJ} = 84$

$F_{OJ} = 11.68 \ \ KN \qquad T$

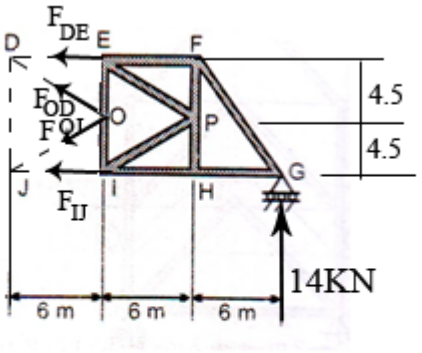
$\sum Fx = 0$

$-F_{DE} - F_{IJ} - F_{OJ}Sin\theta - F_{DO}Sin\epsilon$

$F_{DO}Sin\theta = 18.66 - 18.66 - F_{OJ}S$

$F_{DO} = -F_{OJ} = -11.68$

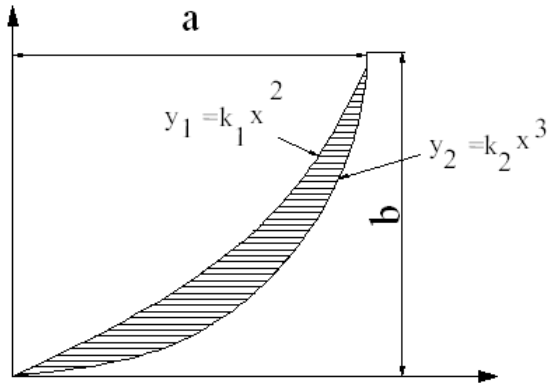
$F_{DO} = 11.68 \ \ KN \quad C$



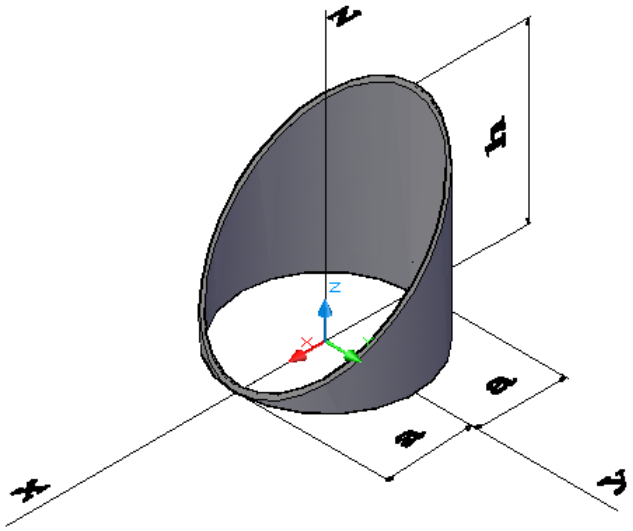
b-b

Homework#3

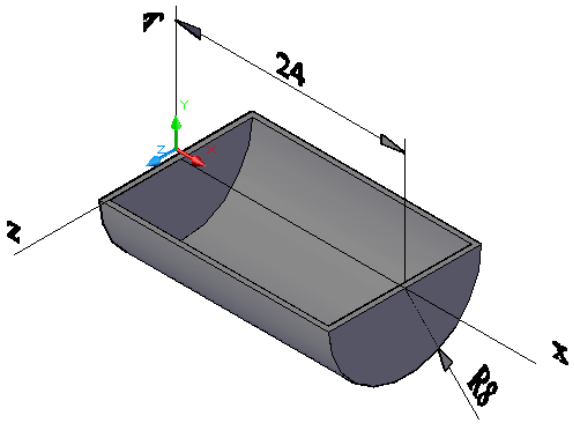
۱ - از راه آنتیگرال گیری مرکز ثقل شکل زیر را بدست آورید



۲- از راه آنتیگرال گیری مرکز ثقل شکل زیر را بدست آورید.



۳- مرکز ثقل شکل زیر را بدست آورید.



جواب مسئله ۱

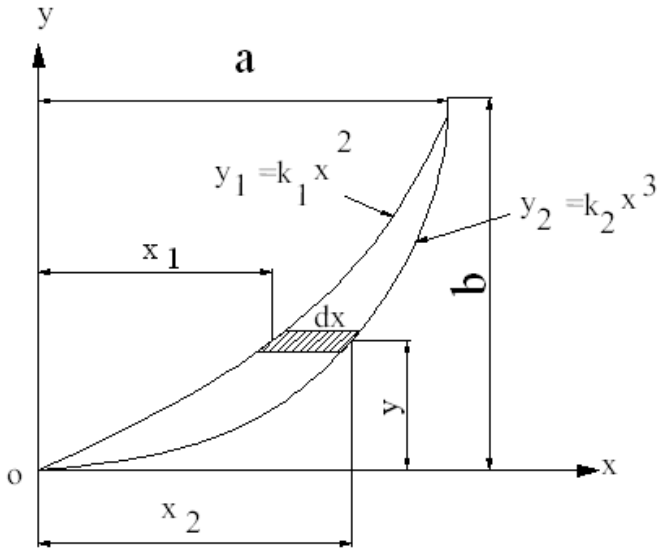
$b = k_2\ a^3$

$K_2=b/a^3$

$Y_2=b/a^3x^3$

$Y_1=b/a^2x^3$

$X=x_2-x_1$ $dA=xdy$



$dA=(\frac{ay^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}-\frac{ay^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}})dy$

$A=\int_0^b(\frac{ay^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}-\frac{ay^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}})dy$

$A=[\frac{a}{b^{1/3}}(\frac{y^{4/3}}{1+\frac{1}{3}})-\frac{a}{b^{1/2}}\frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}}]_0^b$

$A=\frac{a}{b^{1/3}}(\frac{b^{4/3}}{1+\frac{1}{3}})-\frac{a}{b^{1/2}}\frac{b^{3/2}}{\frac{3}{2}}$

$A=\frac{3}{4}ab-\frac{2}{3}ab=\frac{ab}{12}$

$x_{el=}x_1+\frac{x}{2}=x_1+\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{x_2+x_1}{2}$

$y_{el=}y$

$A\bar{x}=\int_0^b x_{el}\,dA=\int_0^b(\frac{x_2+x_1}{2})(x_2-x_1)dy$

$A\bar{x}=\frac{1}{2}\int_0^b({x_2}^2-{x_1}^2)dy$

$A\bar{x}=\frac{1}{2}\int_0^b(\frac{a^2}{b^{2/3}}y^{2/3}-a^2/by)dy$

$A\bar{x}=[\frac{3a2}{5b^{2/3}}y^{2/3}-\frac{a2}{2b}y^2]_0^b$

$A\bar{x}=\frac{3a2}{5b^{2/3}}b^{2/3}-\frac{a2}{2b}b^2=\frac{ab}{20}$

$\frac{ab}{12}\bar{x}=\frac{a2b}{20}$

$\bar{x}=\frac{3a}{5}$

$A\bar{y}=\int_0^b y_{el}\,dA=\int_0^b y(\frac{a}{b^{1/3}}y^{1/3}-\frac{a}{b^{1/2}}y^{1/2})dy$

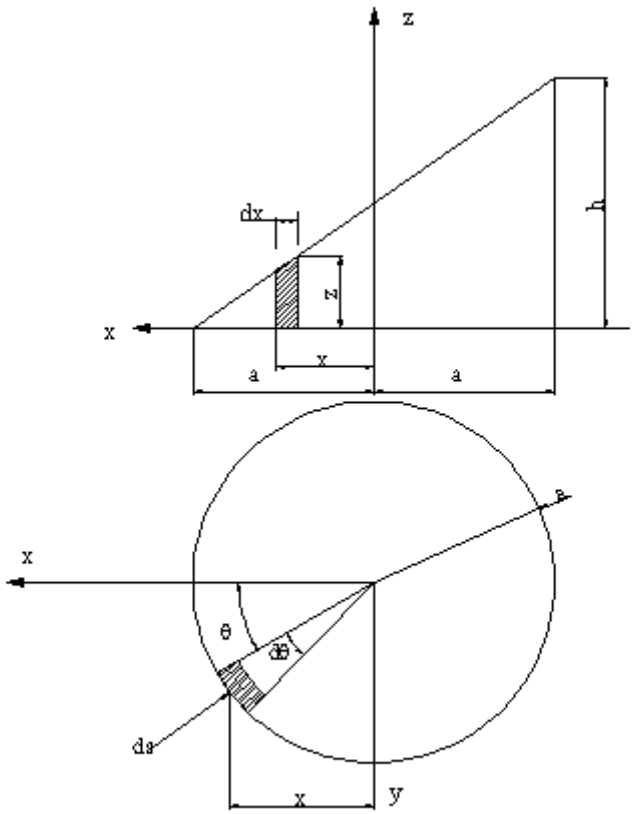
$A\bar{y}=\int_0^b y_{el}\,dA=\int_0^b(\frac{a}{b^{1/3}}y^{4/3}-\frac{a}{b^{1/2}}y^{3/2})dy$

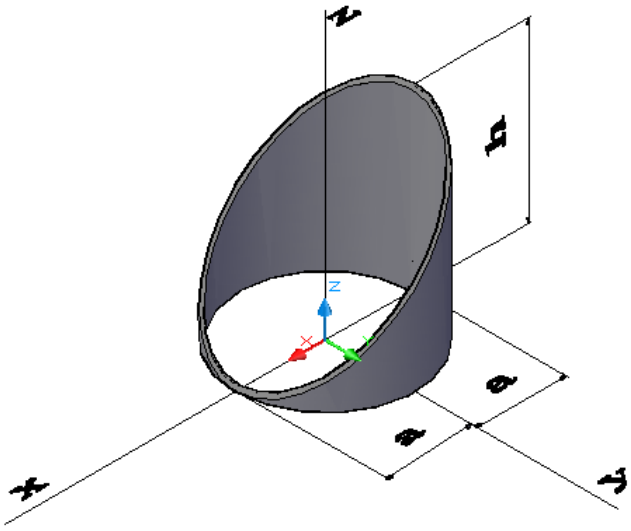
$A\bar{y}=[\frac{3a}{7b^{1/3}}y^{7/3}-\frac{2a}{5b^{1/2}}y^{5/2}]_0^b$

$A\bar{y}=\frac{3a}{7b^{1/3}}b^{7/3}-\frac{2a}{5b^{1/2}}b^{5/2}$

$A\bar{y}=\frac{3a}{7}b^2-\frac{2a}{5}b^2=\frac{ab2}{35}$ $\bar{y}=\frac{12b}{35}$

جواب مسئله ۲





$$x = a\cos\theta$$

$$\frac{z}{h} = \frac{a - x}{2a} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

$$z = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

$$dA = t.ds = ad\theta$$

$$dA = t.a.d\theta$$

$$dV = zdA = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)t.a.d\theta$$

$$dV = \frac{h}{2}(1 - cos\theta)t.a.d\theta$$

$$V = \frac{h}{2}ta\int_0^{2\pi}(1 - cos\theta)d\theta$$

$$V = \frac{h}{2}ta[\theta - sin\theta]_0^{2\pi}$$

$$V = hta\pi$$

$$\bar{z}V = \int z_{el}dV = \int \frac{z}{2}.\frac{h}{2}(1 - cos\theta)t.a.d\theta$$

$$\bar{z}V = \int \frac{h}{4}(1-cos\theta)\frac{h}{2}(1-cos\theta)t.a.d\theta$$

$$\bar{z}V = \frac{h2}{8}t.a\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$\bar{z}V = \frac{h2}{8}t.a\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\theta-2\cos\theta)\,d\theta$$

$$\bar{z}V = \frac{h2}{8}t.a[\theta+\frac{\sin2\theta}{4}+\frac{1}{2}\theta-2\sin\theta]_0^{2\pi}$$

$$\bar{z} = \frac{3}{8}h$$

$$\bar{x}V = \int x_{el}dV = \int_0^{2\pi}(acos\theta)\frac{h}{2}(1-cos\theta)t.a.d\theta$$

$$\bar{x}V = \int_0^{2\pi}\frac{ha2}{2}tcos\theta(1-cos\theta)d\theta$$

$$\bar{x}V = \frac{ha2}{2}t\int_0^{2\pi}(cos\theta-\frac{cos2\theta+1}{2})d\theta$$

$$\bar{x}V = \frac{ha2}{2}t[sin\theta-\frac{sin2\theta}{4}-\frac{1}{2}\theta]_0^{2\pi}$$

$$\bar{x}V = -\pi(\frac{a^2}{2}ht)$$

$$\bar{x} = -\frac{a}{2}$$

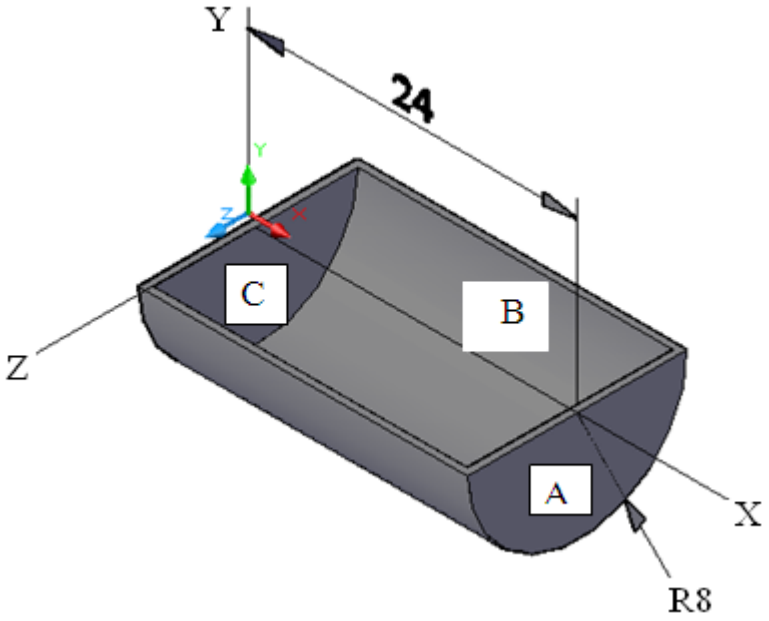
$$h=100, d_i=48, \quad \bar{y}=37.5 \quad \bar{x}=-24$$

$$V=\frac{1}{2}\pi h(r_2+r_1)t=\frac{1}{2}\pi(100)(48+50)2$$

$$V=30787$$

```
Select objects:

 ----------------   SOLIDS    ----------------

Mass:                    30787.6080
Volume:                  30787.6080
Bounding box:         X: -50.0000  --  50.0000
                      Y: -50.0000  --  50.0000
                      Z: 0.0000  --  100.0000
Centroid:             X: -24.0200
                      Y: 0.0000
                      Z: 37.0100
Moments of inertia:   X: 99608174.4328
                      Y: 99608174.4328
                      Z: 73951834.4284
Products of inertia: XY: 0.0000
                     YZ: 0.0000
                     ZX: -36975917.2142
Radii of gyration:    X: 56.8800
                      Y: 56.8800
                      Z: 49.0102
Principal moments and X-Y-Z directions about centroid:
```

جواب مسئله ۳



شرح	A	$\bar{x}$	$A\bar{x}$	$\bar{y}$	$A\bar{z}$
A	$\frac{\pi r^2}{2} = \pi 8^2/2$ =100.5	۰	۰	$-\frac{4r}{3\pi} = \frac{-4*8}{3\pi} = -3.4$	-341.7
B	$\pi(r) * h = (\pi)8 * 24 = 603$	۱۲	۷۲۳۶	$-\frac{2r}{\pi} = -5.1$	-3075.3
C	$\frac{\pi(64)}{2}$ 100.5	۲۴	۲۴۱۲	-3.4	-341.7
مجموع	804		9648		-3759

$$\bar{x} = \frac{9648}{804} = 12$$

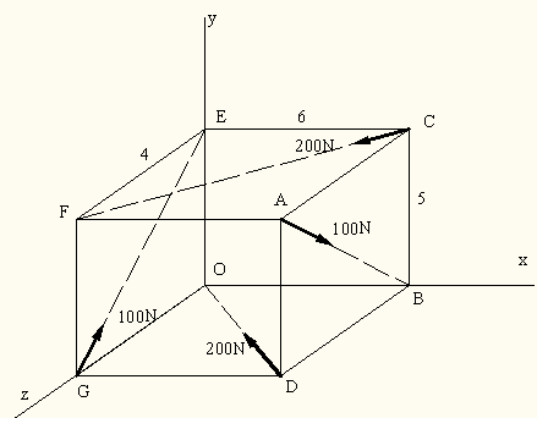
$$\bar{y} = \frac{-3759}{804} = -4.63$$

$$\bar{z} = 0$$

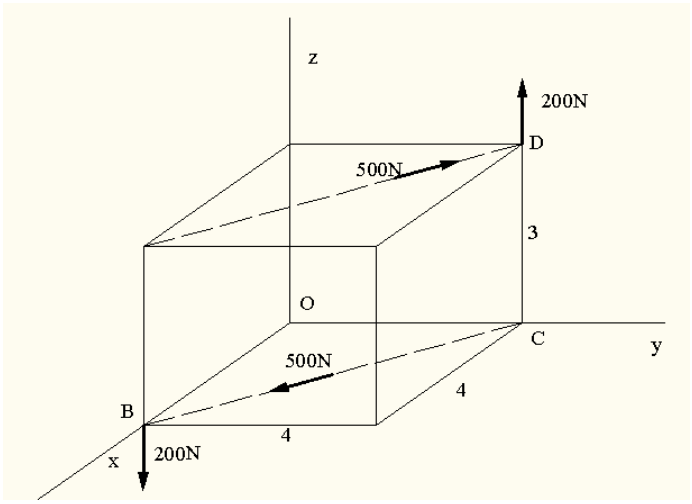
```
----------------   SOLIDS   ----------------

Mass:                       380.5254
Volume:                     380.5254
Bounding box:          X: -0.5000  --  23.5000
                       Y: -8.0000  --  0.0000
                       Z: -8.0000  --  8.0000
Centroid:              X: 11.5000
                       Y: -4.5286
                       Z: 0.0000
Moments of inertia:    X: 20051.6569
                       Y: 86575.0531
                       Z: 86575.0531
Products of inertia: XY: -19817.3885
                     YZ: 0.0000
                     ZX: 0.0000
Radii of gyration:     X: 7.2591
                       Y: 15.0836
                       Z: 15.0836
```

Homework#4

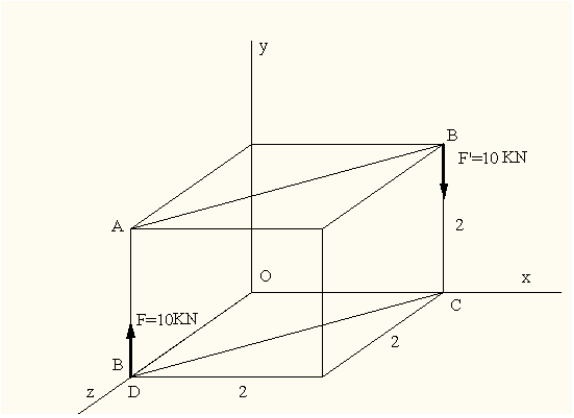
۱ - مطلوبست نیروی معادل منفرد ،(a)در نقطه Oو(b)درنقطه Dو
(c)بصورت یک کوپل نیرو در A,Cو یک نیروی منفرد در E .



۲- مطلوبست برآیند گشتاور کوپل نیروها نسبت به خط OP $\overrightarrow{OP}$ =10i+7j+15k



۳- گشتاور کوپل نیروی شکل زیر را نسبت بهO بدست آورید.



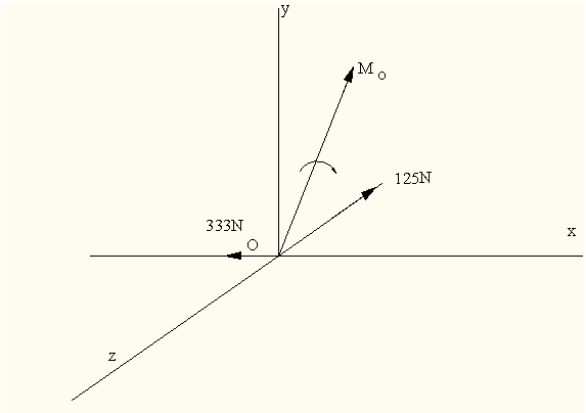
جواب مسئله ۱

A(6,5,4) , C(6,5,4) B(6,0,0) , D(6,0,4)
E(0,5,0) , G(0,0,4) F(0,5,4)

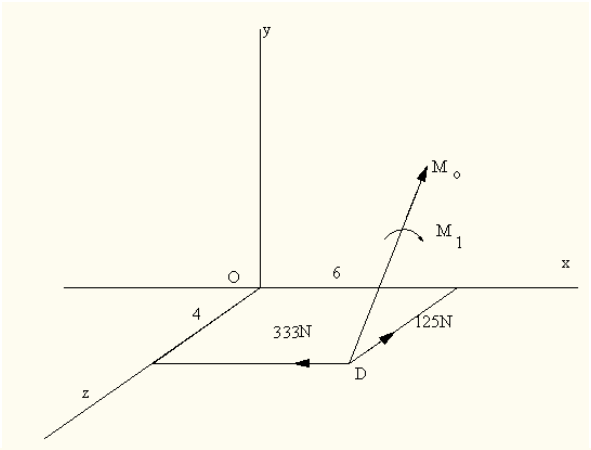
$$F\widetilde{AB} = \frac{\widetilde{AB}}{\overline{AB}} \times 100 = 100 \times \frac{-5J - 4K}{\sqrt{25+16}} = -78j - 62.5k$$

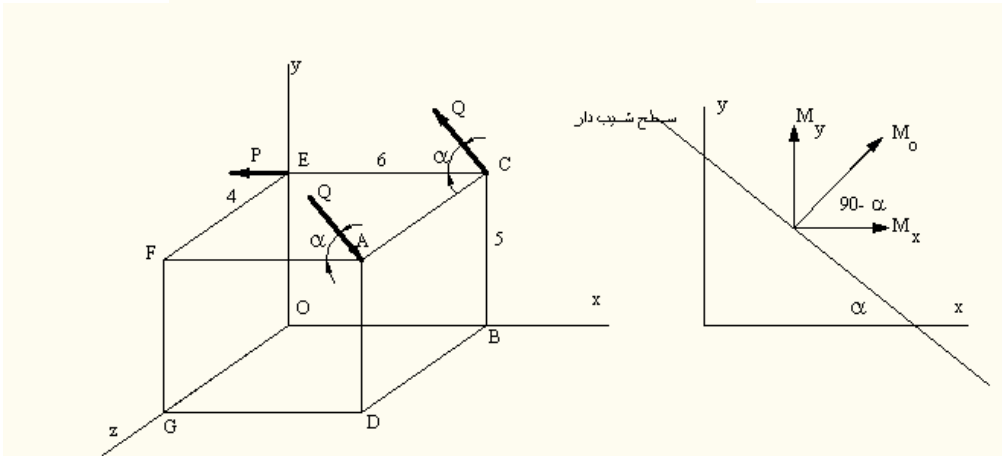
$$F\widetilde{DO} = 200 \times \frac{-6i - 4K}{\sqrt{36+16}} = -166.4i - 110.9K$$
$$F\widetilde{CF} = 200 \times \frac{-6i + 4K}{\sqrt{36+16}} = -166.4i + 110.9K$$
$$F\widetilde{GE} = 100 \times \frac{5j - 4K}{\sqrt{25+16}} = 78j - 62.5K$$
$$\tilde{\mathrm{R}} = \sum \mathrm{F} = -333\mathrm{i} - 125\mathrm{K}$$
$$\widetilde{MO} = \widetilde{roA} x F\widetilde{AB} + \widetilde{roc} \times F\widetilde{CF} + \widetilde{roG} \times FGE$$
$$\widetilde{MO} = (6i + 5j + 4k) \times (-78j - 62.5K)$$
$$+(6i + 5j) \times (-166.4i + 115.9K) + 4k \times (78j - 62.5K)$$
$$\widetilde{roA} \times \widetilde{FAB} = \begin{vmatrix} i & j & k & \mathrm{i} & \mathrm{j} \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 0 & -78 & -62.5 & 0 & -78 \end{vmatrix}$$
$$= -312.5\mathrm{i} - 468\mathrm{K} + 312\mathrm{i} + 375\mathrm{j}$$
$$\widetilde{roc} \times \widetilde{FCF} = \begin{vmatrix} i & j & k & \mathrm{i} & \mathrm{j} \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ -166.4 & 0 & 110.9 & -166.4 & 0 \end{vmatrix} = 554.5i + 832K - 665.4j$$
$$\widetilde{roG} \times F\widetilde{GE} = 4K \times (78j - 62.5K) = -312i$$
$$\widetilde{MO} = -312.5i - 468k + 312i + 375j + 554.5i + 832K - 665.4j - 312i$$
$$\widetilde{MO} = 242i - 290.5j + 364K$$

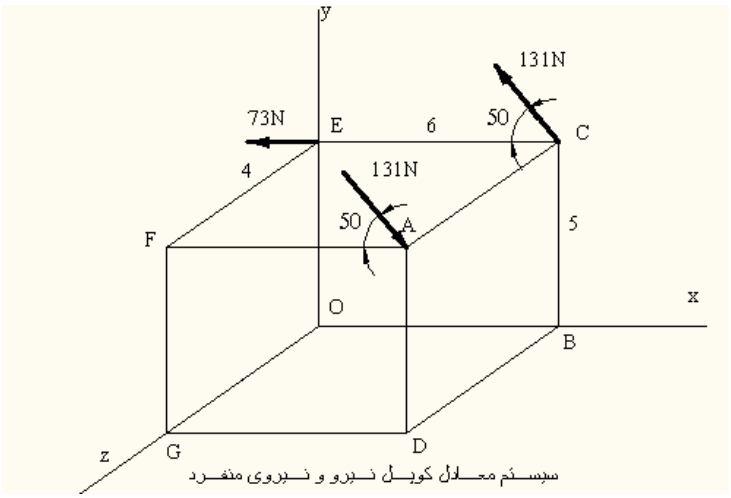
$$\overline{MO} = 525 \quad N - m$$



$$\vec{M}_1 = \vec{r}_{OD} \times \check{R} = (-6i - 4K) \times (-333i - 125K)$$
$$\vec{M}_1 = 750(-j) + 1332(j) = 582j$$
$$\vec{M}_D = \vec{M}_O + \vec{M}_1 = 242i - 290.5j + 364k + 582j$$
$$\vec{M}_D = 242i + 291.5j + 364k$$
$$\vec{M}_O = \widetilde{MO}\cos(90 - \alpha)i + \widetilde{MO}sin(90 - \alpha)j \ + P(5)k$$
$$= 242i - 290.5j + 364k$$
$$+P(5) = 364 \qquad \Rightarrow \qquad P = 73\ N$$
$$\overline{MO}\ sin\,\alpha\ = 242$$
$$\overline{MO}cos\,\alpha = -290.5 \ \Rightarrow \ \tan\alpha = \frac{242}{-290.5}$$
$$\alpha\ = -39.8^0 \ \cong \ -40^0$$
$$\overline{Mo} = Q(4) = 524 \qquad Q = 131 \quad N$$







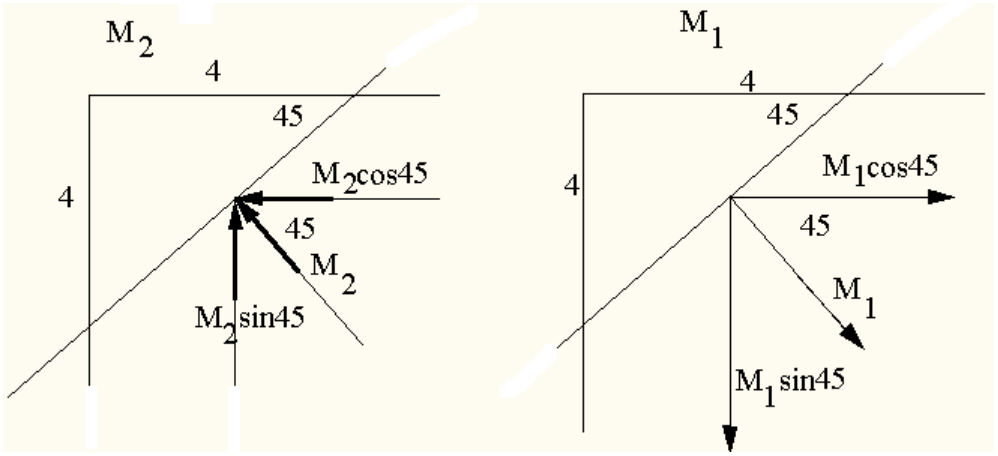
جواب مسئله ۲

برای هر دو جفت نیرو ، گشتاور آنها عمود است بر صفحه ای که بر آن جفت نیرو می گذرد.

$M_2 = (500)(3) = 1500 \quad N-m$

$M_1 = (200)(ED) = 200\ (\sqrt{16+16})$

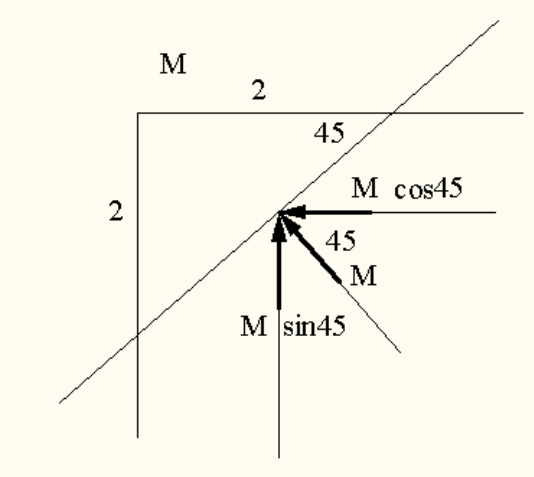
$M_1 = 1131$



$$M_1 = +1131.4\ Cos\ 45j + 1131.4\ Sin\ 45i$$
$$M_2 = -1500\ Cos\ 45j - 1500\ Sin45i$$
$$M_1 = 800i + 800j$$
$$M_2 = -1060.6\ j - 1060.6\ i$$
$$\breve{M} = \breve{M1} + \breve{M2}$$
$$\breve{M} = -1060.6j - 1060.6i + 800i + 800j$$
$$\breve{M} = -260.6i - 260.6j$$
$$\breve{OP} = 10i + 7j + 15k$$
$$\vec{M}_{OP} = (\vec{\lambda}_{OP}\ .\vec{M}_{Op})\vec{\lambda}_{OP}$$

$$\vec{M}_{OP} = (\frac{10i + 7j + 15k}{19.33}).(-260.6i - 260.6j)$$
$$\vec{M}_{OP} = \frac{(-260.6)(0) - (260.6)(7)}{19.33}$$
$$\vec{M}_{OP} = -229.2 \qquad Nt - m$$
$$\vec{M}_{OP} = -229.2 \quad \check{\lambda}OP = -229.2\ \frac{10i + 7j + 15k}{19.33}$$
$$\vec{M}_{OP} = -118.6i - 83j - 11.8k$$

جواب مسئله ۳



گشتاور بر صفحه $ABCD$ عمود است و برابر است با

$$\frac{F = \overline{AB}.F}{4 + 4)(10)}$$
$$M = 2\sqrt{2} \times 10 = 20\sqrt{2} \qquad KN - m$$

جهت آن داخل است

$$\vec{M}_O = -20\sqrt{20}\cos 45\ i - 20\sqrt{2}\ \ sin\ 45 \quad k$$

$$\vec{M}_O = -20\ i - 20\ k$$

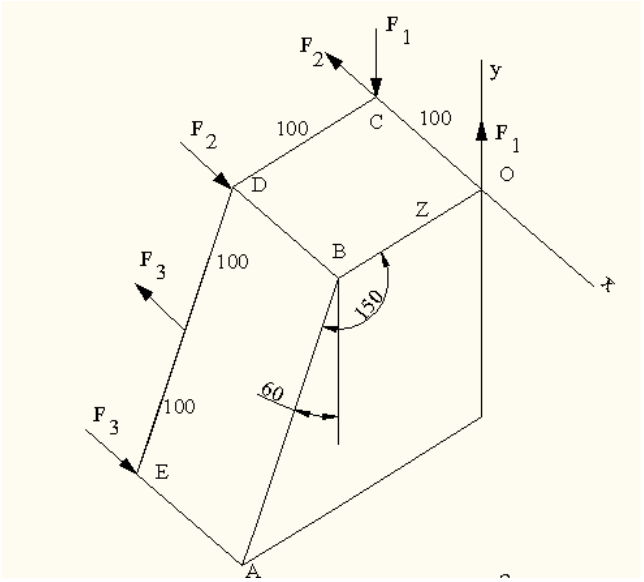
روش برداری

$$\vec{M}_O = r\overset{\frown}{AB} \times \check{\vec{F}} \qquad A(0,2,2) \quad B(2,2,0)$$

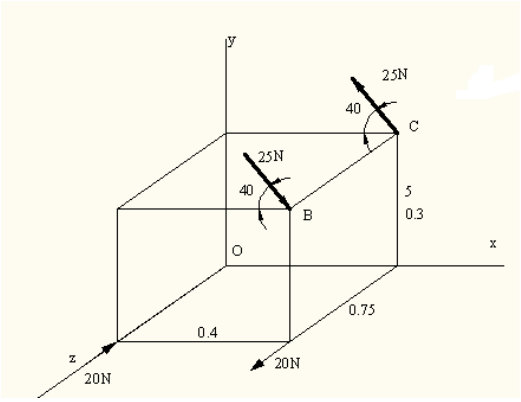
$$\vec{M}_O = (2i - 2k) \times 10\ j$$
$$\vec{M}_O = -20\ k - 20\ i$$

Homework#5

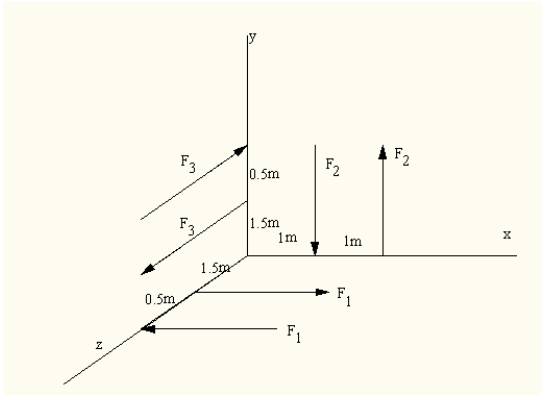
۱ - مطلوبست گشتاور زوج نیروهای شکل زیر در نقاطO,C و ثانیآ، مطلوبست گشتاور زوج نیروها نسبت به محور AO



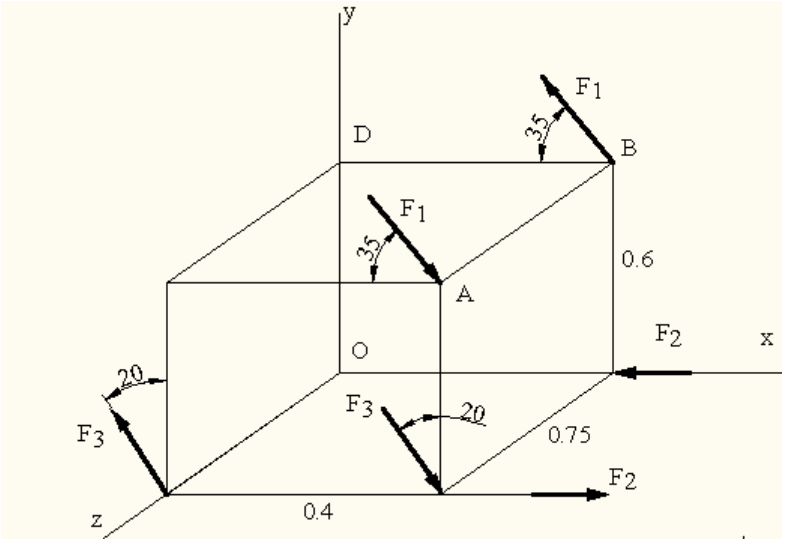
۲-کوپل نیروی معادل زیر را در نقاطB,C پیدا کنید.



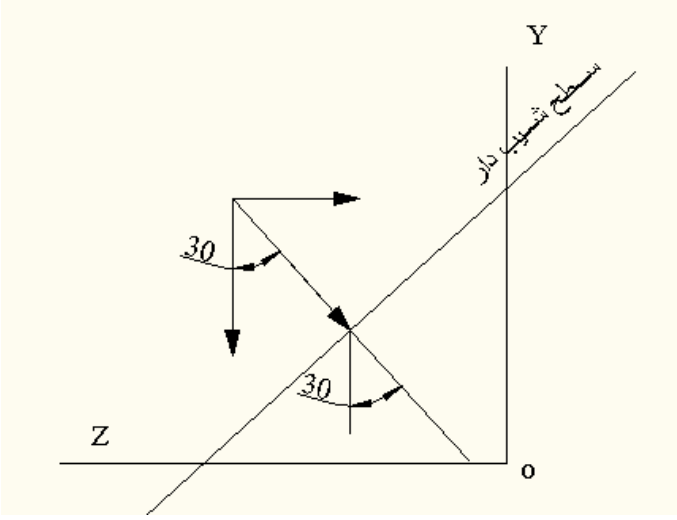
۳- مطلوبست برآیند گشتاور جفت نیروهای زیر نسبت به نقطه(P(3,4,2 و خطOP



۴- مطلوبست جفت نیروی معادل در نقطهA,B و تک نیرو در نقطه D.



جواب مسئله ۱

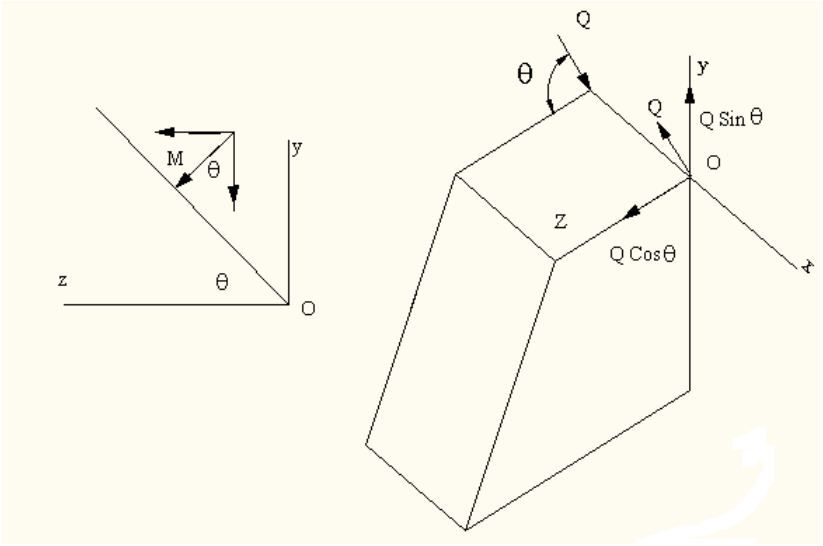


$F_1 = 200\ N$
$F_2 = 300\ N$
$F_3 = 100\ N$
$M_{OA} = ?$
$M_1 = (100)(200) = 20^{N-m}$
$\breve{M}_1 = 20\ K$
$M_2 = (300)(100) = 30 \quad N-m$
$\breve{M}_2 = 30\ \ j$
$M_3 = (100)(100) = 10 \quad N-m$

عمود بر سطح $A\ B\ D\ E$ به داخل است.

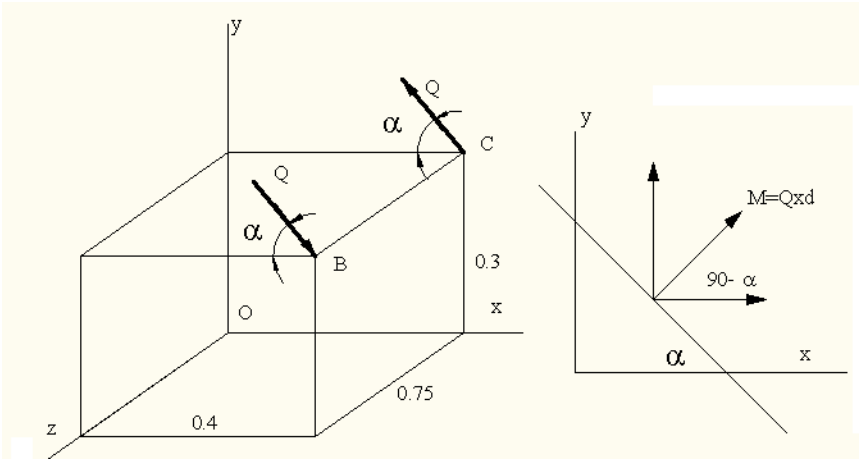
$$\breve{M}_3 = -10\ sin\ 30\ k - 10 \cos 30\ j$$
$$\breve{M}_0 = \breve{M}_1 + \breve{M}_2 + \breve{M}_3$$
$$\breve{M}_0 = 20\ k + 30\ j - 5\ k - 8.66\ j$$
$$\breve{M}_0 = 21.34\ j + 15\ k$$

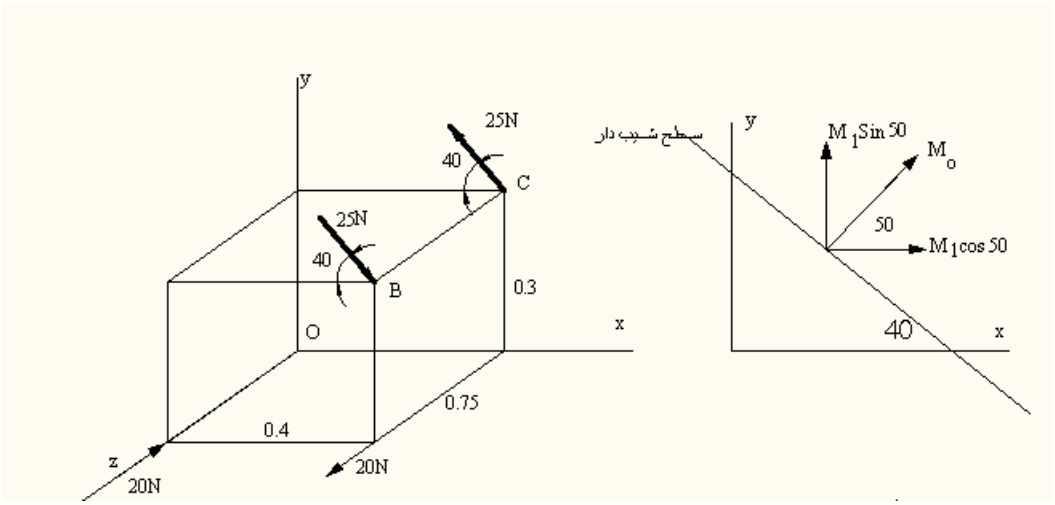
$$Z_A = 100 + 200\ sin\ 60 = 273.2$$
$$Y_A = 200\cos 60 = 100$$
$$\overrightarrow{OA} = 273.2\ K - 100\ j$$
$$\vec{\lambda}_{OA} = \frac{273.2\ k - 100j}{291}$$
$$\vec{M}_{OA} = \vec{\lambda}_{\mathrm{OA}} \cdot \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}$$
$$\vec{M}_{OA} = \frac{(273.2k - 100j)}{291} x(21.34j + 15k)$$
$$\vec{M}_{OA} = \frac{(273.2)(15) - 100(21.34)}{291}$$
$$\vec{M}_{OA} = \frac{1964}{291} = 6.75$$
$$\overline{MO} = \sqrt{(21.34)^2 + 15^4} = 26.1$$



$$M\ sin\ \theta\ k - \ M\cos\theta\ j = 273.2\ k - 100\ j$$
$$M\ sin\theta = 273.2$$
$$-M\cos\theta = -100$$
$$\tan\theta = \frac{273.2}{100} \qquad \theta = 70^0$$
$$Q * d = Mo$$
$$Q \times 0.1 = 26.1$$
$$Q = 261 \quad N$$

جواب مسئله ۲





$$M_1 = 18.75 \;\; N-m$$

$$\overrightarrow{M_1} = 18.75 \;\cos 50\; i + 18.75 \;\; sin\; 50\; j$$

$$M_2 = (0.4)(20) = 8 \;\; N-m$$

$$\vec{M}_2 \; = -8j$$

$$\breve{M} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} = 18.75 \cos i + 18.75 \; sim \; 50 \; j - 8j$$

$$\breve{M} = 6.36\; j + 12\; i$$

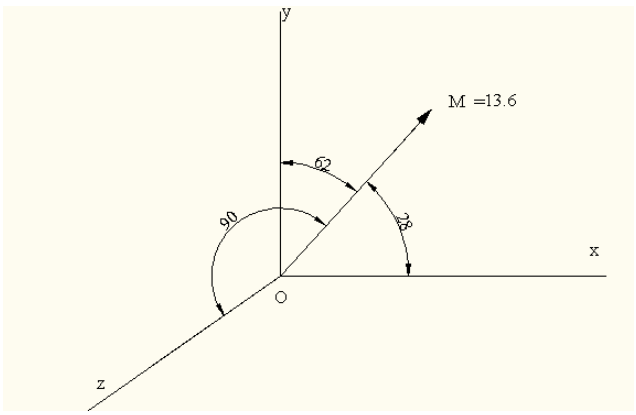
$$\bar{M} = \sqrt{6.36^2 + 12^2} = 13.6 \qquad N-m$$

$$\cos\theta x = \frac{M_x}{M} = \frac{12}{13.6}$$

$$\theta x = 28^0$$

$$\cos\theta y = \frac{6.36}{13.6} \qquad \theta y = 62^0$$

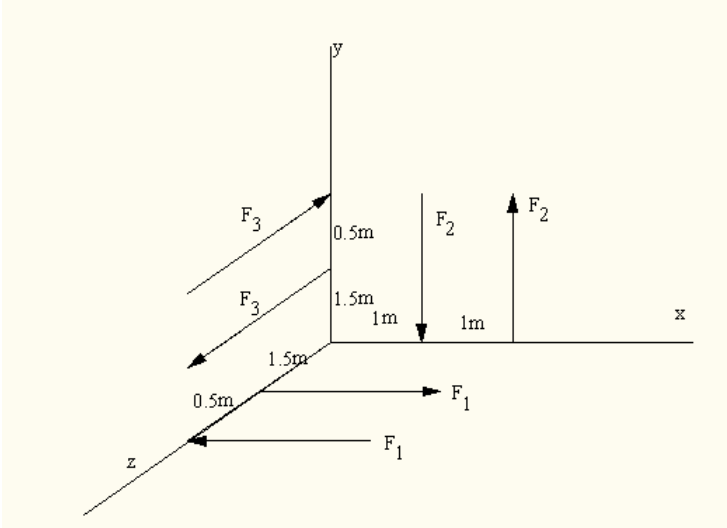
$$\cos\theta z = \frac{M_z}{M} = {}^0\!/_{13.6} = 0 \qquad \theta Z = 90^0$$



$$M\cos(90-\alpha)i + M\,sin\,(90-\alpha)j = 6.36\,j + 12i$$
$$M\,sin\,\alpha\,i + M\cos\alpha\,j = 6.36\,j + 12i$$
$$M\,sin\,\alpha\; = 12$$
$$M\cos\alpha\; = 6.36$$
$$\tan\alpha\; = \frac{12}{6.36} \quad \Rightarrow \quad \alpha\; = 62^0$$
$$Q \times d = M$$
$$Q \times 0.75 = 13.6 \qquad Q = 18.2 \quad N$$

جواب مسئله ۳

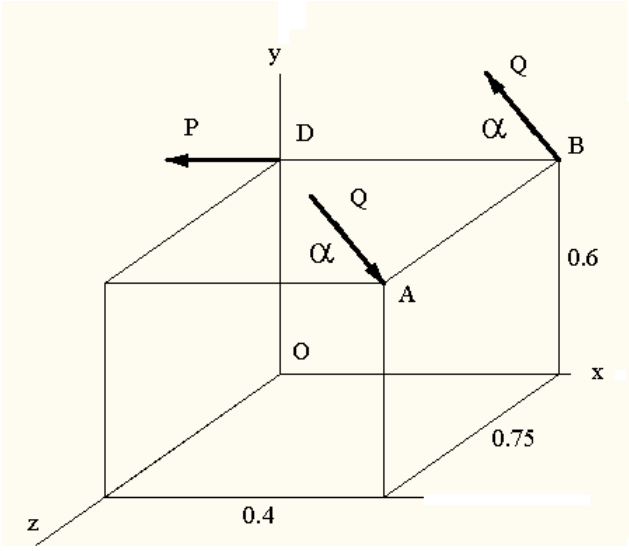
$F_1 = 200\ N$
$F_2 = 100\ N$
$F_3 = 300\ N$
$M_1 = d_1 \times F_1 = (0.5)(200) = 100^{N-m}$
$M_1 = -100\ K$
$M_2 = d_2 \times F_2 = (1)(100) = 100^{N-m}$
$M_2 = +100\ i$
$M_3 = d_3 \times F_3 = (0.5)(300) = 150^{N-m}$
$M_3 = -150\ j$
$\breve{M} = \breve{M_1} + \breve{M_2} + \breve{M_3}$
$\breve{M} = 100\ i - 150\ j - 100\ k$

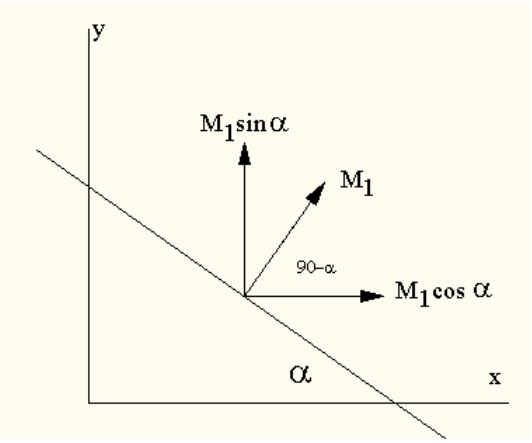


این گشتاور در نسبت به هر نقطه‌ای صادق است.

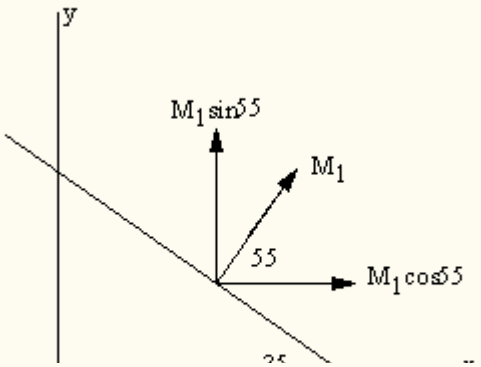
$$\vec{M}_P = 100\ i - 150\ j - 100\ k$$
$$\vec{M}_{OP} = \vec{\lambda}_{OP}.\vec{M}_P$$
$$\vec{M}_{OP} = \frac{3i + 4j + 2k}{5.38}.(100\ i - 150j - 100k)$$
$$\vec{M}_{OP} = \frac{3(100) - 4(150) - 2(100)}{5.38} = \frac{-5.0}{5.38}$$
$$\vec{M}_{OP} = -92.9 \quad N - m$$

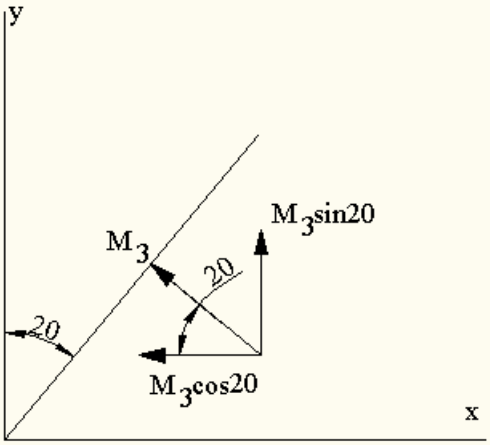
جواب مسئله ۴





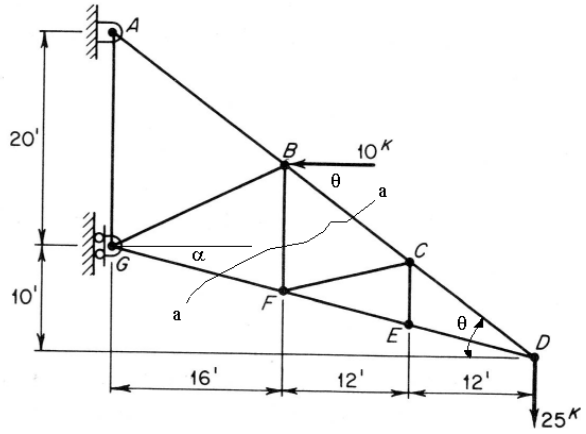
$F_1 = 200\ N$
$F_2 = 300\ N$
$F_3 = 100\ N$
$M_1 = d_1 \times F_1 = (0.75)(200) = 150 \quad N-m$
$M_1 = 150\cos 55\ i + 150\ sin\ 55\ j$
$M_1 = 86\ i + 122.8\ j$
$M_2 = d_2 \times F_2 = 0.75 \times 300 = 225\ \ N-m$
$M_2 = 225\ j$
$M_3 = d_3 \times F_3 = 0.4 \times 100 = 40 \quad N-m$
$M_3 = 40\ sin\ 20\ j - 40\cos 20\ k$
$M_3 = 13.7\ j - 37.6\ k$
$\widetilde{M} = \widetilde{M_1} + \widetilde{M_2} + \widetilde{M_3}$
$M = 86i + 122.8j + 225j + 13.7j - 37.6k$
$\widetilde{M} = 86i + 361.5j - 37.6\ k$
$M_2 = -P(0.6)(K)$
$M_1 = M\ sin\ \alpha i + M\cos\alpha j$
$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = M\ sin\ \alpha i + M\cos\alpha j - 0.6\ p\ k$
$= 86\ i + 361.5\ j - 37.6\ k$
$M\ sin\ \alpha\ = 86$
$M\cos\alpha\ = 361.5 \qquad \tan\alpha\ = \dfrac{86}{361.6}$
$\alpha = 13.4^0$
$0.6\ p = 37.6 \qquad p = 62.6\ \ N$
$Q \times 0.75 = M = 373.6$
$Q = 498.2 \quad\ N$



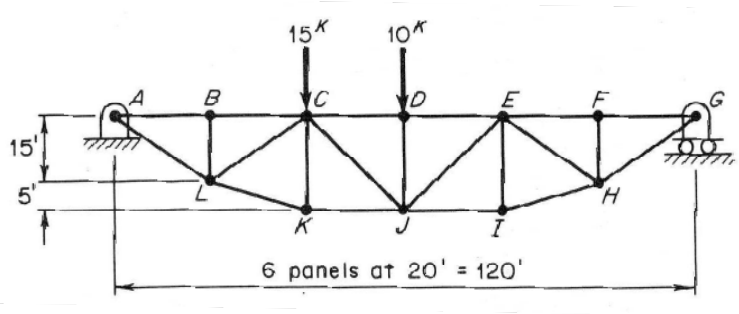


Homework#6

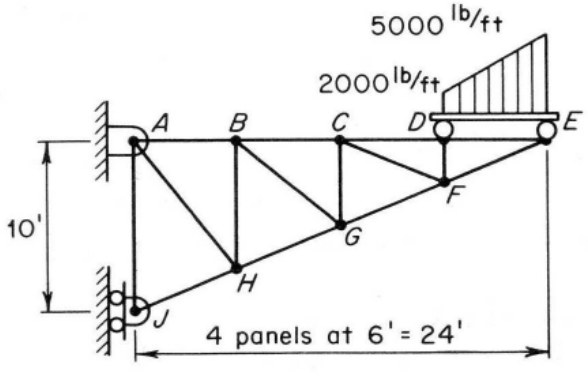
۱ - از راه روش Maxwellمطلوبست نیروهای BF,BCخرپای شکل زیر را.



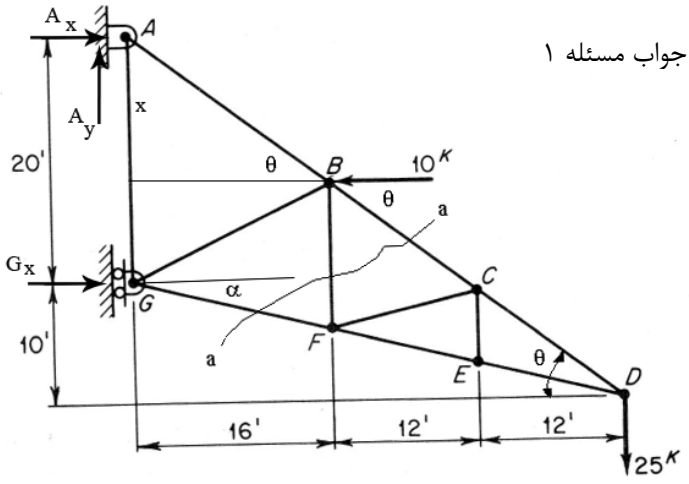
۲- از راه روش Maxwellمطلوبست نیروهای F_{CL},F_{EJ},F_{BC}خرپای شکل زیر را.



۳- از راه روش Maxwellمطلوبست نیروهای F_{AB},F_{BH},F_{GH}خرپای شکل زیر را.



جواب مسئله ۱



$\tan\theta = \frac{30}{40}$

$\theta = 36.87^{0}$

$\frac{3}{4} = \tan\theta = \frac{x}{16}$

$x = 12$

$\curvearrowright + \sum MA = 0$

$(40K)(25) + 10(12) - G_x(20) = 0$

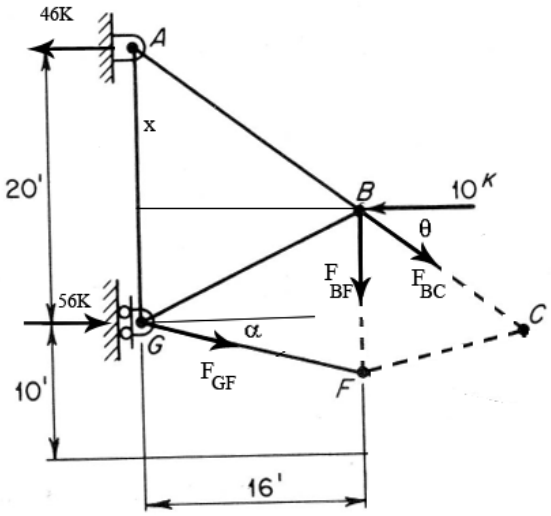
$\Rightarrow G_x = 56K \longrightarrow$

$\sum FX = 0 \qquad G_x + A_x - 10 = 0 \quad \Rightarrow A_x = -46\ K$

$\sum Fy = 0 \qquad A_x = 46K \quad \leftarrow$

$\mathrm{A_Y} - 25 = 0 \quad \Rightarrow \ \mathrm{A_Y} = 25\ K\ \uparrow$

برشa-a



$tan\alpha = \frac{10}{40} \Rightarrow \alpha = 14$

$\sum MG = 0 \qquad \curvearrowright^{+}$

$(16F_{BF} + 46(20) + 10(8) - F_{BC}\ (8)Cos\ \theta$

$-F_{BC}\ (16)(sin\ \theta\ ) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta = 36.87^{0}$

$1000 + 16\ F_{BF} - 6.4\ F_{BC} - 9.6\ F_{BC} = 0$

$1000 + 16F_{BF} - 16\ F_{BC} = 0$

$\rightarrow^{+} \sum F_x = 0$

$-46 + 56 - 10 + F_{BC}\ Cos\ \theta\ + F_{GF}\ cos\alpha = 0$

$F_{BC}Cos\ 36.87 + F_{GF}\ Cos\ 14 = 0$

$F_{GF} = -0.824\ F_{BC}$

$\uparrow + \sum Fy = 0$

$25 - F_{BF} - F_{BC}\ sin\ \theta - F_{GF}sin\ \alpha = 0$

$25 - F_{BF} - F_{BC}sin\ 36.87 - F_{GF}\ sin14 = 0$

$25 - F_{BF} - 0.6\ F_{BC} + 0.824\ F_{BC}\ sin14 = 0$

$0.4\ F_{BC} = 25 - F_{BF}$

$F_{BC} = 62.5 - 2.5\ F_{BF}$

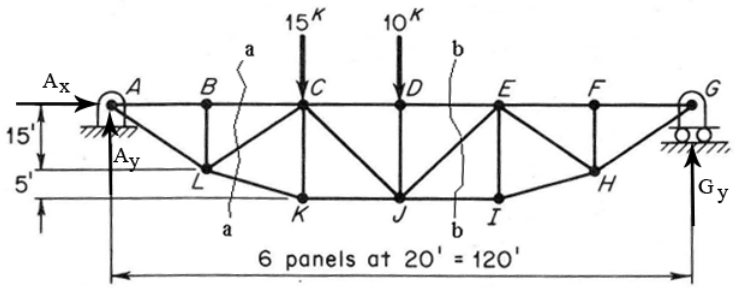
$1000 + 16\ F_{BF} - 16\ (62.5 - 2.5\ F_{BF}) = 0$

$1000 + 16\ F_{BF} - 1000 + 40\ F_{BF} = 0 \ \Rightarrow F_{BF} = 0$

$1000 - 16\ F_{BC} = 0$

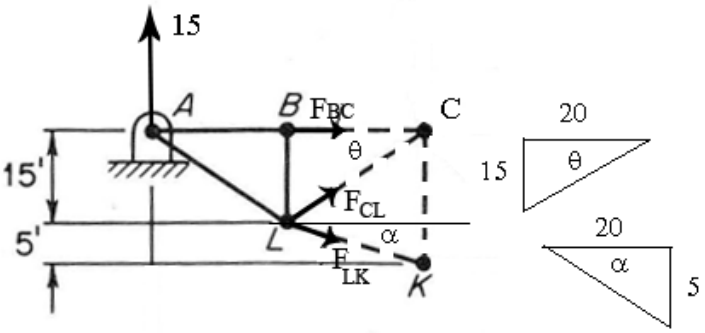
$F_{BC} = 62.5\ K \qquad T$

جواب مسئله ۲



$$\sum MA = 0 \qquad \curvearrowright^{-}$$
$$120\ Gy - 10\ (3 \times 20) - 15(2)(20) = 0$$
$$120\ \ Gy = 600 + 600 = 1200$$
$$Gy = 10\ KIPS$$
$$\sum FX = 0 \qquad AX = 0$$
$$FFy = 0 \qquad Ay - 15 - 10 + 10 = 0$$
$$Ay = 15\ \ KIPS$$

برش a-a

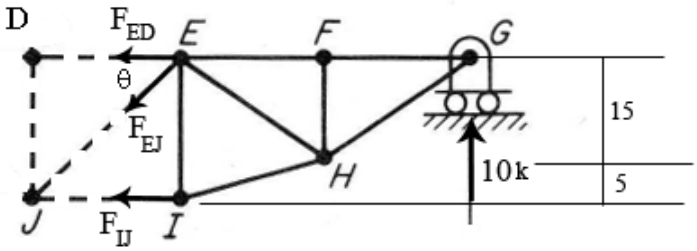


$$\tan\theta = {}^{15}/_{20} \quad \Rightarrow \quad \theta = 36.86^{\,0}$$
$$\tan\alpha = {}^{5}/_{20} = \ \Rightarrow \alpha\ = 14^{0}$$
$$\sum MC = 0 \ \curvearrowright^{+}$$
$$(15)(40) - F_{LK}\ (\cos\alpha)\ (15) - F_{LK} sin\ \alpha(20) = 0$$
$$600 - F_{LK}\ (14.55) - F_{LK}(4.48) = 0$$
$$F_{LK} = {}^{600}/_{19.4} = 31\ \ KIPS$$

$$\sum Fy = 0$$
$$15 + F_{CL}\ sin\ \theta - F_{LK} sin\alpha\ = 0$$
$$15 + F_{CL} sin\ \theta - F_{LK}\ sin\alpha\ = 0$$
$$15 + F_{CL}\ sin\ 36.86 - 31\ (sin\ 14) = 0$$
$$F_{CL} = {}^{-7.5}/_{sin\ 36.86}$$
$$F_{CL} = -12.5\ KIPS$$
$$F_{CL} = 12.5\ KIP \quad C$$
$$\sum FX = 0$$
$$F_{BC} + F_{CL}\cos 36.86 + F_{LK}\cos 14 = 0$$
$$F_{BC} - 12.5\cos 36.86 + 31\cos 14 = 0$$
$$F_{BC} - 10 + 30 = 0$$
$$F_{BC} = -20\ KIPS$$
$$\boxed{F_{BC} = 20\ KIPS\ \ C}$$

برش b-b

$\sum Fy = 0$

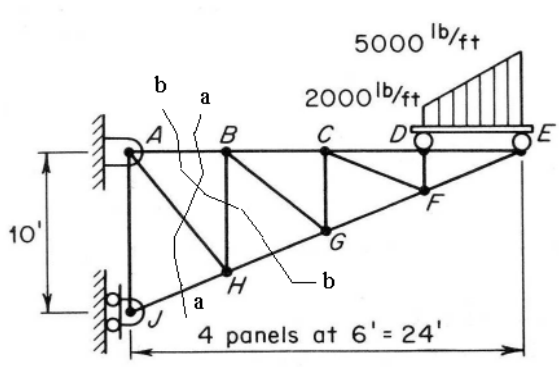


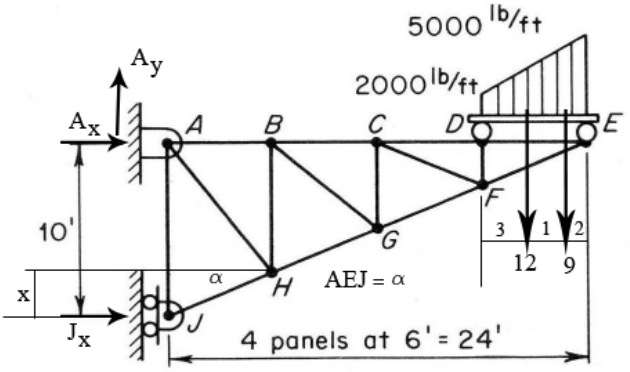
$tan\theta = \frac{20}{20} \Longrightarrow \theta = 45$

$10 - F_{EJ}\ sin\ 45 = 0$

$$\boxed{F_{EJ} = \frac{10}{sin\ 45} = 14.14\ KIP \quad T}$$

جواب مسئله ۳

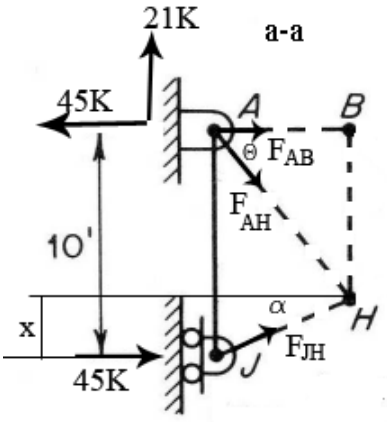




$$|KIPS = 1000|b$$
$$F_1 = 6 \times 2 = 12 \quad K$$
$$F_2 = 3 \times {}^{6}/_{2} = 9 \quad K$$
$$\tan\alpha = {}^{10}/_{24}$$
$$\alpha = 22.62$$
$$\frac{10}{24} = \frac{X}{6}$$
$$X = 2.5'$$
$$\sum MA = 0 \quad \curvearrowright^{+}$$
$$-10J_X \times 9(18+4) + 12(18+3) = 0$$
$$10J_X = 450 \qquad J_X = 45 \quad K \rightarrow$$
$$\sum FX = 0 \qquad A_X + J_X = 0 \qquad A_X = -45 \quad K \qquad A_X = 45 \leftarrow K$$
$$\sum Fy = 0 \qquad A_Y = 9 + 12 = 21 \quad Kips \qquad A_Y = 21 \quad K \quad \uparrow$$

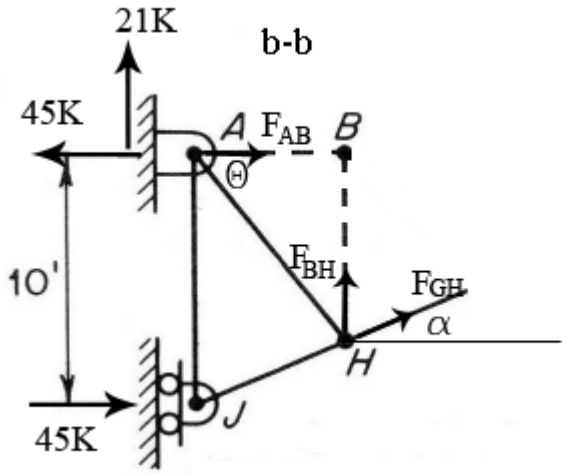
برش*aa*

$$\tan\theta = {}^{7.5}/_{6}$$
$$\theta = 51.3^0$$
$$\sum MA = 0 \qquad \curvearrowleft^{+}$$
$$(10)(45) + F_{JH}\, Cos\, \alpha(10) = 0$$
$$F_{JH} = -48.75 \qquad KIP$$
$$\sum FX = 0$$
$$45 - 45 + F_{JH} Cos\, \alpha + F_{AB} + F_{AH} Cos\, \theta = 0$$
$$\sum Fy = 0$$
$$21 + F_{JH}\, Sin\, \alpha - F_{AH}\, Sin\, \theta = 0$$
$$21 - F_{AH}\, Sin\, 51.3 - 48.75\, Sin\, 22.62 = 0$$
$$F_{AH} = 2.88 \quad K$$
$$F_{JH}\, Cos\, \alpha + F_{AB} + F_{AH}\, Cos\, \theta = 0$$



$-48.75\ Cos\ 22.62 + F_{AB} + 2.88\ Cos\ 51.3 = 0$
$-45 + 108 + F_{AB} = 0$
$\boxed{FAB = 43.2\ \ K\ \ T}$

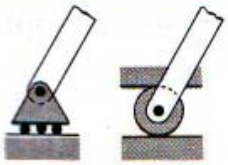
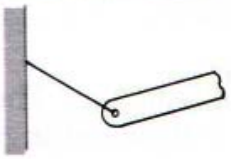
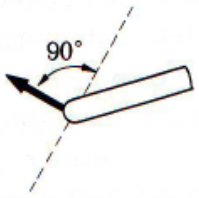
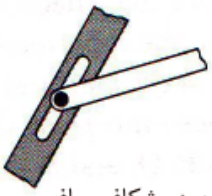
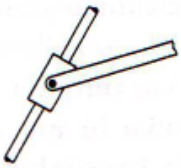
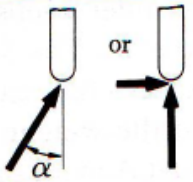
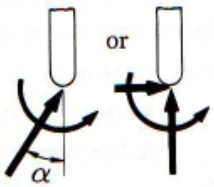
برش bb



$$\sum FX = 0$$
$$F_{AB} + 45 - 45 + F_{GH}\ Cos\ \alpha = 0$$
$$43.2 + F_{GH}\ Cos\ 22.62 = 0$$
$$F_{GH} = \ -46.8\ \ K$$
$$\boxed{F_{GH} = 46.8\ \ K\ \ C}$$
$$\sum Fy = 0$$
$$21 + F_{BH} + F_{GH}\ Sin\ \alpha = 0$$
$$21 + F_{BH} - 46.8\ Sin\ 22.62 = 0$$
$$21 - 18 + F_{BH} = 0$$
$$F_{BH} = -3\ \ K$$
$$F_{BH} = 3\ \ K\ \ C$$

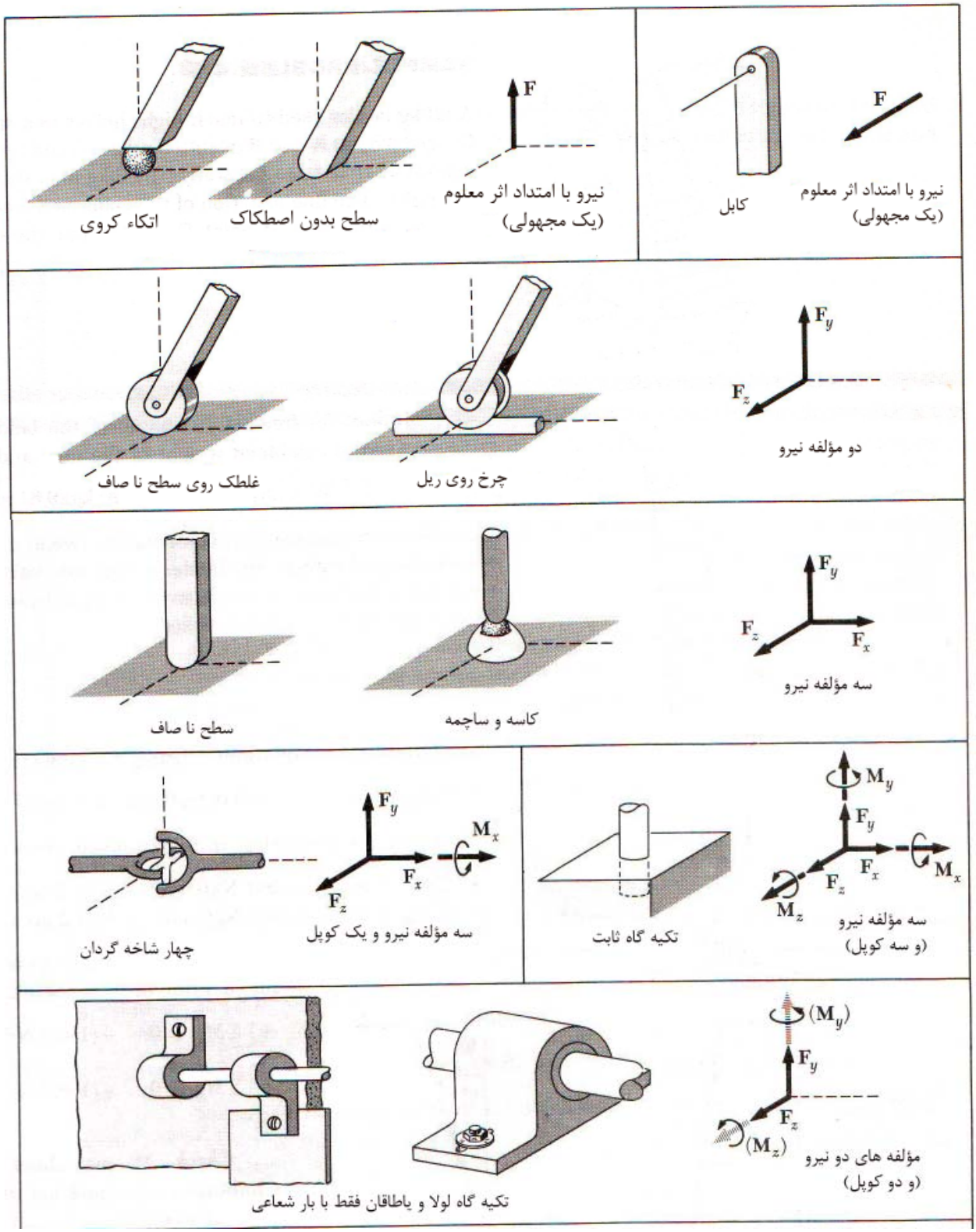
جدول (۱)

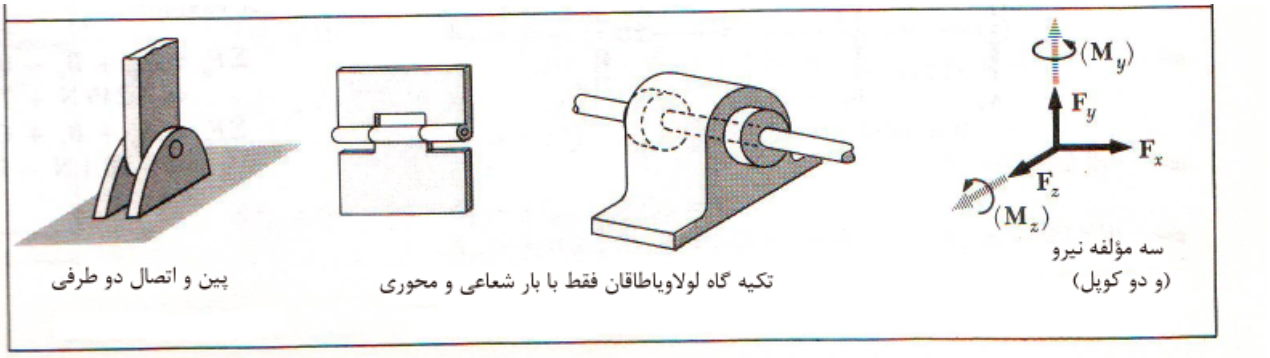
عکس العمل در نقاط اتکاء و اتصال

تعدادمجهولات	عکس العمل	تکیه گاه یا اتصال
1	نیرو با خط اثر معلوم	سطح صاف رورو ک  غلطک ها
1	نیرو با خط اثر معلوم	اتصال کوتاه میله ای  کابل کوتاه
1	 نیرو با خط اثر معلوم	 پین در شکاف صاف  طوقه روی میله صاف
2	 نیرو با امتداد مجهول	سطح غیر صاف پین صاف با مفصل
3	 نیرو و کوپل	پایه ثابت

جدول(۲)

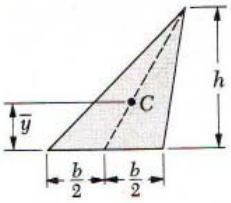
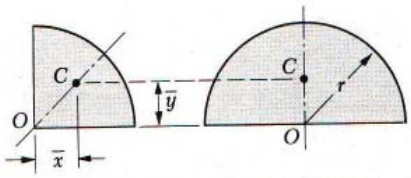
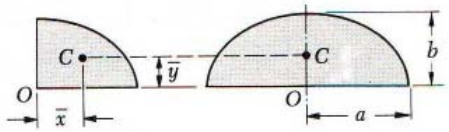
عکس العمل ها در نقاط اتکاء و اتصال

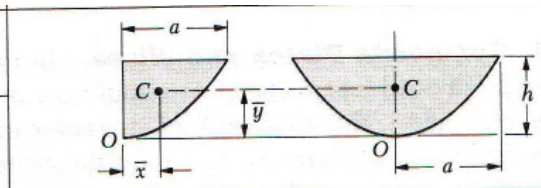
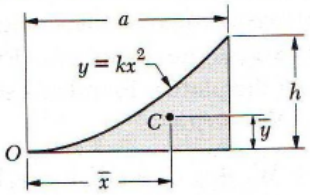
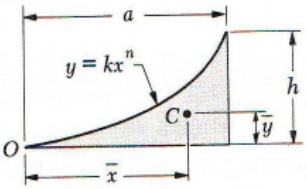
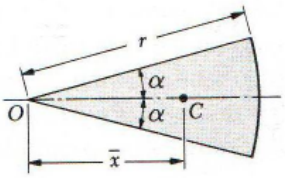




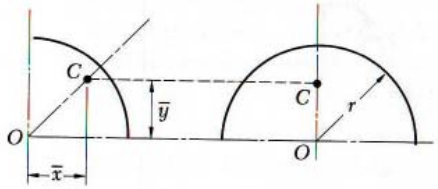
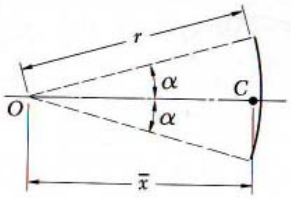
جدول(۳)

مراکز سطوح برای اشکال مختلف

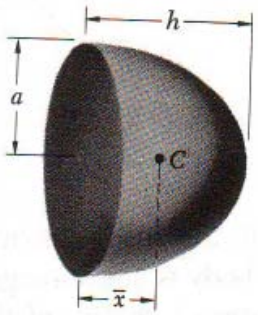
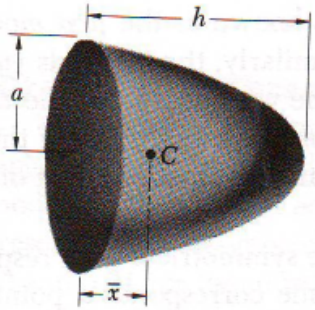
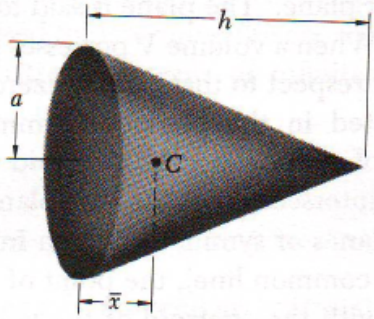
شکل		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
سطح مثلث			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
سطح ربع دایره		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
سطح نیم دایره		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
سطح ربع بیضی		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
سطح نیم بیضی		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$

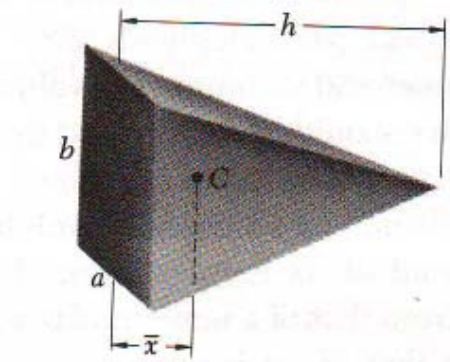
سطح نیم سهمی		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
سطح سهمی		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
سهمی با درجه ۲		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
سهمی با درجه کلی		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
قطاع		$\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

مراکزسیم (خم)

شکل		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Length
قوس ربع دایره		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
قوس نیم دایره		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
قطاع		$\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

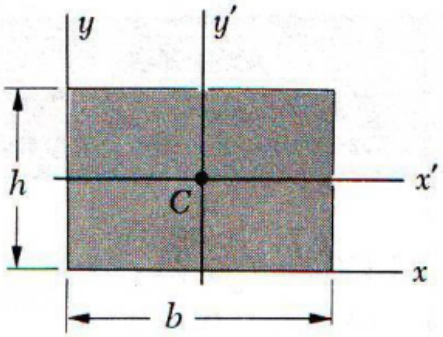
جدول(۴)
مرکز ثقل احجام

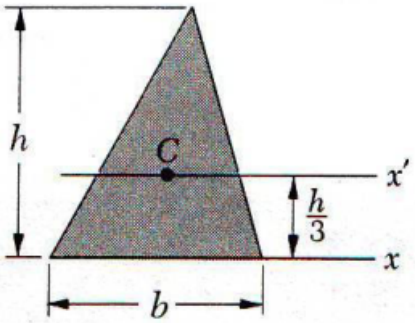
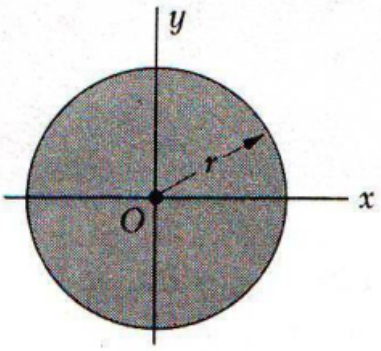
شکل		$\bar{x}$	Volume
نیم کره		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
نیم بیضی حاصل از دوران		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
سهمی حاصل از دوران		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$
مخروط		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$

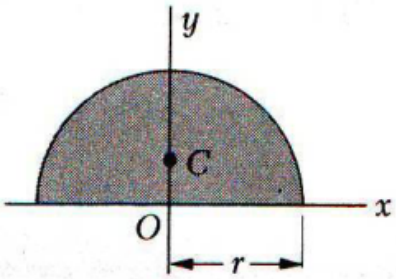
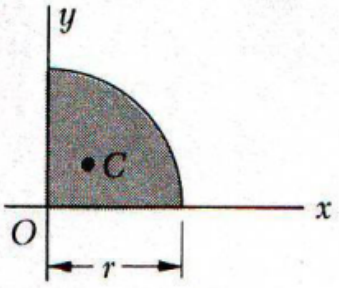
منشور		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}abh$

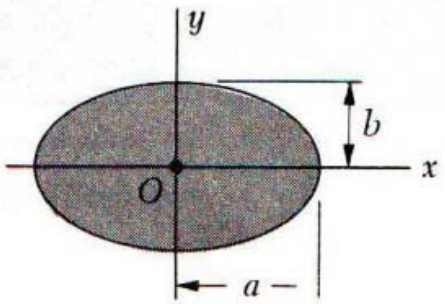
جدول(۵)

گشت آور لختی

مستطیل		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$

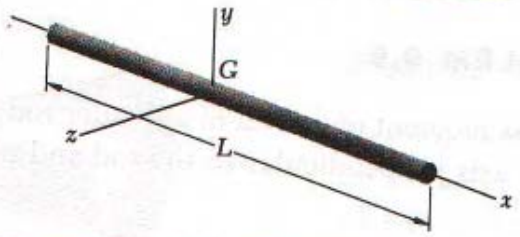
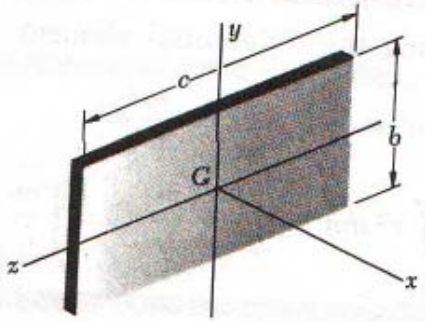
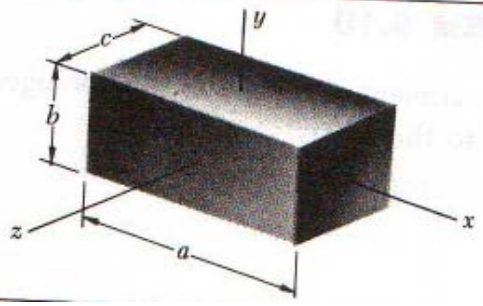
مثلث		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
دایره		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$

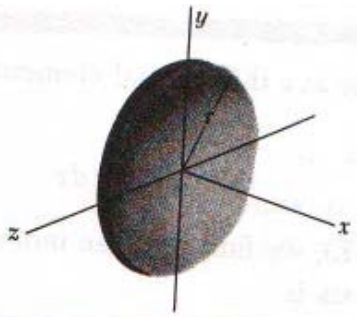
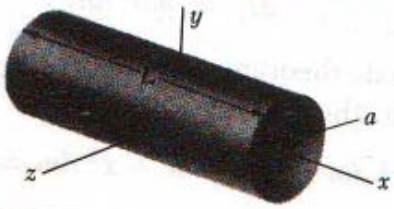
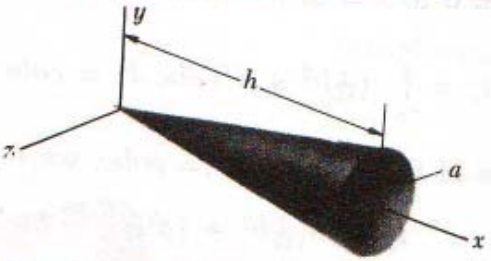
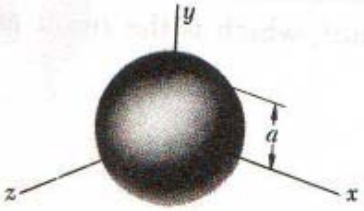
نیم دایره		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
ربع دایره		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$

بیضی		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3 b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

جدول(۶)

گشت آور لختی برای اشکال مختلف هندسی

میله نازک		$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$
صفحه چهار گوش نازک		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$
مکعب مستطیل		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

دیسک باریک		$I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$
استوانه مدور		$I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$
مخروط		$I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$
کره		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$

جدول (۷)

نام جسم	ضریب اصطکاک
۰/۱۵—۰/۶۰	فلز روی فلز
۰/۲۰—۰/۶۰	فلز روی چوب
۰/۳۰—۰/۷۰	فلز روی سنگ
۰/۳۰—۰/۶۰	فلز روی چرم
۰/۲۵—۰/۵۰	چوب روی چوب
۰/۲۵—۰/۵۰	چوب روی چرم
۰/۴۰—۰/۷۰	سنگ روی سنگ
۰/۲۰—۱/۰۰	خاک روی خاک
۰/۶۰—۰/۹۰	لاستیک روی سیمان